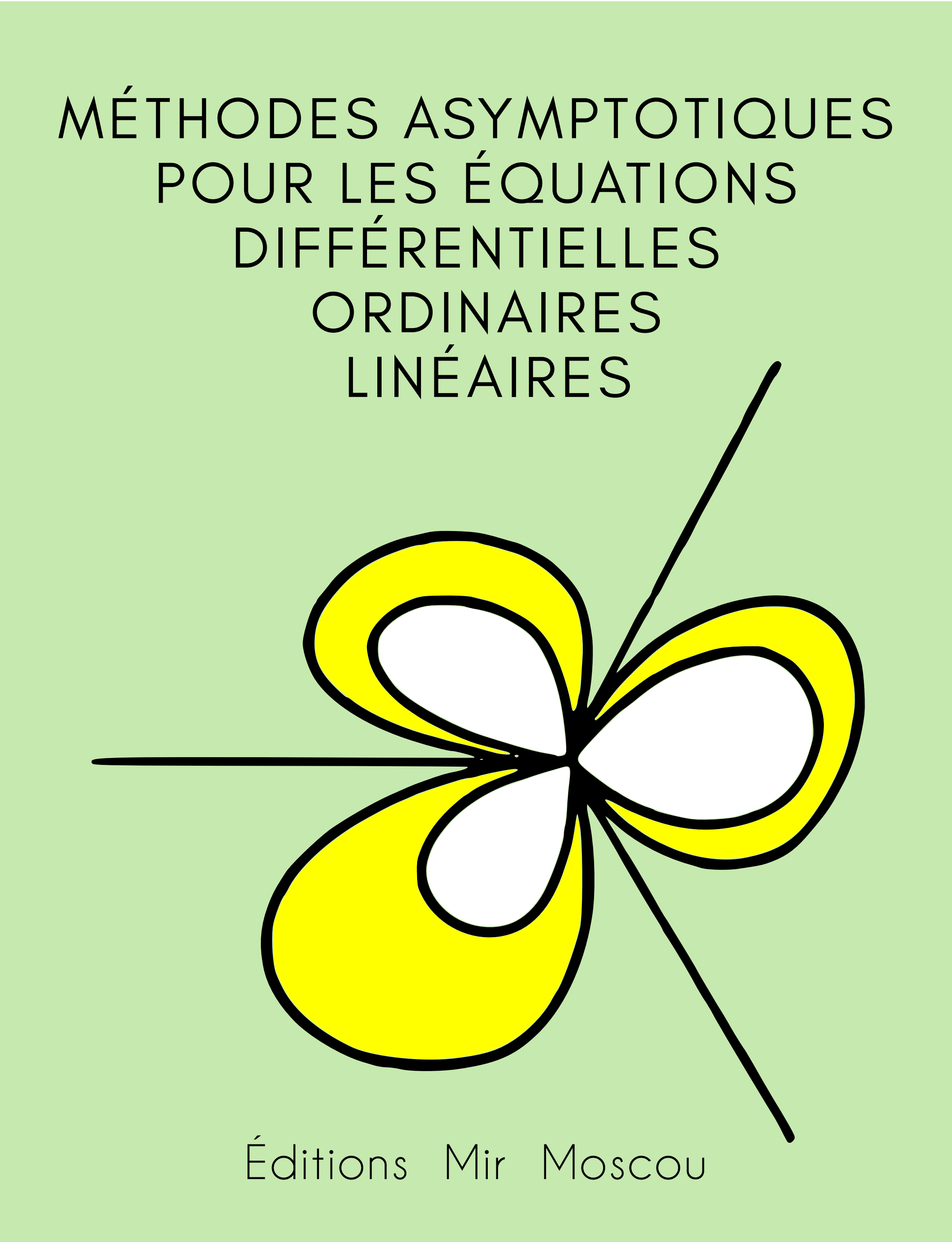
M. Fédoriouk

MÉTHODES ASYMPTOTIQUES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES



Éditions Mir Moscou

М. В. ФЕДОРЮК

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

M. FÉDORIOUK

MÉTHODES ASYMPTOTIQUES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par *Djilali Embarek*

На французском языке

Imprimé en Union Soviétique

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 7

Chapitre premier. THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 9

§ 1. Analyticité des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires 9
§ 2. Points singuliers réguliers 13
§ 3. Points singuliers irréguliers 25

Chapitre II. ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE SUR L'AXE RÉEL . 34

§ 1. Transformations des équations du second ordre 34
§ 2. Estimations WKB 38
§ 3. Représentation asymptotique des solutions de l'équation du second ordre pour de grandes valeurs du paramètre 41
§ 4. Systèmes de deux équations contenant un grand paramètre . 53
§ 5. Systèmes d'équations proches de systèmes diagonaux . . . 56
§ 6. Représentation asymptotique des solutions pour de grandes valeurs de l'argument 62
§ 7. Représentations asymptotiques doubles 70
§ 8. Contre-exemples 76
§ 9. Racines de multiplicité constante 79
§ 10. Problèmes aux valeurs propres 81
§ 11. Problème de diffusion 85

Chapitre III. ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE DANS LE PLAN COMPLEXE 93

§ 1. Lignes de Stokes et domaines limités par elles 93
§ 2. Approximations WKB dans le plan complexe 101
§ 3. Equations à coefficients polynomiaux. Représentation asymptotique globale des solutions 105
§ 4. Equations à coefficients entiers et méromorphes 123
§ 5. Représentation asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $-d^2/dx^2 + \lambda^2 q(x)$. Problèmes auto-adjoints 127
§ 6. Représentation asymptotique du spectre discret de l'opérateur $-y'' + \lambda^2 q(x) y$. Problèmes non auto-adjoints 143
§ 7. Problème aux valeurs propres à points singuliers réguliers . . 150
§ 8. Approximation quasi classique dans les problèmes de diffusion 160
§ 9. Equations de Sturm-Liouville à potentiel périodique 180

Chapitre IV. ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE À POINTS DE RETOUR 188

§ 1. Point de retour simple. Cas réel 188
§ 2. Point de retour simple. Cas complexe 203
§ 3. Quelques équations modèles 210
§ 4. Points de retour multiples et fractionnaires 212
§ 5. Confluence d'un point de retour et d'un point singulier régulier 226
§ 6. Point de retour multiple. Cas complexe 229
§ 7. Deux points de retour voisins 233
§ 8. Confluence de plusieurs points de retour 240

Chapitre V. ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ORDRE *n* 250

§ 1. Equations et systèmes sur un intervalle fini 250
§ 2. Systèmes d'équations sur un intervalle fini 263
§ 3. Equations sur un intervalle infini 274
§ 4. Systèmes d'équations sur un intervalle infini 293
§ 5. Equations et systèmes dans un plan complexe 314
§ 6. Points de retour 325
§ 7. Problème de diffusion, invariants adiabatiques et problème aux valeurs propres 361
§ 8. Exemples 371

Complément. DÉFORMATIONS ISOMONODROMES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 383

§ 1. Systèmes d'équations 383
§ 2. Déformations isomonodromes des équations scalaires 406

Bibliographie 422
Index alphabétique des matières 429

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage expose les principaux résultats de la théorie asymptotique des équations et systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires, relatifs au comportement des solutions des équations à petits paramètres en les dérivées supérieures et au comportement des solutions pour de grandes valeurs de l'argument. Bien que ces questions aient fait l'objet d'études nombreuses et éparses, les méthodes de démonstration sont à peu près du même type, de sorte que le sujet traité s'inscrit bien dans le cadre d'une monographie genre aide-mémoire. Nous nous sommes bornés aux équations homogènes. La représentation asymptotique des solutions de l'équation non homogène se déduit de celle des solutions d'un système fondamental par les méthodes des estimations asymptotiques des intégrales.

Le lecteur peut s'initier à la notion de développement asymptotique qui est systématiquement utilisée dans cet ouvrage en consultant les monographies [27, 37]. Par « solution asymptotique formelle » on comprend une fonction satisfaisant l'équation avec un certain degré de précision. Même si cette notion est vague, sa signification ressort toujours clairement du contexte. Signalons encore que le terme « ligne de Stokes » équivaut ici au terme « ligne anti-Stokes » utilisé en physique.

Le chapitre I est un bref rappel des principales notions de théorie analytique des équations différentielles. Aux § 2, nº 4 et § 3, nº 3 sont exhibés les résultats acquis ces dernières années sur le transfert d'une condition aux limites d'un point singulier de l'équation en un point non singulier.

Le chapitre II est consacré aux équations du second ordre sur un intervalle fini et sur un demi-axe. On y cite les formules asymptotiques des solutions des équations à petit paramètre en la dérivée supérieure dans le cas où cette équation ne possède pas de point de retour. On exhibe aussi les formules asymptotiques des solutions pour les grandes valeurs de la variable indépendante, ainsi que des formules valables pour les grandes valeurs aussi bien du paramètre que de la variable indépendante (représentations asymptotiques doubles).

Au § 5 on trouve des résultats analogues pour les systèmes d'équations d'ordre quelconque, proches de systèmes diagonaux. Le § 8 contient des exemples montrant que l'existence d'une représentation asymptotique formelle n'entraîne pas toujours l'existence de solutions justiciables de cette représentation.

Le chapitre III traite des équations du second ordre contenant un grand paramètre étudiées dans un domaine complexe. Cet aspect de la théorie asymptotique est négligé dans les monographies existantes. Les formules asymptotiques des solutions sont établies dans des domaines ne contenant pas de points de retour et leurs petits voisinages. On indique les plus grands domaines de validité des formules asymptotiques des solutions ainsi que les formules asymptotiques des matrices de passage, qui permettent de construire la représentation asymptotique globale des solutions. On se penche sur de nombreuses applications: représentation asymptotique des valeurs propres des équations à coefficients analytiques, y compris des équations non auto-adjointes ou présentant des points singuliers réguliers; représentation asymptotique de la matrice de diffusion en approximation quasi classique; représentation asymptotique de la largeur d'une lacune dans le spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville à potentiel périodique.

Le chapitre IV contient les formules asymptotiques des solutions d'équations du second ordre dans un voisinage réel ou complexe d'un point de retour. On étudie les cas de confluence des points de retour ou des points de retour et des points singuliers de l'équation.

Dans le chapitre V sont établis des résultats identiques à ceux des chapitres II à IV mais pour des équations et systèmes d'équations d'ordre supérieur. Les résultats formulés au § 6 sont acquis à l'aide de l'opérateur canonique de Maslov. Au § 8 on étudie le problème de diffusion pour un système de Stueckelberg.

Le complément qui a été écrit spécialement pour l'édition française passe en revue les principaux résultats de la théorie des déformations isomonodromes des équations différentielles.

Nous n'avons pas inclus dans cet aide-mémoire les résultats concernant l'équation d'Orr-Sommerfeld et la méthode de moyennisation pour des équations à coefficients oscillant rapidement. Nous espérons que, même incomplet, cet aide-mémoire sera utile aux mathématiciens, physiciens et ingénieurs qui ont recours aux méthodes asymptotiques de la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires.

M. Fédoriouk

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre on étudie des équations et systèmes linéaires à coefficients holomorphes ou méromorphes. On exhibe les principaux résultats de la théorie analytique des équations différentielles relatifs à la structure locale des solutions. Pour de plus amples informations le lecteur pourra s'adresser aux monographies [4, 10, 14, 15, 17, 37].

§ 1. Analyticité des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires

1. Théorème de Cauchy. Formulons quelques notions de théorie des fonctions analytiques. Soit $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, où ζ_j sont des variables complexes. On dit qu'une fonction $\varphi(\zeta)$ est *holomorphe* en un point $\zeta^0 = (\zeta_1^0, \ldots, \zeta_m^0)$ si elle est développable en une série entière

$$\varphi(\zeta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \varphi_\alpha (\zeta - \zeta^0)^\alpha,$$

convergente dans un voisinage du point ζ^0. On adopte les notations suivantes: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ est un multi-indice, $\alpha_j \geqslant 0$ sont des entiers, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $(\zeta - \zeta^0)^\alpha = (\zeta_1 - \zeta_1^0)^{\alpha_1} \ldots (\zeta_m - \zeta_m^0)^{\alpha_m}$, de sorte que la série de la fonction $\varphi(\zeta)$ devient

$$\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m = 0}^{\infty} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} (\zeta_1 - \zeta_1^0)^{\alpha_1} \ldots (\zeta_m - \zeta_m^0)^{\alpha_m}.$$

Une fonction vectorielle (resp. une fonction matricielle) est dite *holomorphe* en un point ζ^0 si toutes ses composantes (resp. tous ses éléments) sont holomorphes en ce point. Une fonction holomorphe en un point ζ^0 le sera dans un voisinage de ce point.

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire

$$\frac{dw_j}{dz} = f_j(z, w_1, \ldots, w_n), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Introduisons les fonctions vectorielles $w(z) = (w_1(z), \ldots$ $\ldots, w_n(z))^T$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ (ces fonctions sont des vecteurs colonnes) ; le système devient alors

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w). \tag{1}$$

Considérons le problème de Cauchy

$$w(z_0) = w^0, \tag{2}$$

où $w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)^T$ est un vecteur donné. On a le théorème classique :

Théorème de Cauchy. *Si la fonction vectorielle* $f(z, w)$ *est holomorphe au point* (z_0, w^0), *le problème de Cauchy* (1), (2) *admet une solution et une seule, holomorphe au point* z_0.

Ce théorème revêt un caractère local : la solution holomorphe n'existe généralement que dans un petit voisinage U du point z_0. En prolongeant si cela est possible cette solution analytiquement le long de tous les chemins issus de z_0, on obtient une fonction vectorielle $\tilde{w}(z)$ analytique complète. Cette fonction est susceptible d'être multivalente et de présenter des points singuliers. Les singularités de $\tilde{w}(z)$ sont discutées dans les §§ 2, 3 pour les systèmes linéaires.

Le théorème de Cauchy s'étend sans changement aux équations d'ordre supérieur

$$w^{(n)} = f(z, w, w', \ldots, w^{(n-1)}). \tag{3}$$

Considérons le problème de Cauchy

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = w_1, \ \ldots, \ w^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(z, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ est holomorphe au point

$$z = z_0, \quad \zeta_0 = w_0, \ \ldots, \ \zeta_{n-1} = w_{n-1}$$

par rapport à l'ensemble des variables $(z, \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1})$, le problème de Cauchy (3), (4) admet une solution et une seule, holomorphe dans un voisinage du point z_0.

2. Equations et systèmes linéaires. Considérons le système de n équations linéaires

$$\frac{d(w)}{dz} = A(z)\, w + f(z), \tag{5}$$

où $w(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions vectorielles, $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ et $A(z)$ est une $(n \times n)$-matrice d'éléments $a_{jk}(z)$. Si l'on passe aux composantes, le système (5) devient

$$\frac{dw_j}{dz} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z)\, w_k + f_j(z), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5'}$$

Supposons que la fonction matricielle $A(z)$ et la fonction vectorielle $f(z)$ sont holomorphes dans un domaine borné simplement connexe D. Le problème de Cauchy (5), (2) admet alors une solution et une seule qui est holomorphe dans le domaine D.

Si le domaine D n'est pas simplement connexe, la solution $w(z)$ du problème de Cauchy (5), (2) est une fonction vectorielle analytique dans le domaine D, qui en principe est à plusieurs déterminations.

Les solutions des équations linéaires d'ordre n

$$w^{(n)} + q_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + q_n(z)\, w = f(z) \tag{6}$$

jouissent exactement des mêmes propriétés.

Si les coefficients $q_1(z), \ldots, q_n(z)$ et le second membre $f(z)$ sont holomorphes dans le domaine simplement connexe D, il en est de même de la solution du problème de Cauchy (6), (4). Si le domaine D n'est pas simplement connexe, toute solution de l'équation (6) sera analytique dans le domaine D.

3. Points singuliers des équations linéaires. Considérons le système linéaire homogène

$$\frac{dw}{dz} = A(z)\, w \tag{7}$$

dont la fonction matricielle $A(z)$ est holomorphe dans un voisinage du point $z = a$ d'où l'on a enlevé a (c'est-à-dire pour $z \in U \setminus a$, où U est un voisinage du point a). Si le point a est singulier pour l'un au moins des éléments de la matrice $A(z)$, on dit qu'il est *singulier* pour la matrice $A(z)$.

On dit qu'un point $z = a$ est un *point singulier du système* (7) s'il est un point singulier de la matrice $A(z)$.

Le *point singulier à l'infini* $z = \infty$ se définit d'une manière différente. Le changement de variable $z = 1/\zeta$ ramène le système (7) à la forme

$$\frac{d\tilde{w}}{d\zeta} = -\zeta^{-2} A(\zeta^{-1})\, \tilde{w}, \tag{8}$$

où $\tilde{w}(\zeta) = w(\zeta^{-1})$. Si le point $\zeta = 0$ est singulier pour le système (8), le point $z = \infty$ le sera pour le système (7).

Les solutions du système (7) présentent au voisinage d'un point singulier la structure suivante.

Si $a \neq \infty$ est un point singulier du système (7), ce dernier admet une matrice fondamentale $W(z)$ de la forme

$$W(z) = \Phi(z)(z-a)^P, \tag{9}$$

où P est une matrice constante, la fonction matricielle $\Phi(z)$ se développe en la série de Laurent

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k (z-a)^k,$$

convergente dans la couronne $0 < |z-a| < \rho$, et Φ_k sont des $(n \times n)$-matrices constantes.

Si $z = \infty$ est un point singulier du système (7), ce dernier admet une matrice fondamentale de la forme

$$W(z) = \Phi(z) z^P, \tag{10}$$

où P est une matrice constante, et la fonction matricielle $\Phi(z)$ se développe en la série de Laurent

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k z^{-k},$$

convergente dans la couronne $|z| > R$.

On obtient des résultats identiques pour une équation linéaire homogène d'ordre n.

Si la matrice P (cf. (9), (10)) n'est pas diagonalisable, la matrice fondamentale $W(z)$ peut contenir des logarithmes. Exemple: le bloc de Jordan J d'ordre k:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & 0 & \\ & \lambda & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad z^J = \begin{bmatrix} z^\lambda & z^\lambda \ln z & & \dfrac{z^\lambda (\ln z)^{k-1}}{(k-1)!} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & z^\lambda & & \cdot \\ & & & z^\lambda \ln z \\ 0 & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & z^\lambda \end{bmatrix}.$$

Les formules (9) et (10) ne donnent qu'une idée générale de la structure d'une matrice fondamentale au voisinage d'un point singulier, car il est en général impossible de déterminer explicitement les matrices P et $\Phi(z)$ à l'aide de la matrice $A(z)$ du système (cf. § 3).

Le problème de la structure d'une matrice fondamentale au voisinage d'un pôle de la fonction matricielle $A(z)$ est étudié en théorie analytique des équations différentielles. La classification des points singuliers est la suivante.

On dit qu'un point a est un point *singulier régulier* du système (7) si la fonction matricielle $\Phi(z)$ (cf. (9), (10)) présente un pôle (ou est holomorphe) en ce point. Ce point est *irrégulier* dans le cas contraire.

Cette classification n'est pas directe; la définition ne permet pas de déterminer la nature du point singulier au vu de la matrice $A(z)$ du système. On classe de façon analogue les points singuliers des équations linéaires homogènes d'ordre n à coefficients méromorphes.

Un problème fondamental de la théorie des équations différentielles linéaires consiste à étudier la structure d'une matrice fondamentale (ou d'un système fondamental de solutions dans le cas d'une équation scalaire) à l'aide de la matrice du système (resp. des coefficients de l'équation). Les principaux résultats acquis dans cette direction sont formulés dans les §§ 2, 3.

§ 2. Points singuliers réguliers

1. Equation scalaire. Considérons une équation linéaire homogène d'ordre n:

$$lw \equiv w^{(n)} + q_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + q_n(z)\, w = 0. \tag{1}$$

Les coefficients de cette équation ou bien présentent un pôle, ou bien sont holomorphes au point a.

1.1. *Critère de régularité d'un point singulier.* Pour qu'un point $a \neq \infty$ soit un point singulier régulier de l'équation (1), il est nécessaire et suffisant que le coefficient $q_k(z)$ possède un pôle d'ordre $\leqslant k$ au point a, $1 \leqslant k \leqslant n$. Ceci exprime que l'une au moins des fonctions $q_k(z)$ doit présenter un pôle au point a, sinon ce point ne sera pas singulier.

Si a est un point singulier régulier, l'équation (1) devient

$$lw \equiv w^{(n)} + (z-a)^{-1} p_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + (z-a)^{-n} p_n(z)\, w = 0, \tag{2}$$

où $p_k(z)$ sont des fonctions holomorphes en a.

Pour que le point $z = \infty$ soit un point singulier régulier de l'équation (1), il est nécessaire et suffisant que le coefficient $q_k(z)$ présente un zéro de multiplicité $\leqslant k$ en $z = \infty$. L'équation (1) s'écrit dans ce cas

$$lw \equiv w^{(n)} + z^{-1} p_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + z^{-n} p_n(z)\, w = 0, \tag{3}$$

où $p_k(z)$ sont des fonctions holomorphes en $z = \infty$.

1.2. *Structure des solutions au voisinage d'un point singulier régulier.* Considérons un exemple. L'équation d'Euler

$$z^n w^{(n)} + a_1 z^{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + a_n w = 0,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes, présente deux points singuliers, les points 0 et ∞, qui sont tous deux réguliers. Cette équation est intégrable. Cherchons une intégrale sous la forme $w = z^\rho$. En portant cette solution dans l'équation et en simplifiant par z^ρ, on obtient l'*équation déterminante*

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+1) + \\ + a_1\rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+2) + \ldots + a_n = 0.$$

Si ρ_0 est une racine de multiplicité k de cette équation, les fonctions z^{ρ_0}, $z^{\rho_0} \ln z, \ldots, z^{\rho_0} (\ln z)^{k-1}$ sont solutions de l'équation d'Euler. L'ensemble de ces solutions constitue un système fondamental de solutions.

Les solutions de l'équation (1) admettent la même structure au voisinage d'un point singulier régulier. A l'équation (2) est associée l'équation déterminante

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+1) + \\ + p_1(a)\rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+2) + \ldots + p_n(a) = 0. \quad (4)$$

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les racines de cette équation. Figeons ρ_k. Si aucune différence $\rho_k - \rho_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, n'est un nombre entier négatif pour $j \neq k$, l'équation (2) admet une solution de la forme

$$w_k(z) = (z-a)^{\rho_k} \varphi_k(z), \quad (5)$$

où $\varphi_k(z)$ est une fonction holomorphe au point $z = a$ et telle que $\varphi_k(a) \neq 0$.

Si aucune différence $\rho_j - \rho_k$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, n'est un entier pour $j \neq k$, l'équation (2) admet un système fondamental de solutions $\{w_1(z), \ldots, w_n(z)\}$ composé de solutions de la forme (5).

Les solutions de l'équation (3) ont la même structure au voisinage du point singulier régulier $z = \infty$. L'équation déterminante est de la forme

$$f(\rho) \equiv \rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+1) + \\ + p_1(\infty)\rho(\rho-1) \ldots (\rho-n+2) + \ldots + p_n(\infty) = 0. \quad (6)$$

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les racines de cette équation. Figeons ρ_k. Si aucune différence $\rho_j - \rho_k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, n'est un nombre entier pour $j \neq k$, l'équation (3) admet une solution de la forme

$$w_k(z) = z^{\rho_k} \varphi_k(z), \quad (7)$$

où $\varphi_k(z)$ est une fonction holomorphe en $z = \infty$, $\varphi_k(\infty) \neq 0$.

Si certaines différences $\rho_j - \rho_k$, $j \neq k$, sont des entiers, les solutions de l'équation (2) peuvent contenir $\ln^m(z-a)$, $m > 0$ est un entier. Il est possible d'exhiber les formules d'un système fondamental de solutions pour ce cas [4, 17], mais elles sont volumineuses. Il est plus commode d'indiquer l'algorithme de leur détermination.

1.3. *Méthode de Frobenius.* Soit $z = 0$ un point singulier régulier de l'équation (2) ($a = 0$). Cherchons une série formelle

$$w(z) = z^{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad a_0 = 1, \tag{8}$$

telle que

$$lw = f(\rho)\, z^{\rho}. \tag{9}$$

On a

$$lw = f(\rho)\, z^{\rho} + [a_1 f(\rho+1) - g_1]\, z^{\rho+1} + \dots$$
$$\dots + [a_j f(\rho+j) - g_j]\, z^{\rho+j} + \dots,$$

où $g_j = \sum_{k=1}^{j-1} g_{jk}(\rho)\, a_k$ et $g_{jk}(\rho)$ sont des polynômes. Le système récurrent

$$a_j f(\rho+j) = g_j \tag{10}$$

nous donne successivement les coefficients $a_1, a_2, \dots$ en fonction de ρ. Ces coefficients seront tous des fonctions rationnelles de ρ. Figeons $\rho = \rho_1$. Trois cas sont possibles:

1) ρ_1 est racine de l'équation déterminante et aucune différence $\rho_1 - \rho_2, \dots, \rho_1 - \rho_n$ n'est un entier strictement positif. Alors la série (8) est solution de l'équation (2) pour $\rho = \rho_1$, car à partir du système (10) on peut trouver successivement $a_1, a_2, \dots$

2) Supposons que les conditions 1) sont réalisées et soit ρ_1 une racine de multiplicité $m > 1$. Les fonctions

$$w(z, \rho), \ \frac{\partial w(z, \rho)}{\partial \rho}, \ \dots, \frac{\partial^{m-1} w(z, \rho)}{\partial \rho^{m-1}}, \quad \rho = \rho_1,$$

sont alors des solutions linéairement indépendantes de l'équation (2). Ces solutions sont des polynômes de $\ln z$ de degrés $0, 1, \dots$ $\dots, m-1$.

3) Supposons que l'équation (4) admet une racine ρ_2 telle que $\rho_1 - \rho_2 = k > 0$ entier et que $f(\rho_1 + j) \neq 0$ pour $1 \leqslant j < k$ et pour $j > k$. Soit m la multiplicité de la racine ρ_1. Cherchons la solution de l'équation (2) sous la forme (8), où $a_0 = (\rho - \rho_2)^m$. On a

$$lw = f(\rho)\,(\rho - \rho_2)^m z^{\rho}.$$

Du système (10) on trouve que les coefficients $a_1, \ldots, a_{k-1}$ contiennent le facteur multiplicatif $(\rho - \rho_2)^m$, d'autre part de l'équation

$$f(\rho + k)\, a_k = g_k$$

il s'ensuit que a_k ne présente pas de pôle au point $\rho = \rho_2$ puisque $f(\rho + k)$ et g_k se divisent par $(\rho - \rho_2)^m$. Donc, le point $\rho = \rho_2$ n'est un pôle pour aucun coefficient a_k.

Pour $\rho = \rho_2$ la série (8) est une solution de l'équation (2), proportionnelle à celle trouvée dans 1). La solution associée à la racine ρ_2 est de la forme $\partial^m w/\partial\rho^m \,|_{\rho=\rho_2}$. Si ρ_2 est une racine multiple, les autres solutions peuvent être trouvées par une dérivation comme dans 2).

On traite de façon analogue le cas où quelques différences $\rho_j - \rho_k$ sont des entiers. Un système fondamental de solutions de l'équation (2) est composé de solutions de la forme

$$w = z^\rho \sum_{k=0}^{m} \varphi_k(z)\,(\ln z)^k,$$

où ρ est une racine de l'équation déterminante, $\varphi_k(z)$ des fonctions holomorphes en $z = 0$.

1.4. *Equation du second ordre.* Considérons l'équation

$$z^2 w'' + zp(z)\, w' + q(z)\, w = 0, \qquad (11)$$

où $p(z)$ et $q(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le disque $|z| < R$. Le point $z = 0$ est un point singulier régulier de l'équation (11). Construisons un système fondamental de solutions de l'équation (11) dans le disque $|z| < R$. On a

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k.$$

Cherchons une solution sous la forme

$$w = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k, \quad w_0 = 1. \qquad (12)$$

En portant dans (11), on obtient le système récurrent

$$\begin{aligned} w_0 f(\rho) &= 0, \\ w_1 f(\rho+1) + w_0 f_1(\rho) &= 0, \qquad (13) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_k f(\rho+k) + w_{k-1} f_1(\rho+k-1) + \ldots + w_0 f_k(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

où

$$f(\rho) = \rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0, \quad f_k(\rho) = \rho p_k + q_k.$$

L'équation déterminante est de la forme $f(\rho) = 0$. Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation.

1) Supposons que $\rho_1 - \rho_2$ n'est pas entier. Alors $f(\rho_1 + k) \neq 0$, $f(\rho_2 + k) \neq 0$ pour aucun $k > 0$ entier, et des équations (13) pour $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ on peut tirer successivement $w_1, w_2, \ldots$ Dans ce cas, l'équation (11) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$w_1 = z^{\rho_1}\varphi_1(z), \quad w_2 = z^{\rho_2}\varphi_2(z),$$

où $\varphi_j(z)$ sont holomorphes dans le disque $|z| < R$, $\varphi_j(0) \neq 0$, $j = 1, 2$.

2) Supposons que $\rho_1 - \rho_2 = n$, où $n \geqslant 0$ est un entier. L'équation (11) admet alors un système fondamental de la forme

$$w_1 = z^{\rho_1}\varphi_1(z), \quad w_2 = aw_1 \ln z + z^{\rho_2}\varphi_2(z),$$

où a est une constante, et les fonctions $\varphi_j(z)$ sont holomorphes dans le disque $|z| < R$.

Remarque. Le hasard peut faire qu'aucune des solutions de l'équation (11) ne présente de singularité au point $z = 0$. Par exemple, si $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_2 \geqslant 0$ sont des entiers et $a = 0$.

1.5. *Equations de la classe de Fuchs.* L'équation (1) est dite *équation de la classe de Fuchs* si elle n'admet que des points singuliers réguliers sur la sphère de Riemann.

L'équation (1) est une équation de la classe de Fuchs si et seulement si ses coefficients sont de la forme

$$q_k(z) = b_k(z) \prod_{m=1}^{l} (z - a_m)^{-k},$$

où $b_k(z)$ est un polynôme de degré $\leqslant l(k-1)$. Les points $a_1, \ldots, a_l$, ∞ sont singuliers pour l'équation (1).

L'équation du second ordre de la classe de Fuchs à points singuliers $a_1, \ldots, a_l, \infty$ est de la forme

$$w'' + \sum_{m=1}^{l} \frac{1 - \rho_1^{(m)} - \rho_2^{(m)}}{z - a_m} w' + \left[\sum_{m=1}^{l} \frac{\rho_1^{(m)}\rho_2^{(m)} \prod_{j=1}^{l}{}' (a_m - a_j)}{z - a_j} + Q_{l-2}(z) \right] \frac{w}{\prod_{j=1}^{l} (z - a_j)} = 0,$$

où $\rho_1^{(m)}$ et $\rho_2^{(m)}$ sont des exposants caractéristiques associés au point singulier $z = a_m$, l'accent prime indique que $j \neq m$, $Q_{l-2}(z)$ est

un polynôme de degré $l - 2$ si $z = \infty$ est un point singulier et de degré $l - 4$, sinon.

Pour $l = 1, 2, 3$ (et pour ces valeurs-là seulement) les coefficients de l'équation du second ordre de la classe de Fuchs s'expriment en fonction des points singuliers et de leurs exposants caractéristiques. Pour $l = 1$, cette équation se ramène à la forme $w'' = 0$, pour $l = 2$, à l'équation d'Euler et pour $l = 3$, à l'équation de Papperitz (ou de Riemann).

Les principales équations différentielles ordinaires linéaires qui se présentent dans les problèmes de physique mathématique peuvent être déduites d'équations du second ordre à cinq points singuliers réguliers [15]. Dans cette équation, la différence des exposants caractéristiques est égale à 1/2 pour tout point singulier. La confluence de deux tels points singuliers engendre une singularité régulière à différence arbitraire des exposants caractéristiques. La confluence de trois points singuliers et plus conduit à une singularité irrégulière.

2. Système d'équations. Considérons le système

$$w' = (z-a)^{-m-1} A(z)\, w, \tag{14}$$

où $w = (w_1(z), \ldots, w_n(z))^T$, $A(z)$ est une fonction matricielle d'ordre n, holomorphe en a, $A(a) \neq 0$, $m \geqslant 0$ est un entier.

2.1. *Point singulier de première espèce.* Le nombre m s'appelle *rang* de la singularité $z = a$. Si $m = 0$ (resp. $m \geqslant 1$), le point a est dit *singulier de première* (resp. *de seconde*) *espèce.*

Un point singulier de première espèce est régulier (§ 1), c'est-à-dire que le système (14) admet une matrice fondamentale de la forme

$$W(z) = \Phi(z)(z-a)^P, \tag{15}$$

où P est une matrice constante et la fonction matricielle $\Phi(z)$ est holomorphe ou présente un pôle en $z = a$.

Contrairement aux équations scalaires, il n'existe pas de critère de régularité d'un point singulier pour les systèmes. Un point singulier de seconde espèce peut être aussi bien irrégulier que régulier. Par exemple, le rang du point singulier $z = 0$ du système

$$w_1' = w_2, \quad w_2' = z^{-2} w_1$$

est égal à 1, de sorte que $z = 0$ est un point singulier de seconde espèce. Ce système est équivalent à l'équation d'Euler $z^2 w'' - w = 0$ pour laquelle (donc pour le système) le point $z = 0$ est un point singulier régulier. Il existe de nombreux travaux établissant des conditions suffisantes pour que le point $z = a$ soit singulier régulier pour le système (14).

Supposons que $m = 0$ et qu'aucune différence des valeurs propres de la matrice $A(a)$ n'est un entier positif. Le système (14) admet alors une matrice fondamentale de la forme

$$W(z) = \Phi(z)(z-a)^{A(a)}, \tag{16}$$

où $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k (z-a)^k$, $\Phi_0 = I$ est une fonction matricielle holomorphe au point $z = a$.

Voici l'algorithme de construction d'une solution. Soit $a = 0$; alors $A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j z^j$. En portant (16) dans (14) et en multipliant ensuite à droite par z^{-A_0}, on obtient le système

$$z\Phi'(z) + \Phi(z) A_0 = A(z)\Phi(z).$$

Une identification des coefficients des puissances de z nous conduit au système récurrent

$$k\Phi_k + [\Phi_k, A_0] = \sum_{j=0}^{k-1} A_j \Phi_{k-j}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où $[\Phi_k, A_0] = \Phi_k A_0 - A_0 \Phi_k$ est le commutateur des matrices Φ_k et A_0. Considérons l'équation matricielle

$$\mu X + [X, A] = B,$$

où μ est un nombre, X, A et B des matrices carrées de même ordre. Du cours d'algèbre linéaire on sait que si $\mu \neq \lambda_j - \lambda_k$ pour aucun j et k, où λ_j sont les valeurs propres de la matrice A, cette équation admet une solution quelle que soit B. Donc le système récurrent nous donne de proche en proche les matrices Φ_1, Φ_2, ... Si parmi les différences des valeurs propres de la matrice A_0 il existe des entiers positifs, le système (14) admet une matrice fondamentale de la forme (15), où $\Phi(z)$ est une fonction matricielle holomorphe en $z = a$, et P, une matrice constante telle qu'aucune différence de ses valeurs propres n'est un entier positif.

On traite de façon analogue le point singulier $z = \infty$. Considérons le système de n équations

$$w' = z^{m-1} A(z) w,$$

où $A(z)$ est une fonction matricielle holomorphe au point $z = \infty$, $A(\infty) \neq 0$, et $m \geqslant 0$ un entier. On appelle *rang* de ce système, le nombre $m + 1$; pour $m = 0$ (resp. $m \geqslant 1$) le point z s'appelle *point singulier de première* (resp. *de seconde*) *espèce*. Les résultats établis ci-dessus pour un point singulier fini sont valables pour le point $z = \infty$; dans ce cas il faut remplacer $z - a$ par z dans les formules (15) et (16).

2.2. *Systèmes de la classe de Fuchs.* On dit qu'un système de n équations

$$w' = A(z)\,w \tag{17}$$

est un *système de la classe de Fuchs* s'il ne présente que des points singuliers réguliers sur la sphère de Riemann. Si en outre ces singularités sont toutes de première espèce, alors le système devient

$$w' = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z-a_k}\,w,$$

où $A_k \neq 0$ sont des matrices constantes d'ordre n et les points $a_1, \ldots, a_m, \infty$, des points singuliers réguliers.

3. Groupe de monodromie. Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont holomorphes dans un domaine simplement connexe D de la sphère de Riemann sauf en des points $a_1, \ldots, a_m$ susceptibles d'être des pôles pour les coefficients. Ces points singuliers peuvent être réguliers ou irréguliers. Fixons un point a_0 distinct des points indiqués ci-dessus, et un petit voisinage simplement connexe U de a_0. L'équation (1) admet un système fondamental de solutions $w(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$ dans le domaine U. Soit γ_j une courbe fermée simple d'origine et d'extrémité en a_0 qui contourne le point a_j dans le sens positif (c'est-à-dire que γ_j est orientée dans le sens antihoraire, a_j est situé à l'intérieur de γ_j et les autres points singuliers, à l'extérieur). En prolongeant analytiquement le système fondamental $w(z)$ le long de γ_j, on obtient le système fondamental

$$\gamma_j w(z) \equiv w^j(z) = w(z)\,T_j,$$

où T_j est une matrice non dégénérée constante d'ordre n. Si l'on prolonge analytiquement le système fondamental $w(z)$ le long de γ_j^{-1} (c'est-à-dire le long de γ_j mais dans le sens inverse), on obtient le système fondamental

$$\gamma_j^{-1} w(z) = w(z)\,T_j^{-1}.$$

Si l'on prolonge analytiquement le système fondamental $w(z)$ le long de γ_j et ensuite le long de γ_k, on obtient le système fondamental

$$\gamma_k \gamma_j w(z) = w(z)\,T_j T_k.$$

On appelle *groupe de monodromie* de l'équation (1) (ou simplement *groupe* de l'équation (1)) dans le domaine D un groupe G de matrices de génératrices $T_1, \ldots, T_m$. Tout élément du groupe G est de la forme $T_{i_1}^{k_1} \ldots T_{i_s}^{k_s}$, où $i_\alpha \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $k_1, \ldots, k_s$ sont des entiers.

Le groupe de monodromie dépend du choix du point a_0: $G = G(a_0)$. Si $b_0 \in D$ est un point non singulier, $b_0 \neq a_0$, les groupes $G(a_0)$ et $G(b_0)$ sont semblables : il existe une matrice non dégénérée constante $T = T(a_0, b_0)$ d'ordre n telle que

$$G(b_0) = T^{-1} G(a_0)\, T.$$

On définit de façon exactement analogue le groupe de monodromie d'un système de la forme (17). On n'arrive à construire le groupe de monodromie sous la forme explicite que pour un nombre peu élevé de classes d'équations différentielles : pour l'équation hypergéométrique, les équations de Pochhammer, de Bessel, etc. Au chap. III, § 4, on exhibe des exemples dans lesquels l'équation contient un grand paramètre et où l'on réussit à trouver la représentation asymptotique des génératrices du groupe G par rapport au paramètre.

4. Variétés de solutions. Considérons le système de n équations

$$tw' = A(t)\, w. \tag{18}$$

Posons la condition

$$A(t) \in C^{\infty}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad A(0) \neq 0. \tag{18'}$$

Par analogie avec le cas analytique, on appellera $t = 0$ *point singulier régulier*. Tous les résultats du n° 2.1 sont valables pour ce cas, sauf que les séries (par exemple la série de $\Phi(t)$ dans (16)) ne seront plus convergentes, mais asymptotiques pour $t \to +0$.

4.1. *Variété de solutions bornées.* Supposons que la matrice $A(0)$ ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures. Par un changement linéaire de la forme $w = T\tilde{w}$, où T est une matrice non dégénérée constante, on peut ramener le système (18) à une forme telle que la matrice $A(0)$ soit diagonale par blocs :

$$A(0) = \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix}, \tag{19}$$

où A_- et A_+ sont des matrices carrées d'ordre k et $n-k$ et les valeurs propres de la matrice A_- (resp. A_+) sont situées dans le demi-plan de gauche (resp. de droite) :

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0, \ \ldots, \ \operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \ (\text{resp. } \operatorname{Re}\lambda_{k+1} > 0, \ \ldots, \ \operatorname{Re}\lambda_n > 0). \tag{20}$$

Un système fondamental de solutions du système (18) est composé de k solutions $w_1, \ldots, w_k$ non bornées pour $t \in]0, a] = I$, et de $n-k$ solutions $w_{k+1}, \ldots, w_n$ bornées pour $t \in I$. Désignons par M^{n-k} l'ensemble de toutes les solutions bornées pour $t \in I$;

M^{n-k} est un espace vectoriel de dimension $n-k$ sur le corps des complexes. Ses éléments sont de la forme $w = \sum_{j=1}^{n-k} c_j w_{j+k}$, où c_j sont des constantes arbitraires.

La représentation asymptotique des solutions bornées pour $t \to 0$ est la même que dans le cas analytique. On voit qu'elle est assez compliquée et de plus dépend essentiellement aussi bien de la forme normale de Jordan de la matrice $A\ (0)$ que de la présence ou de l'absence de nombres entiers parmi les différences $\lambda_j - \lambda_k$. C'est pourquoi ces formules se prêtent très mal au calcul numérique de problèmes liés au système (18) ou au système non homogène

$$tw' = A\ (t)\ w + f\ (t) \tag{21}$$

si la condition à la limite est posée au point singulier $t = 0$.

Au contraire des solutions bornées individuelles, la variété M^{n-k} de toutes les solutions bornées présente une structure simple [38, 39]. Posons

$$w = \begin{bmatrix} w_- \\ w_+ \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix}, \quad V(t) = A(t) - A(0) = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

Le vecteur w_- (resp. w_+) admet k (resp. $n - k$) composantes, les ordres des matrices V_{jk} sont évidents. On cherchera l'équation de M^{n-k} sous la forme

$$w_-(t) = \alpha(t)\, w_+(t), \tag{22}$$

où $\alpha\ (t)$ est une matrice inconnue de dimension $k \times (n - k)$. En portant (22) dans (18), on obtient le système

$$tw'_+ = (A_+\alpha + V_{11}\alpha + V_{12})\, w_+,$$
$$t\alpha w'_+ = (A_-\alpha + V_{21}\alpha + V_{22} - t\alpha')\, w_+.$$

On en déduit l'équation pour α:

$$t\alpha' = A_-\alpha - \alpha A_+ + V_{11}\alpha - \alpha V_{22} - \alpha V_{21}\alpha + V_{12}, \tag{23}$$

qui est une équation matricielle de Ricatti. La condition à la limite pour $\alpha\ (t)$ est:

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{24}$$

Pour $t > 0$ petit, le problème de Cauchy (23), (24) admet une solution $\alpha\ (t)$ et une seule qui se développe en la série

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j t^j. \tag{25}$$

Cette série est convergente si la fonction matricielle $A(t)$ est holomorphe au point $t = 0$, et asymptotique sous la condition (18'). On détermine les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en portant (25) dans (23) et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de t. On obtient ainsi un système récurrent d'équations algébriques linéaires.

Ainsi, pour $t > 0$ petit, toute solution bornée du système (18) est solution du système (22) et toute solution du système (22) est une solution du système (18) bornée lorsque $t \to 0$.

Cette méthode est valable aussi pour le système non homogène (21). Supposons que $f(t) \in C^\infty$ pour $0 \leqslant t \leqslant a$, que les conditions imposées à la matrice $A(0)$ sont toujours les mêmes et que l'on cherche les solutions bornées lorsque $t \to 0$. Cherchons ces solutions sous la forme

$$w_- = \alpha(t)\, w_+ + \beta(t),$$

où $\alpha(t)$ est la matrice construite ci-dessus et la fonction vectorielle $\beta(t)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$t\beta' = A_-\beta + (V_{11} - \alpha V_{21})\beta + f_- - \alpha f_+, \quad \lim_{t \to 0} \beta(t) = -A_-^{-1} f_-(0).$$

Pour $t > 0$ petit, on a le développement

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j t^j, \tag{26}$$

qui possède les mêmes propriétés que (25). Les vecteurs $\beta_0, \beta_1, \ldots$ se déterminent à partir d'un système récurrent d'équations algébriques linéaires.

4.2. *Système du second ordre.* Considérons le système homogène

$$t^2 w'' = A(t)\, w. \tag{27}$$

Ce système peut être ramené à un système du premier ordre de la forme (18), mais il est plus commode de l'étudier directement.

Cherchons une solution sous la forme

$$w(t) = t^\rho \varphi(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k,$$

où la série $\varphi(t)$ possède les mêmes propriétés que dans le n° 4.1. En portant cette solution dans (27) et en égalant à zéro les coefficients des puissances de t, on obtient un système récurrent dont la première équation est de la forme

$$[(\rho^2 - \rho) I - A_0]\, \varphi_0 = 0.$$

Le nombre ρ doit donc être racine de l'équation déterminante

$$\det [(\rho^2 - \rho) I - A_0] = 0,$$

et le vecteur φ_0, le vecteur propre de la matrice A_0 associé à la valeur propre $\lambda = \rho^2 - \rho$. Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ de la matrice A_0 sont situées à l'extérieur de la parabole Π: $\operatorname{Re} \lambda + (\operatorname{Im} \lambda)^2 = 0$ dans le plan de λ complexe. Il existe alors n racines ρ_j telles que $\operatorname{Re} \rho_j > 0$ et n racines telles que $\operatorname{Re} \rho_j < 0$. Le système (27) admet un système fondamental composé de n solutions linéairement indépendantes bornées pour $t \to 0$ et de n solutions non bornées. L'équation de la variété M^n des solutions bornées peut être obtenue par une factorisation de l'opérateur différentiel associé à (27). On cherchera des matrices $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ d'ordre n telles que soit réalisée l'identité

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} - A(t) = \left(t \frac{d}{dt} - \beta(t)\right)\left(t \frac{d}{dt} - \alpha(t)\right).$$

On en déduit $\beta(t) = I - \alpha(t)$ et pour $\alpha(t)$ on obtient l'équation matricielle de Ricatti

$$t\alpha' + \alpha^2 - \alpha = A(t).$$

Il est évident que si w est solution du système

$$tw'(t) = \alpha(t) w(t), \tag{28}$$

w sera solution du système (27). Choisissons la matrice $\alpha(t)$ de telle sorte que la relation (28) décrive la variété M^n dans le problème de Cauchy:

$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = \frac{1}{2}(I + \sqrt{I + 4A_0}),$$

où $\sqrt{I + 4A_0}$ est choisie de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice soient contenues dans le demi-plan $\operatorname{Re} \rho > 0$, ce qui est possible en vertu des conditions imposées à la matrice A_0. Le problème de Cauchy pour $\alpha(t)$ admet une solution et une seule pour $t > 0$ petit. La matrice $\alpha(t)$ est justiciable du développement (25) et de plus α_j sont déterminés à partir de relations récurrentielles.

Considérons le système non homogène

$$t^2 w'' = A(t) w + f(t), \tag{29}$$

où $A(t)$ vérifie les conditions formulées ci-dessus, $f(t) \in C^\infty$ pour $0 \leqslant t \leqslant a$. Il existe alors une variété M^n de solutions bornées lorsque $t \to 0$, d'équation

$$tw' = \alpha(t) w + \beta(t), \tag{30}$$

où $\alpha(t)$ est la matrice décrite ci-dessus et la fonction vectorielle $\beta(t)$ est solution du problème de Cauchy

$$t\beta' + \alpha\beta - \beta = f(t), \quad \lim_{t\to 0} \beta(t) = [\alpha(0) - I]^{-1} f(0). \tag{31}$$

Pour $t \geqslant 0$ petit, la fonction vectorielle $\beta(t)$ se développe en une série (26) dont les β_j sont données par des relations récurrentielles.

Cette méthode est largement appliquée dans le calcul numérique [39]. Considérons le problème aux limites sur l'intervalle $[0, a]$ pour le système (29):

$$w(t) \text{ est bornée pour } t \to 0,$$
$$w(a) = w_0.$$

La condition à la limite pour $t = 0$ est équivalente à la condition à la limite

$$t_0 w'(t_0) = \alpha(t_0)\, w(t_0) + \beta(t_0)$$

pour t_0 petit. On peut déterminer les valeurs approchées de $\alpha(t_0)$ et $\beta(t_0)$ en prenant quelques premiers termes des développements (25) et (26) de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, déduits par la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires. On obtient ensuite un problème aux limites pour le système (2) sur l'intervalle $[t_0, a]$ ne contenant pas de points singuliers.

Cette méthode est développée aussi pour des points singuliers irréguliers (§ 3).

§ 3. Points singuliers irréguliers

1. Equation scalaire. Considérons l'équation

$$w^{(n)} + q_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + q_n(z)\, w = 0, \tag{1}$$

dont les coefficients sont holomorphes et présentent un pôle au point $z = \infty$. On a

$$q_j(z) = \sum_{-\infty}^{n_j} q_{jm} z^{-m}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2}$$

Ces séries convergent pour $|z| > R$. Ici q_{j,n_j} est le premier coefficient non nul de la série; si $q_j(z) \equiv 0$, on pose $n_j = -\infty$.

1.1. *Critère d'irrégularité d'un point singulier.* Soit

$$k = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} n_j / j, \quad r = k + 1. \tag{3}$$

Le nombre r s'appelle *rang*, le nombre k, *sous-rang* du point singulier $z = \infty$. Si $r = 0$ (resp. $r \geqslant 1$), le point $z = \infty$ est un point singulier régulier (resp. irrégulier).

Supposons que $s \geqslant 1$ est un entier et que

$$Q(\zeta) = q_0\zeta^p + \ldots + q_{p-1}\zeta, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \zeta^{-m}, \tag{4}$$

où $\Psi(\zeta)$ est une série formelle. La série

$$w(z) = z^\rho e^{Q(z^{1/s})} \Psi(z^{1/q}) \tag{5}$$

s'appelle *série normale* (resp. *sous-normale*) d'ordre p/s si $s = 1$ (resp. $s \geqslant 2$).

Le sous-rang k est un nombre entier ou fractionnaire, de sorte que $k = p/q$, où $k \geqslant 0$ est un entier et p et q, des entiers premiers entre eux. Si r est un entier, l'équation (1) admet au moins une solution formelle de la forme (5) d'ordre r et $s = 1$. Si $q \geqslant 2$, l'équation (1) possède au moins q solutions formelles de la forme (5) d'ordre r, où $s = q$. Les séries de la forme (5) ne s'interrompent que dans des cas exceptionnels et en principe sont divergentes. On évoquera plus bas leur comportement asymptotique. Par ailleurs, les solutions de l'équation (1) ne sont pas épuisées par les seules séries de la forme (5).

Les notions de rang et de sous-rang s'étendent de façon évidente au cas d'un point singulier fini.

1.2. *Structure locale des solutions*; *cas fondamental.* Si $z = \infty$ est un point singulier régulier de l'équation (1), toutes les solutions présentent en gros la même structure au voisinage de ce point. Plus exactement, il existe un système fondamental de solutions $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tel que

$$w_j(z) \sim z^{\rho_j} (\ln z)^{m_j}, \quad z \to \infty.$$

Un point singulier irrégulier est un conglomérat assez complexe de singularités. Par exemple, l'équation

$$w'' - (q(z) + 1)\, w' + q(z)\, w = 0, \quad q(z) = \frac{\rho(\rho - z - 1)}{z(\rho - z)},$$

admet les solutions $w_1 = z^\rho$, $w_2 = e^z$. La première présente une singularité du même type que dans le cas d'un point singulier régulier, pour la seconde, $z = \infty$ est un point singulier essentiel.

Etudions le cas où il est possible de décrire complètement la structure d'un système fondamental de solutions. Supposons que dans l'équation (1)

$$q_j(z) = z^{jk} p_j(z), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

les fonctions $p_j(z)$ sont holomorphes au point $z = \infty$. Supposons que les racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de l'équation

$$\rho^n + p_1(\infty)\, \rho^{n-1} + \ldots + p_n(\infty) = 0 \tag{6}$$

sont différentes et non nulles. Le rang de l'équation (1) est alors égal à $r = k + 1$. L'équation (1) possède alors n solutions formelles de la forme (5):

$$w_j(z) = z^{\rho_j} \exp\left\{\sum_{m=1}^{k+1} a_{jm} z^m\right\} \sum_{m=0}^{\infty} w_{jm} z^{-m}, \tag{7}$$

$$a_{j0} = \rho_j/(k+1), \quad w_{j0} = 1.$$

Ces séries formelles sont asymptotiques dans certains secteurs du plan de la variable complexe z. Fixons j et l et considérons l'équation

$$\operatorname{Re}\left[(\lambda_j - \lambda_l) z^{k+1}\right] = 0. \tag{8}$$

Cette équation définit un nombre fini de rayons appelés *lignes de Stokes*.

Si $S: \alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta, |z| > 0$, est un secteur qui pour j donné ne contient aucune des directions (8), l'équation (1) admet une solution $w_j(z)$ qui est justiciable du développement asymptotique (7) lorsque $z \to \infty$, $z \in S$. Bien plus, l'un des rayons frontières du secteur S peut être confondu avec l'un des rayons (8).

Si ces conditions sont remplies pour tous les j, l'équation (1) admet dans le secteur S un système fondamental de solutions pour lequel est valable le développement asymptotique (5) lorsque $z \to \infty$, $z \in S$. Le plan de z complexe est entièrement recouvert par un nombre fini de tels secteurs $S_1, \ldots, S_N$; ces secteurs peuvent être choisis de telle sorte que l'intersection de deux voisins soit non vide. Dans chacun de ces secteurs, il existe un système fondamental de solutions admettant le développement asymptotique (7); désignons-les par $w_1(z), \ldots, w_N(z)$. On a

$$w_j(z) \equiv C_{jk} w_k(z),$$

où C_{jk} est une matrice constante d'ordre n.

Les matrices C_{jk} s'appellent *matrices* (ou *multiplicateurs*) *de Stokes*. Si l'on connaît tous les multiplicateurs de Stokes $C_{j,j+1}$ (pour $j = N$ on prend la matrice $C_{N,1}$), on peut trouver la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions de l'équation (1) lorsque $z \to \infty$ suivant une direction quelconque. Mais on ne peut trouver tous les multiplicateurs que dans un nombre fini de cas. Leur recherche équivaut en fait à l'intégration de l'équation.

1.3. *Structure locale des solutions*; *cas général*. Considérons l'équation (1) avec le point singulier irrégulier $z = \infty$. Supposons que

$h \geqslant 1$, $l_j \geqslant 1$ et $m_j \geqslant 0$ sont des nombres entiers,

$$\begin{aligned} Q_j(z) &= \sum_{k=0}^{l_j} a_{jk} z^{k/h}, \quad \Phi_j(z) = \sum_{k=0}^{m_j} \Psi_{jk}(z)(\ln z)^k, \\ \Psi_{jk}(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{jkl} z^{-l}, \quad \psi_{jk0} = 1, \end{aligned} \tag{9}$$

et posons

$$w_j(z) = z^{\rho_j} e^{Q_j(z)} \Phi_j(z). \tag{10}$$

L'équation (1) admet un système fondamental $\{w_1(z), \ldots, w_n(z)\}$ composé de solutions de la forme (10). Dans certains secteurs S de la forme $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$ l'équation (1) admet un système fondamental pour lequel les séries (10) sont asymptotiques lorsque $z \to \infty$, $z \in S$ [4]. L'algorithme de construction des solutions formelles et des secteurs S est très compliqué dans le cas général.

Remarquons que si $Q_j(z) \equiv 0$, la solution correspondante $w_j(z)$ admet la même structure que la solution au voisinage du point singulier régulier $z = \infty$.

2. Système d'équations. Considérons le système de n équations

$$w' = z^r A(z) w, \tag{11}$$

où $r \geqslant 0$ est un entier, $A(z)$ une fonction matricielle holomorphe au point $z = \infty$, $A(\infty) \neq 0$. Dans ce cas le point singulier $z = \infty$ peut être aussi bien irrégulier que régulier (§ 2).

On a

$$A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{-m}.$$

Cette série converge pour $|z| > R$. Supposons que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $A_0 = A(\infty)$ sont distinctes et non nulles et soit S un secteur du plan de z complexe ne contenant pas de lignes de Stokes (8), où j est fixe. Le système (11) admet alors une solution de la forme (7) ; dans cette formule w_{jm} sont des vecteurs constants et de plus w_{j0} est un vecteur propre de la matrice A_0, c'est-à-dire que $A_0 w_{j0} = \lambda_j w_{j0}$. La série (7) est une série asymptotique pour la solution $w_j(z)$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S$. Il existe un système fondamental de telles solutions dans le secteur S sous les mêmes conditions qu'au n° 2.3. Une matrice fondamentale du système (11) est de la forme

$$W(z) = \Phi(z)\, z^R e^{Q(z)},$$

où R est une matrice constante d'ordre n, $Q(z)$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des polynômes de degré $r+1$, et $\Phi(z)$, une série asymptotique:

$$\Phi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m z^{-m}.$$

Dans le cas général, le système (11) admet un système fondamental formel composé de solutions de la forme (9) et (10), où ψ_{jkl} sont des vecteurs ; ces séries sont asymptotiques dans certains secteurs du plan de z complexe.

Signalons que même pour l'équation scalaire (1) et même dans le cas fondamental, la construction de la série asymptotique d'une solution de la forme (7) est compliquée déjà pour $n=2$. Les méthodes asymptotiques sont plus efficaces (chap. V).

3. Variétés de solutions.

3.1. *Système du premier ordre.* Considérons un système de n équations

$$t^{-r}w'=A(t)\,w+f(t) \tag{12}$$

sur la demi-droite $I=[a,\infty[$, $a>0$, où $r\geqslant 0$ est un entier, $A(t)$, $f(t)\in C^{\infty}(I)$ et pour $t\to\infty$ on a les développements asymptotiques

$$A(t)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m t^{-m},\qquad f(t)=\sum_{m=0}^{\infty}f_m t^{-m},$$

de plus $A_0\neq 0$. Supposons que la matrice A_0 ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures. On peut admettre que A_0 est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des matrices carrées A_- et A_+ d'ordre m et $n-m$ respectivement, et de plus $\operatorname{Re}\lambda_j<0$ (resp. $\operatorname{Re}\lambda_j>0$) pour toutes les valeurs propres de la matrice A_- (resp. A_+). On peut se ramener à ce cas par la transformation $w=T\tilde{w}$, où T est une matrice constante non dégénérée. Considérons les partitions compatibles en blocs

$$A_0=\begin{bmatrix}A_- & 0\\ 0 & A_+\end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix}w_-\\ w_+\end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix}f_-\\ f_+\end{bmatrix},\quad A(t)-A_0=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}.$$

L'ensemble M^m des solutions du système (11) bornées pour $t\in I$ est une variété linéaire de dimension m. Le système homogène (12) pour $f(t)\equiv 0$ admet m solutions linéairement indépendantes décroissant exponentiellement lorsque $t\to\infty$ et $n-m$ solutions linéairement indépendantes croissant exponentiellement lorsque $t\to\infty$. La variété M^m peut être décrite par l'équation [39]

$$w_+=\alpha(t)\,w_-+\beta(t) \tag{13}$$

pour $t \geqslant T \gg 1$. Ici $\alpha(t)$ est la solution de l'équation matricielle de Ricatti

$$t^{-r}\alpha' = A_+\alpha - \alpha A_- + V_{22}\alpha - \alpha V_{11} - \alpha V_{12}\alpha + V_{21}, \quad t \geqslant T, \tag{14}$$

satisfaisant les conditions de Cauchy à l'infini:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0. \tag{15}$$

Pour $T \gg 1$ cette solution existe et est unique. La matrice $\alpha(t)$ se développe pour $t \to \infty$ en la série asymptotique

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{t^k}. \tag{16}$$

En portant (16) dans (13) et en identifiant les coefficients des puissances de t, on obtient un système récurrentiel d'équations algébriques linéaires d'où l'on peut tirer de proche en proche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Ces équations sont de la forme

$$A_+\alpha_1 - \alpha_1 A_- = -\lim_{t\to\infty} t V_{21}(t),$$
$$A_+\alpha_j - \alpha_j A_- = \varphi_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}), \quad j = 2, 3, \ldots$$

La fonction vectorielle $\beta(t)$ est solution du problème de Cauchy

$$t^{-r}\beta' = A_+\beta + (V_{22} - \alpha V_{12})\beta + f_+ - \alpha f_-,$$
$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = -A_+^{-1} f_+(0),$$

solution qui existe et est unique pour $t \geqslant T \gg 1$. Pour $t \to \infty$, on a le développement asymptotique

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{t^k}.$$

Cette méthode est largement appliquée dans le calcul numérique pour transférer la condition à la limite du point à l'infini en un point fini [39, 87].

3.2. *Système du second ordre.* Considérons un système de n équations

$$w'' = t^r A(t)\, w \tag{17}$$

sur la demi-droite I, où $r \geqslant 0$ est un entier et $A(t)$, une matrice de classe $C^\infty(I)$ qui se développe en série asymptotique. Supposons que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $A_0 = A(\infty)$ ne sont pas situées sur la demi-droite $]-\infty, 0]$ du plan de λ complexe. L'ensemble M^n des solutions du système (12) bornées à l'infini est un

espace vectoriel à n dimensions. Déduisons cette équation par une factorisation de l'opérateur différentiel de (17). On cherchera des fonctions matricielles $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ telles que

$$\left(\frac{d}{dt}-\beta\right)\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)=\frac{d^2}{dt^2}-t^r A(t). \tag{18}$$

De là on déduit que $\beta = -\alpha$ et l'on obtient l'équation matricielle de Ricatti

$$\alpha' + \alpha^2 = t^r A(t), \quad T \leqslant t < \infty. \tag{19}$$

Posons les conditions de Cauchy à l'infini:

$$\lim_{t\to\infty} t^{-r/2}\alpha(t) = -\sqrt{A_0}, \tag{20}$$

où $\sqrt{A_0}$ est une matrice dont les valeurs propres sont situées dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > 0$ et $(\sqrt{A_0})^2 = A_0$. Pour $T \gg 1$ le problème (19), (20) admet une solution et une seule.

La fonction matricielle $\alpha(t)$ se développe en la série asymptotique

$$\alpha(t) = t^{r/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{t^{k/2}} \tag{21}$$

suivant les puissances demi-entières de t^{-1}. Si r est un entier pair, la matrice $\alpha(t)$ se développe suivant les puissances entières de t^{-1}. Ici $\alpha_0 = -\sqrt{A_0}$ et la substitution de la série (21) dans le système (17) nous conduit au système récurrentiel d'équations d'où l'on peut tirer de proche en proche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

De (18) il suit que si

$$w'(t) = \alpha(t)\, w(t), \tag{22}$$

où $\alpha(t)$ est solution de l'équation (19), alors $w(t)$ est solution du système (17). Si $\alpha(t)$ vérifie les conditions de Cauchy (20), alors $w(t) \in M^n$.

Considérons le système non homogène

$$w'' = t^r[A(t)\, w + f(t)],$$

où $A(t)$ satisfait les mêmes conditions que plus haut, $f(t)$, les conditions du n° 3.1. L'ensemble M^n des solutions de ce système bornées lorsque $t \to \infty$ est une variété linéaire de dimension n.

En vertu de (18), ce système peut être mis sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)w + t^r f(t) = 0. \tag{23}$$

Cherchons l'équation de M^n sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt}-\alpha(t)\right)w = \beta(t). \tag{24}$$

En portant cette relation dans (23), on obtient l'équation en β:

$$\beta' + \alpha(t)\beta = t^r f(t).$$

Donnons-nous les conditions de Cauchy à l'infini:

$$\lim_{t\to\infty} t^{-r/2}\beta(t) = -(\sqrt{A_0})^{-1} f_0.$$

La solution de ce problème de Cauchy existe, est unique pour $t \geqslant T \gg 1$ et $\beta(t)$ admet le développement asymptotique

$$\beta(t) = t^{r/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{t^{k/2}}, \quad t \to \infty.$$

Si r est pair, cette série ne contient que des puissances entières de t^{-1}. Les coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots$ se déterminent à partir d'un système récurrentiel d'équations algébriques linéaires.

3.3. *Systèmes non linéaires.* La méthode de transfert de la condition à la limite d'un point singulier en un point non singulier mentionnée ci-dessus pour les systèmes linéaires est développée dans [39] pour les systèmes non linéaires. Exhibons l'un de ces résultats. Considérons le système de n équations

$$w'' = f(t, w) \tag{25}$$

sur la demi-droite I. Supposons que

$$f(t, w) = A(t)w + g(t, w),$$

où $A(t) \in C^\infty$ et se développe en une série asymptotique de la forme (12) et la fonction vectorielle $g(t, w)$ est un polynôme en w, c'est-à-dire que

$$g(t, u) = \sum_{|\alpha|=2}^{N} g_\alpha(t) w^\alpha,$$

où les fonctions vectorielles $g_\alpha(t)$ se développent en les séries asymptotiques

$$g_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha k} t^{-k}$$

lorsque $t \to \infty$, $g_\alpha(t) \in C^\infty(I)$ pour tous les α, où

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \ldots w_n^{\alpha_n}.$$

Supposons que les valeurs propres de la matrice A_0 ne sont pas situées sur la demi-droite $]-\infty, 0]$. Posons la condition à la limite à l'infini:

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 0. \tag{26}$$

Sous les conditions posées, les solutions du système (25) satisfaisant la condition (26) forment pour chaque t fixe une variété non linéaire M^n de dimension n dans l'espace (w, w'). On cherchera l'équation de M^n sous la forme

$$w' = \alpha\,(t, w). \tag{27}$$

La solution de ce système sera solution du système (25) si la fonction vectorielle α satisfait l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial w}\alpha = f\,(t, w), \quad t \geqslant T. \tag{28}$$

Cette équation est envisagée dans le domaine $T \leqslant t < \infty$, $|w| \leqslant \varepsilon$, où $T \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$. Pour α dans (27) on prend la solution, holomorphe en w, du problème de Cauchy à l'infini:

$$\lim_{t\to\infty} \alpha\,(t, w) = \gamma\,(w), \quad |w| \leqslant \varepsilon, \tag{29}$$

où $\gamma\,(w)$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial\gamma}{\partial w}\gamma = A_0 w + \sum_{|\beta|=2}^{N} g_{\beta 0} w^{\beta}$$

telle que

$$\gamma\,(w) = -\sqrt{A_0}\,w + O\,(|w|^2), \quad |w| \to 0.$$

La valeur $\sqrt{A_0}$ est la même qu'au n° 3.2

Pour $\varepsilon \ll 1$, $T \gg 1$ le problème de Cauchy (28), (29) admet une solution unique qui se décompose pour $|w| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant T$, en une série convergente

$$\alpha\,(t, w) = -\sqrt{A_0}\,w + \sum_{|\beta|=1}^{\infty} \alpha_{\beta}\,(t)\,w^{\beta},$$

où les fonctions vectorielles $\alpha_{\beta}\,(t)$ se développent pour $t \to \infty$ en les séries asymptotiques

$$\alpha_{\beta}\,(t) = \sum_{l\geqslant 0,\ |\beta|+l\geqslant 2} \frac{\alpha_{\beta}^{(l)}}{t^l}, \quad |\beta| \geqslant 1.$$

Pour les vecteurs $\alpha_{\beta}^{(l)}$ on obtient un système récurrentiel d'équations algébriques dont la résolution se ramène à chaque étape à celle d'un système linéaire d'équations algébriques.

Un exposé plus détaillé des résultats acquis dans cette direction est accessible dans [39].

CHAPITRE II

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE SUR L'AXE RÉEL

Dans ce chapitre on étudie des équations de la forme

$$y'' + p(x, \lambda) y' + q(x, \lambda) y = 0$$

et des systèmes de deux équations du premier ordre pour x réel. On exhibe des formules asymptotiques pour les solutions sous l'hypothèse que les équations ne possèdent pas de points de retour. Les coefficients des équations sont supposés être suffisamment différentiables. Les formules asymptotiques mentionnées dans ce chapitre s'appellent: approximation WKB (ou représentation asymptotique WKB), approximation quasi classique, approximation H.F., etc.

§ 1. Transformations des équations du second ordre

Pour étudier l'équation

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \tag{1}$$

on se sert des transformations suivantes.

1. La substitution

$$y = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^x p(t)\,dt\right\} z$$

ramène l'équation (1) à la forme

$$z'' + (q - p^2/4 - p'/2) z = 0.$$

Considérons l'équation binomiale

$$y'' + Q(x) y = 0. \tag{2}$$

2. La substitution $y'/y = w$ ramène l'équation (2) à l'équation de Ricatti

$$w' + w^2 + Q(x) = 0.$$

3. La substitution

$$y = [\varphi'(\xi)]^{1/2} z, \quad x = \varphi(\xi)$$

ramène l'équation (2) à la forme

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[Q(\varphi(\xi))\, [\varphi'(\xi)]^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{2\varphi'(\xi)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} \right)^2 \right] z = 0.$$

L'équation reste binomiale par cette transformation. L'expression

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 = \{\varphi, \xi\}$$

s'appelle *dérivée de Schwarz*.

4. Considérons l'équation

$$(P(x)\, y')' \pm Q(x)\, y = 0, \tag{3}$$

où $P(x) > 0$ et $Q(x) > 0$. La substitution

$$\xi = \int_a^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}}\, dt, \quad y = (P(x)\, Q(x))^{-1/4} z \tag{4}$$

ramène l'équation (3) à la forme

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} \pm z + q(\xi)\, z = 0,$$

$$q = P^{-1/4} Q^{-3/4} \frac{d}{dx} P \frac{d}{dx} (PQ)^{-1/4}.$$

La transformation (4) s'appelle *transformation de Liouville*. En particulier, l'équation

$$y'' \pm Q(x)\, y = 0 \tag{5}$$

se ramène à la forme

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} \pm z + qz = 0, \quad q = -\frac{1}{4} \frac{Q''_{xx}}{Q^2} + \frac{5}{16} \frac{Q'^2_x}{Q^3}.$$

La transformation de Liouville

$$z = \varphi(x)\, y, \quad \xi = \int_a^x \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}}\, dt,$$

$$\varphi(x) = \left[\frac{Q(x)}{P(x)} \right]^{1/4} \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_a^x \frac{R(t)}{P(t)}\, dt \right\}$$

ramène l'équation

$$P(x)\, y'' + R(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$$

à la forme

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{P} \right)'_x \left(\frac{P}{Q} \right)^2 \frac{\varphi'_x}{\varphi} - \frac{P \varphi''_{xx}}{Q \varphi} \right] z = 0.$$

La transformation de Liouville ramène les équations à coefficients croissant régulièrement (dans un certain sens) à l'infini à des équations à coefficients quasi constants.

Exemple. Soit $Q(x) \sim ax^{\alpha}$, $x \to +\infty$, $\alpha > -2$, $a > 0$, et supposons que cette représentation asymptotique est deux fois dérivable, c'est-à-dire que $Q'(x) \sim \alpha a x^{\alpha-1}$, $Q''(x) \sim \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Alors

$$\xi(+\infty) = +\infty, \quad q = O(\xi^{-1-2/(\alpha+2)}),$$

de sorte que $q(\xi) \to 0$ lorsque $\xi \to +\infty$, $q \in L_1(]0, \infty[)$.

5. Le système

$$u' = a_{11}(x)u + a_{12}(x)v, \quad v' = a_{21}(x)u + a_{22}(x)v$$

se ramène par la transformation

$$u = \rho\cos\theta, \quad v = \rho\sin\theta \tag{6}$$

à la forme

$$\theta' = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) + \frac{1}{2}r\cos(2\theta + \psi),$$
$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{1}{2}r\sin(2\theta + \psi),$$

où

$$r^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2,$$
$$\cos\psi = (a_{21} + a_{12})/r, \quad \sin\psi = (a_{11} - a_{22})/r.$$

La transformation (6) s'appelle *transformation de Prüfer*.

En particulier, l'équation (3) prise avec le signe + se ramène par la transformation

$$y = (PQ)^{-1/4}\rho\sin\theta, \quad Py' = \rho\cos\theta$$

au système

$$\theta' = \sqrt{\frac{Q}{P}} + \frac{1}{4}\sin\theta\,\frac{d}{dx}\ln(PQ),$$
$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{1}{2}\sin^2\theta\,\frac{d}{dx}\ln(PQ).$$

6. La transformation

$$y = u_1 + u_2,$$
$$y' = \left(\sqrt{PQ} - \frac{P(PQ)'}{4PQ}\right)u_1 - \left(\sqrt{PQ} + \frac{P(PQ)'}{4PQ}\right)u_2 \tag{7}$$

ramène l'équation (3) (prise avec le signe —) au système

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \left[\sqrt{\frac{Q}{P}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{(PQ)'}{4PQ} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8(PQ)^{5/2}} \left[(P(\sqrt{PQ})')' \sqrt{PQ} - \frac{5}{4} P ((\sqrt{PQ})')^2 \right]. \quad (9)$$

Cette transformation possède les mêmes propriétés que la transformation de Liouville. En particulier, $\alpha_1 \in L_1(]b, \infty[)$ pour un certain b si $P \equiv 1$ et la fonction $Q(x)$ est de la même forme que dans l'exemple. Mais elle a l'avantage de ne pas exiger le changement de la variable indépendante et peut donc être utilisée pour les équations à coefficients complexes.

7. On cherchera une solution de l'équation (2), où $Q(x) > 0$, sous la forme

$$y = Q^{-1/4}(x) [A(x) e^{iS(x)} + B(x) e^{-iS(x)}], \quad S(x) = \int_a^x \sqrt{Q(t)}\, dt. \quad (10)$$

Choisissons A et B tels que

$$y' = iQ^{1/4}(x) [A(x) e^{iS(x)} - B(x) e^{-iS(x)}].$$

La dérivation de la solution $y(x)$ de (10) n'affectera que les exponentielles. Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ doivent alors satisfaire le système d'équations

$$A' = \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} e^{-2iS} B, \quad B' = \frac{1}{4} \frac{Q'}{Q} e^{2iS} A. \quad (11)$$

Si la fonction $Q(x)$ varie lentement pour $x \gg 1$ (par exemple $Q(x) \to Q_0 > 0$, $Q'(x) \to 0$), les coefficients des seconds membres de (11) seront petits pour $x \gg 1$. Introduisons la fonction $R(x) = B(x)/A(x)$ qui dans les problèmes de propagation des ondes joue le rôle d'un coefficient de réflexion. La fonction $R(x)$ est alors solution de l'équation de Ricatti

$$R' = \frac{Q'}{4Q} (e^{2iS} - R^2 e^{-2iS}).$$

8. Considérons le système de type Dirac :

$$Jy' + \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix} y = \lambda y, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

à coefficients réels, $q_{12}(x) = q_{21}(x)$. La transformation $y = T(x) z$, où

$$T(x) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_a^x (q_{11}(t) + q_{22}(t))\, dt,$$

ramène le système (12) à la forme

$$Jy' + \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix} y = \lambda y,$$

$$q(x) = q_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(q_{22} - q_{11}) \sin 2\varphi,$$

$$p(x) = \frac{1}{2}(q_{11} - q_{22}) \cos 2\varphi + q_{12} \sin 2\varphi.$$

§ 2. Estimations WKB

Considérons l'équation

$$y'' - Q(x)\, y = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle I: $a < x < b$, fini ou infini. La fonction $Q(x) \in C^2(I)$ est à valeurs complexes et vérifie les conditions:

1) $Q(x) \neq 0$, $x \in I$;

2) il existe une détermination de $\sqrt{Q(x)}$ de classe $C^2(I)$ telle que $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geqslant 0$, $x \in I$.

C'est cette détermination de $\sqrt{Q(x)}$ qui interviendra dans toute les formules.

Précisons la condition 2). Si la fonction $Q(x)$ est réelle, elle résulte de 1). Supposons que $Q(x)$ est à valeurs complexes; l'équation $z = Q(x)$, $x \in I$, définit alors une courbe γ dans le plan de z complexe. La détermination de la fonction $w = \sqrt{z}$ qui est telle que $w(1) = 1$ met en correspondance biunivoque le plan de z muni d'une coupure le long de la demi-droite $]-\infty, 0]$ et le demi-plan $\operatorname{Re} w > 0$. La courbe γ ne peut donc couper la demi-droite $]-\infty, 0]$.

1. Estimations WKB. Introduisons les notations

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)}\, dt, \tag{2}$$

$$\rho(x_0, x) = \left| \int_{x_0}^{x} |\alpha_1(t)|\, dt \right|, \tag{3}$$

où $\alpha_1(x)$ est de la forme (9) du § 1 pour $P(x) \equiv 1$.

1.1. *La solution* y_1. Posons

$$\tilde{y}_1(x) = Q^{-1/4}(x) \exp\{S(x_0, x)\}. \tag{4}$$

Si la condition

$$\rho(a, x) < \infty, \quad x \in I, \tag{5}$$

est réalisée, l'équation (1) admet une solution y_1 telle que pour $x \in I$

$$\left| \frac{y_1(x)}{\tilde{y}_1(x)} - 1 \right| \leqslant 2\,(e^{2\rho(a,\,x)} - 1). \tag{6}$$

Les estimations (6), (8) et (11) s'appellent *estimations WKB*. Si $Q(x) \equiv (ax+b)^{-4}$, l'estimation (6) est exacte.

La solution y_1 satisfait la condition à la limite

$$\lim_{x\to a} y_1'(x) \Big/ \left[\left(\sqrt{Q(x)} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)}\right) y_1(x)\right] = 0. \tag{7}$$

La dérivée $y_1'(x)$, $x \in I$, est justiciable de l'estimation

$$\left| \frac{y_1'(x)}{\sqrt{Q(x)}\,\tilde{y}_1(x)} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{4}\left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| + \\ + 4\left(1 + \frac{1}{4}\left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right|\right)(e^{2\rho(a,\,x)} - 1). \tag{8}$$

1.2. *La solution* y_2. Posons

$$\tilde{y}_2(x) = Q^{-1/4}(x)\, e^{-S(x_0,\,x)} \tag{9}$$

et supposons que

$$\rho(x,\, b) < \infty, \quad x \in I. \tag{10}$$

L'équation (1) admet alors une solution y_2 telle que pour $x \in I$ l'on a les estimations

$$\left| \frac{y_2(x)}{\tilde{y}_2(x)} - 1 \right| \leqslant 2\,(e^{2\rho(x,\,b)} - 1), \\ \left| \frac{y_2'(x)}{\sqrt{Q(x)}\,\tilde{y}_2(x)} + 1 \right| \leqslant \frac{1}{4}\left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right| + \\ + 4\left(1 + \frac{1}{4}\left| \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} \right|\right)(e^{2\rho(x,\,b)} - 1). \tag{11}$$

La solution y_2 satisfait la condition à la limite

$$\lim_{x\to b} y_2'(x) \Big/ \left[\left(\sqrt{Q(x)} + \frac{Q'(x)}{4Q(x)}\right) {}'y_2(x)\right] = -1. \tag{12}$$

Les estimations WKB entraînent immédiatement les formules asymptotiques suivantes:

$$y_1(x) \sim \tilde{y}_1(x), \quad x \to a; \quad y_2(x) \sim \tilde{y}_2(x), \quad x \to b.$$

2. Equations intégrales pour les solutions. Construisons la solution y_1 en ramenant l'équation (1) à un système d'équations intégrales. La substitution

$$y = \tilde{y}_1(x)(u_1 + u_2), \tag{13}$$
$$y' = \tilde{y}_1(x)\left[\left(\sqrt{Q} - \frac{Q'}{4Q}\right)u_1 - \left(\sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q}\right)u_2\right],$$

comme indiqué dans le § 1, ramène l'équation (1) au système

$$u_1' = \alpha_1(x)(u_1 + u_2), \quad u_2' - 2\sqrt{Q(x)}\, u_2 = -\alpha_1(x)(u_1 + u_2).$$

Ce système est équivalent au système d'équations intégrales

$$\begin{aligned} u_1(x) &= c_1 + \int_a^x \alpha_1(t)(u_1(t) + u_2(t))\, dt, \\ u_2(x) &= c_2 - \int_a^x e^{2S(x,t)}\alpha_1(t)(u_1(t) + u_2(t))\, dt, \end{aligned} \tag{14}$$

ou, en écriture opératorielle,

$$u = u^0 + Ku, \quad u = (u_1, u_2),$$

où K est l'opérateur intégral de (14). Comme $a \leqslant t \leqslant x$, il suit de la condition 2) que $\operatorname{Re} S(x, t) \leqslant 0$ et par suite

$$|\exp\{2S(x, t)\}| \leqslant 1. \tag{15}$$

Ceci nous conduit aux estimations

$$|(Ku)_j(x)| \leqslant \int_a^x |\alpha_1(t)|(|u_1(t)| + |u_2(t)|)\, dt, \qquad j = 1, 2.$$

Posons $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ et appliquons au système (14) la méthode des approximations successives:

$$u^{n+1} = u^0 + Ku^n.$$

Cette méthode converge et donne une solution $u(x)$ telle que

$$|u_j(x) - c_j| \leqslant \exp\{2\rho(a, x)\} - 1, \qquad j = 1, 2.$$

Cette estimation et (13) entraînent les estimations WKB (6) et (8). Par ailleurs

$$\lim_{x \to a} u_1(x) = 1, \quad \lim_{x \to a} u_2(x) = 0,$$

ce qui prouve (7). La solution y_2 se construit de façon analogue.

Si la fonction $Q(x)$ est réelle, on obtient les estimations WKB en appliquant la transformation de Liouville à l'équation (1) et en ramenant l'équation ainsi obtenue à une équation intégrale.

3. Equation sous la forme auto-adjointe. Considérons l'équation

$$(P(x)\,y')' - Q(x)\,y = 0. \tag{16}$$

Soient $P(x)$, $Q(x) \in C^2(I)$ et supposons remplies les conditions:

1) $P(x) \neq 0$, $Q(x) \neq 0$, $x \in I$;

2) il existe une détermination de $\sqrt{Q(x)/P(x)}$ de classe $C^2(I)$ telle que $\operatorname{Re}\sqrt{Q(x)/P(x)} \geqslant 0$, $x \in I$.

Introduisons les notations

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}}\,dt,$$

$$\tilde{y}_1(x) = [P(x)\,Q(x)]^{-1/4} \exp\{S(x_0, x)\},$$

$$\rho(x_0, x) = \left| \int_{x_0}^{x} |\alpha_1(t)|\,dt \right|,$$

où $\alpha_1(x)$ est de la forme (9) du § 1. L'équation (16) admet une solution $y_1(x)$ qui est justiciable de l'estimation (6) pour $x \in I$. On a aussi des estimations identiques à (8) et (11).

§ 3. Représentation asymptotique des solutions de l'équation du second ordre pour de grandes valeurs du paramètre

1. Equation binomiale. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, $q(x)$, une fonction à valeurs complexes, $q(x) \in C^\infty(I)$.

L'équation (1) est une équation à petit paramètre $\varepsilon = \lambda^{-1}$ en la dérivée supérieure:

$$\varepsilon^2 y'' - q(x)\,y = 0,$$

et de plus les coefficients dépendent de façon élémentaire de ε. Dans ce paragraphe les résultats relatifs à la représentation asymptotique des solutions seront d'abord formulés pour l'équation (1) et ensuite étendus au cas où les coefficients dépendront de façon plus complexe du paramètre ε.

1.1. *Solutions asymptotiques formelles.* Si $q = \text{const} \neq 0$, l'équation (1) admet deux solutions linéairement indépendantes $y_{1,2} = \exp\{\pm\lambda\sqrt{q}\,x\}$. Si $q(x) \not\equiv \text{const}$, on cherchera la solution de l'équation (1) sous la forme de la série asymptotique

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\lambda^{-k}.$$

Il est plus commode de mettre cette série sous la forme

$$y = \exp\left\{\int^{x} \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k}\alpha_k(t)\,dt\right\}. \tag{2}$$

La substitution $y'/y = w$ ramène l'équation (1) à l'équation de Ricatti

$$w' + w^2 - \lambda^2 q(x) = 0.$$

En portant l'expression (2) dans cette équation, on obtient l'identité

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k}\alpha_k'(x) + \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k}\alpha_k(x)\right)^2 - \lambda^2 q(x) = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des puissances de λ^{-1}, on obtient un système récurrent pour les fonctions inconnues $\alpha_{-1}(x)$, $\alpha_0(x)$, ... Les calculs revêtent un caractère formel.

La première de ces équations est $\alpha_{-1}^2 = q$, de sorte que $\alpha_{-1} = \pm\sqrt{q}$. Pour $\alpha_{-1} = \sqrt{q}$ (la détermination choisie sera indiquée dans 1.2) on a

$$\begin{gathered} \alpha_{-1}(x) = \sqrt{q(x)}, \quad \alpha_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \\ \alpha_1(x) = \frac{1}{8}\frac{q''(x)}{q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32}\frac{q'^2(x)}{q^{5/2}(x)}. \end{gathered} \tag{3}$$

On remarquera que la fonction $\alpha_1(x)$ est la même que (9) du § 1.

Pour les fonctions suivantes $\alpha_k(x)$, on obtient les relations récurrentielles

$$\alpha_{k+1}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}}\left(\alpha_k'(x) + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(x)\alpha_{k-j}(x)\right). \tag{4}$$

Si $\alpha_{-1}(x) = -\sqrt{q(x)}$, il faut remplacer $\sqrt{q}$ par $-\sqrt{q}$ dans les formules (2) et (3).

L'équation (1) admet ainsi deux solutions asymptotiques formelles

$$
\begin{aligned}
y_1(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda \int^x \sqrt{q(t)}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int^x \alpha_k(t)\, dt\right\},\\
y_2(x, \lambda) &= q^{-1/4}(x) \exp\left\{-\lambda \int^x \sqrt{q(t)}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int^x \alpha_k(t)\, dt\right\}.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Ces séries asymptotiques s'interrompent dans deux cas.

A. Si $q(x) = (ax + b)^{-4}$, alors $\alpha_k(x) \equiv 0$ pour $k \geqslant 1$. Les formules (5) nous donnent alors les solutions exactes de l'équation (1):

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int^x \sqrt{q(t)}\, dt\right\}.$$

B. Si $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-2}$, alors $\alpha_k(x) \equiv 0$ pour $k \geqslant 2$. L'équation (1) s'intègre aussi par quadratures, mais les formules (5) ne donnent pas les solutions exactes si $a \neq 0$.

Les formules (5) ne sont visiblement pas valables aux zéros de la fonction $q(x)$. En effet, si $q(x_0) = 0$, les seconds membres de la formule (5) deviennent infinis pour $x = x_0$, tandis que les solutions de l'équation (1) sont des fonctions régulières.

Les zéros de la fonction $q(x)$ s'appellent *points de retour* (*turning points*) de l'équation (1). Les racines de l'équation caractéristique $p^2 - q(x) = 0$ sont confondues en tout point de retour.

1.2. *Terme principal de la représentation asymptotique.* Admettons que $q(x) \in C^2(I)$ et introduisons les conditions:

1) l'équation (1) ne possède pas de point de retour, c'est-à-dire que $q(x) \neq 0$, $x \in I$;

2) il existe une détermination de $\sqrt{q(x)}$ de classe $C^2(I)$ telle que $\operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geqslant 0$, $x \in I$.

De 1.1 il s'ensuit qu'il existe des solutions asymptotiques formelles même lorsque la condition 2) n'est pas remplie. Cette condition n'est pas nécessaire à l'existence de solutions admettant un développement asymptotique de la forme (5). Mais sa violation peut conduire à l'inexistence de telles solutions même si $q(x)$ est une fonction analytique (§ 8).

Introduisons la notation

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt. \qquad (6)$$

L'équation (1) admet deux solutions y_1 et y_2 de la forme

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\}\,[1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \to +\infty. \qquad (7)$$

L'estimation du résidu est uniforme en $x \in I$, c'est-à-dire que $|O(\lambda^{-1})| \leqslant C\lambda^{-1}$ pour $\lambda \geqslant 1$, où C est indépendant de x.

La formule asymptotique (7) peut être dérivée deux fois par rapport à x, c'est-à-dire que

$$y_{1,2}^{(j)}(x, \lambda) = (\pm \lambda \sqrt{q(x)})^j q^{-3/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\}[1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \to +\infty, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

L'estimation du résidu est uniforme en $x \in I$. Les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes pour $\lambda \gg 1$.

La formule asymptotique (7) s'appelle *approximation WKB*, *approximation quasi classique*, *approximation H.F.*, etc.

Signalons que pour y_1 et y_2 on peut prendre des solutions satisfaisant les conditions de Cauchy:

$$\begin{aligned} &y_1(a, \lambda) = A, \quad y_1'(a, \lambda) = A[\lambda \sqrt{q(a)} - q'(a)/(4q(a))], \\ &y_2(b, \lambda) = B, \quad y_2'(b, \lambda) = -B[\lambda \sqrt{q(b)} + q'(b)/(4q(b))], \end{aligned} \tag{9}$$

où A et B sont des constantes.

Toutes les assertions de 1.1 et 1.2 résultent des estimations WKB (§ 2). En effet, en comparant les équations (1) des §§ 2 et 3, on obtient

$$Q(x) = \lambda^2 q(x), \quad \alpha_1(x; Q) = \lambda^{-1}\alpha_1(x; q),$$
$$\rho(x_0, x; Q) = \lambda^{-1}\rho(x_0, x; q).$$

La fonction $\alpha_1(x; q)$ est calculée à l'aide de $q(x)$ (cf. (3)), la fonction $\alpha_1(x; Q)$, à l'aide de $Q(x)$. La formule (6) du § 2 nous donne l'estimation

$$\left| \frac{y_1(x, \lambda)}{\tilde{y}_1(x, \lambda; a)} - 1 \right| \leqslant 2\left(\exp\left\{\frac{2}{\lambda}\rho(a, x; q)\right\} - 1\right).$$

Le second membre de cette estimation est d'ordre $O(\lambda^{-1})$ lorsque $\lambda \to \infty$. Les formules (7), (8) et (9) résultent des formules (7), (8), (11) et (12) du § 2.

1.3. *Structure des solutions pour $q(x)$ réelles.* Le comportement des solutions dépend essentiellement du signe de la fonction $q(x)$.

A. Solutions non oscillantes: $q(x) > 0$. Prenons les approximations WKB de la forme

$$y_1(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\lambda S(a, x)\},$$
$$y_2(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x, b)\}$$

et fixons $\lambda \gg 1$. La solution y_1 est égale à $q^{-1/4}(a) + O(\lambda^{-1})$ pour $x = a$, est strictement croissante et exponentiellement grande pour $x = b$. La solution y_2 possède les mêmes propriétés si l'on permute a et b.

B. Solutions oscillantes: $q(x) < 0$. Au lieu de (1) il est plus commode d'envisager l'équation

$$y'' + \lambda^2 q(x)\, y = 0, \tag{10}$$

où $q(x) > 0$. Cette équation admet un système fondamental de solutions

$$y_{1,2}(x, \lambda) \sim q^{-1/4} \exp\{\pm i\lambda S(x_0, x)\},$$

qui peuvent être choisies conjuguées complexes: $y_2 \equiv \overline{y_1}$. Les solutions réelles $y_3 = \operatorname{Re} y_1$, $y_4 = \operatorname{Im} y_1$ forment un système fondamental et sont de la forme

$$y_3(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \cos [\lambda S(x_0, x)] + O(\lambda^{-1}),$$
$$y_4(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \sin [\lambda S(x_0, x)] + O(\lambda^{-1}),$$

c'est-à-dire sont des fonctions fortement oscillantes.

1.4. *Développements asymptotiques.* Supposons que $q(x) \in C^\infty(I)$ et que les conditions 1) et 2) sont réalisées. L'équation (1) admet alors deux solutions de la forme

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\} \times \\ \times [1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_k^{\pm}(x) + O(\lambda^{-N})], \quad \lambda \to +\infty, \tag{11}$$

où $N \geqslant 1$ est quelconque et l'estimation du résidu est uniforme en $x \in I$. Les formules asymptotiques (10) peuvent être dérivées par rapport à x et à λ un nombre arbitraire de fois sans violation de l'uniformité en x de l'estimation du résidu.

Les coefficients $a_k^{\pm}(x)$ se déterminent à partir des identités formelles

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\pm \lambda)^{-k} \int_{x_0}^{x} \alpha_k(t)\, dt\right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k^{\pm}(x).$$

Le développement de l'exponentielle en séries formelles de λ^{-1} nous donne les fonctions $a_k^{\pm}(x)$. Ecrivons les développements limités:

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt\right\} \times \\ \times \left[1 \pm \lambda^{-1} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{8} \frac{q''(t)}{q^{3/2}(t)} - \frac{5}{32} \frac{q'^2(t)}{q^{5/2}(t)}\right) dt + O(\lambda^{-2})\right].$$

Pour $y_{1,2}$ on peut prendre les solutions satisfaisant les conditions de Cauchy:

$$\begin{aligned} &y_1(a)=A, \quad y_1'(a)=A\left[\lambda\sqrt{q(a)}-\frac{q'(a)}{4q(a)}+\sum_{k=1}^{N-1}\lambda^{-k}\alpha_k(a)\right], \\ &y_2(b)=B, \quad y_2'(b)=B\left[-\lambda\sqrt{q(b)}-\frac{q'(b)}{4q(b)}+\sum_{k=1}^{N-1}(-\lambda)^{-k}\alpha_k(b)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

1.5. *Paramètres auxiliaires et λ complexes.* Formulons le théorème de dépendance analytique des solutions des équations différentielles linéaires par rapport aux paramètres. Soient I un intervalle de l'axe des x, D, un domaine dans le plan complexe. Posons le problème de Cauchy pour un système de n équations:

$$y'=A(x, \mu)\,y, \quad y(x_0, \mu)=y_0(\mu). \tag{13}$$

Théorème. *Supposons que la fonction matricielle $A(x, \mu)$ est continue pour $(x, \mu)\in I\times D$ et holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour tout $x\in I$ fixe. Supposons que la fonction vectorielle $y_0(\mu)$ est holomorphe dans le domaine D. Alors la solution $y(x, \mu)$ du problème de Cauchy* (13) *est holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour chaque $x\in I$ fixe.*

Considérons le problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre n:

$$\begin{gathered} y^{(n)}+q_1(x, \mu)\,y^{(n-1)}+\ldots+q_n(x, \mu)\,y=0, \\ y(x_0, \mu)=y_0(\mu), \quad y'(x_0, \mu)=y_1(\mu), \ldots, y^{(n-1)}(x_0, \mu)=y_{n-1}(\mu). \end{gathered}$$

Si les coefficients $q_j(x, \mu)$ et les données initiales $y_j(\mu)$ possèdent les mêmes propriétés que $A(x, \mu)$ et $y_0(\mu)$, la solution $y(x, \mu)$ du problème de Cauchy est holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour chaque $x\in I$ fixé.

En particulier, si $A=B=1$, les solutions $y_{1,2}(x, \lambda)$ vérifiant les conditions aux limites (12) sont des fonctions entières de λ pour chaque $x\in I$ fixé.

Considérons l'équation

$$y''-\lambda^2 q(x, \mu)\,y=0. \tag{14}$$

A. μ est un paramètre réel, D un intervalle de l'axe réel. On admet dans ce cas que $q(x, \mu)\in C^\infty(I\times D)$.

B. μ est un paramètre complexe, D un domaine du plan complexe de μ. Dans ce cas on admet accessoirement que la fonction $q(x, \mu)$ est holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour chaque $x\in I$ fixé.

Les résultats établis plus haut pour l'équation (1) s'étendent intégralement à l'équation (14) si les conditions exigées sont réalisées uniformément en μ. Introduisons les conditions:

1) $|q(x, \mu)| \geqslant \delta > 0$ pour $(x, \mu) \in I \times D$, où δ ne dépend pas de x et de μ;

2) $\operatorname{Re} \sqrt{q(x, \mu)} \geqslant 0$ pour $(x, \mu) \in I \times D$;

3) les dérivées des fonctions $q(x, \mu)$ sont uniformément bornées par rapport à x et à μ, c'est-à-dire que

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial \mu^n} q(x, \mu) \right| \leqslant C_{mn},$$

pour $(x, \mu) \in I \times D$, où les constantes C_{mn} sont indépendantes de x et de μ.

Il existe alors des solutions $y_{1,2}(x, \lambda, \mu)$ de la forme (11); dans toutes les formules il faut de toute évidence remplacer $q(x)$ par $q(x, \mu)$. On peut dériver les formules (11) autant de fois qu'on le veut par rapport à x, λ et μ sans violer l'uniformité en x et μ de l'estimation du résidu. Supposons que μ est un paramètre complexe. Les solutions $y_{1,2}$ qui satisfont les conditions de Cauchy (12) pour chaque $x \in I$ fixé sont alors des fonctions holomorphes de λ et de μ pour tous les λ et pour $\mu \in D$.

Soit G un domaine non borné dans le plan de λ complexe. Les formules asymptotiques (11) restent valables pour $\lambda \to \infty$, $\lambda \in G$, si la condition 2) est remplacée par la condition

2*) $\operatorname{Re}(\lambda \sqrt{q(x, \mu)})$ ne change pas de signe pour $\lambda \in G$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$, $\mu \in D$.

Exemples. 1. Supposons que $q(x) > 0$ pour $x \in I$ et soit $y_1(x, \lambda)$ la solution de l'équation (1) qui satisfait les conditions de Cauchy (12), où $A = 1$. Alors $\operatorname{Re}(\lambda \sqrt{q(x)}) \geqslant 0$ pour $x \in I$, $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$, en sorte que la formule asymptotique (11) est valable lorsque $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$. Montrons que cette formule est valable lorsque $|\lambda| \to \infty$ pour tout $\operatorname{Arg} \lambda$. La fonction $y_1(x, \lambda)$ est réelle pour λ réels; donc $y_1(x, \bar{\lambda}) = \overline{y_1(x, \lambda)}$. Dans le développement (11) tous les coefficients de λ^{-1} sont réels si les λ le sont, ce qui prouve l'assertion annoncée. Ceci vaut également pour la solution $y_2(x, \lambda)$.

2. Supposons que $q(x) > 0$ et soit $y_1(x, \lambda)$ la solution de l'équation (10) justiciable du développement asymptotique (11). Comme $\operatorname{Re}(i\lambda \sqrt{q(x)}) \geqslant 0$ pour $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, cette représentation asymptotique est valable pour $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$. Pour y_2 on peut prendre la solution $y_2(x, \lambda) = \overline{y_1(x, \bar{\lambda})}$. Désignons ce système fondamental de solutions par $\{y_1^+(x, \lambda), y_2^+(x, \lambda)\}$. De façon analogue l'équation (10) admet un système fondamental $\{y_1^-(x, \lambda), y_2^-(x, \lambda)\}$ pour lequel est valable le développement asymptotique (11) lorsque

$|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$. Ces systèmes fondamentaux sont généralement distincts.

1.6. *Dépendance plus complexe par rapport à λ.* L'équation binomiale à petit paramètre en la dérivée seconde est de la forme

$$\varepsilon^2 y'' - q(x, \varepsilon) y = 0, \tag{15}$$

où $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Les hypothèses classiques imposées à la dépendance de la fonction q par rapport au paramètre ε sont les suivantes. Soit S un secteur dans le plan complexe de ε de la forme $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $-\alpha < \operatorname{Arg} \varepsilon < \beta$, où $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi$.

1. $q(x, \varepsilon) \in C^\infty(I \times S)$.

2. La fonction $q(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à ε dans le secteur S pour chaque $x \in I$ fixé.

3. On a le développement asymptotique

$$q(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) \varepsilon^k, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \in S,$$

uniformément en $x \in I$ dans chaque sous-secteur propre S' du secteur S (c'est-à-dire pour $-\alpha < -\alpha' \leqslant \operatorname{Arg} \varepsilon \leqslant \beta' < \beta$).

Si le paramètre ε ne prend que des valeurs réelles, au lieu de S on envisage l'intervalle J: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et la condition 2 est superflue. Les conditions 1) et 2) deviennent:

1) $q_0(x) \neq 0$, $x \in J$;

2) $\operatorname{Re} (\varepsilon^{-1} \sqrt{q_0(x)}) \geqslant 0$, $x \in I$, $\varepsilon \in S$.

L'équation (15) admet alors un système fondamental de solutions $\{y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon)\}$ pour lesquelles est valable le développement asymptotique (11) lorsque $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in S$. Ce développement asymptotique est uniforme en $x \in I$ si $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in S'$. Le terme principal de la représentation asymptotique est de la forme

$$y_{1,2}(x, \varepsilon) = q_0^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^{x} \sqrt{q_0(t)}\, dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{q_1(t)}{\sqrt{q_0(t)}}\, dt \right\} [1 + O(\varepsilon)].$$

On peut déterminer la représentation asymptotique des solutions de l'équation (15) de trois manières.

1. On cherche des systèmes fondamentaux de solutions sous la forme (2), c'est-à-dire que

$$y = \exp \left\{ \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k \int^{x} \beta_j(t)\, dt \right\}.$$

Les fonctions $\beta_j(x)$ peuvent être déterminées comme au nº 1 par des relations récurrentielles.

2. On peut se servir des formules (11) et redévelopper les fonctions $\alpha_j(x, \varepsilon)$ y figurant en série entière asymptotique de ε.

Les formules obtenues par ces méthodes sont confondues en raison de l'unicité du développement asymptotique.

Si l'on ne procède pas à un redéveloppement, ces méthodes nous conduisent respectivement à des séries asymptotiques de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\, \varepsilon^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, \varepsilon)\, \varepsilon^k,$$

c'est-à-dire à des développements asymptotiques au sens de Poincaré et au sens d'Erdelyi. Le deuxième développement est généralement préférable, car les expressions des fonctions ψ_k sont plus simples que celles des fonctions φ_k. Pour cette raison l'obtention du développement asymptotique de la solution en série de ε n'est pas toujours justifiée.

Le développement asymptotique en série de $\{\varepsilon^k \psi_k(x, \varepsilon)\}$, où les fonctions ψ_k ne sont pas données à priori, n'est pas unique. On peut améliorer l'approximation WKB en choisissant convenablement les fonctions ψ_k.

3. Le terme principal de la représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) est donné par la formule (7) avec le résidu $O(\lambda^{-1})$. Si l'on remplace $q(x)$ par une fonction de la forme $\tilde{q}(x) = q(x)[1 + \lambda^{-2}\beta(x)]$, où $\beta(x)$ est une fonction dérivable quelconque, le terme principal de la représentation asymptotique ne change pas. Choisissons la fonction $\beta(x)$ de telle sorte que

$$y_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{q}^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\tilde{q}(t)}\, dt\right\} [1 + O(\lambda^{-2})].$$

Pour cela il faut que

$$\pm \lambda \sqrt{q} - \frac{q'}{4q} \pm \frac{\alpha_1}{\lambda} = \pm \lambda \sqrt{\tilde{q}} - \frac{\tilde{q}'}{4\tilde{q}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

d'où l'on tire $\beta = 2\alpha_1/\sqrt{q}$. Donc, l'équation (1) admet des solutions de la forme

$$y_{1,2}(x, \lambda) = [\tilde{q}(x, \lambda)]^{-1/4} \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\tilde{q}(t, \lambda)}\, dt\right\} [1 + O(\lambda^{-2})].$$

Le terme principal de la série asymptotique (7) satisfait exactement l'équation (1) uniquement pour $q(x) = (ax + b)^{-4}$. Le terme prin-

cipal du développement obtenu satisfait aussi exactement l'équation (1) pour $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-4}$. Ceci étant, $\beta(x) \equiv$ const.

On peut de toute évidence choisir $\tilde{q}$ de telle sorte que le terme « principal » de la représentation asymptotique fournisse un développement asymptotique d'ordre $O(\lambda^{-N})$ pour tout N.

2. Equation générale du second ordre.

2.1. *Représentation asymptotique des solutions.* Considérons l'équation

$$y'' + \lambda p(x) y' + \lambda^2 q(x) y = 0 \tag{16}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $p(x), q(x) \in C^\infty(I)$. Les racines de l'équation caractéristique sont égales à

$$p_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(-p(x) \pm \sqrt{D(x)}), \quad D(x) = p^2(x) - 4q(x).$$

Un point $x_0 \in I$ s'appelle *point de retour* de l'équation (16) si les racines de l'équation caractéristique sont confondues pour $x = x_0$. Donc, les points de retour sont les racines de l'équation

$$D(x) \equiv p^2(x) - 4q(x) = 0. \tag{17}$$

Introduisons les conditions:

1) L'équation (16) ne possède pas de point de retour, c'est-à-dire que $D(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

2) Il existe une détermination de $\sqrt{D(x)}$ telle que $\operatorname{Re} \sqrt{D(x)} \geqslant 0$, $x \in I$.

L'équation (16) admet alors des solutions $y_{1,2}(x, \lambda)$ telles que

$$y_{1,2}(x, \lambda) = (D(x))^{-1/4} \exp\left\{\pm \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x} \sqrt{D(t)}\, dt - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{p'(t)}{\sqrt{D(t)}}\, dt\right\} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \to +\infty. \tag{18}$$

Les propriétés de cette représentation asymptotique sont les mêmes qu'au n° 1.4. Il existe des développements asymptotiques d'ordre $O(\lambda^{-N})$, c'est-à-dire que dans (18), l'expression entre parenthèses peut être remplacée par la somme

$$1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_{kj}(x) \lambda^{-j} + O(\lambda^{-N}), \quad j = 1, 2.$$

Pour $y_{1,2}$ on peut prendre les solutions satisfaisant des conditions de Cauchy de la forme (12).

La substitution $y = \exp\{-\lambda \int_{x_0}^{x} a\,dt\}\,z$ ramène l'équation du second ordre

$$y'' + 2\lambda a(x, \mu) y' + \lambda^2 b(x, \mu) y = 0 \tag{19}$$

à l'équation binomiale

$$z'' + \lambda^2 [b(x, \mu) - a^2(x, \mu) - \lambda^{-1} a'(x, \mu)]\, z = 0, \tag{20}$$

qui est justiciable de tous les résultats du n° 1. Nous ne les répèterons pas ; signalons seulement que les points de retour des équations (16) et (20) ne coïncident pas, mais sont voisins pour $\lambda \gg 1$. Supposons pour simplifier que les coefficients a et b sont indépendants de μ. Les points de retour de l'équation (20) sont les racines de l'équation

$$D(x) - \lambda^{-1} a'(x) = 0.$$

Si x_0 est un point de retour de l'équation (1), l'équation (20) admet un point de retour de la forme $x_0(\lambda) = x_0 + O(\lambda^{-1})$. Ce fait revêt un caractère général : les points de retour ne sont pas invariants par un changement de la variable et de la fonction inconnue, mais sont asymptotiquement invariants.

2.2. *Equation sous la forme auto-adjointe.* Considérons l'équation

$$(P(x) y')' - \lambda^2 Q(x) y = 0, \tag{21}$$

où $P, Q \in C^\infty(I)$, $P(x) \neq 0$. L'équation

$$P(x) p^2 - Q(x) = 0$$

s'appelle *équation caractéristique*, de sorte que les points de retour de l'équation (21) sont les zéros de la fonction $Q(x)$. Les conditions 1) et 2) deviennent

$$Q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{Q(x)/P(x)} \geqslant 0, \quad x \in I.$$

Ecrivons les termes principaux des représentations asymptotiques des solutions :

$$y_{1,2}(x, \lambda) = [P(x) Q(x)]^{-1/4} \exp\left\{\pm\lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{Q(t)}{P(t)}}\,dt\right\} [1 + O(\lambda^{-1})]. \tag{22}$$

3. **Remarque sur les séries asymptotiques.** La formule (11) ne contient qu'un nombre fini de termes du développement asymptotique des solutions. Les séries asymptotiques des solutions sont utilisées dans de nombreux travaux sur les méthodes asymptotiques. Appliqués à l'équation (1) sous les conditions du n° 1.4, ces résultats se formulent de la manière suivante.

L'équation (1) *admet une solution* $y_1(x, \lambda)$ *qui se développe en une série asymptotique* (5) *lorsque* $\lambda \to +\infty$ *uniformément en* $x \in I$.

Malheureusement, cette solution ne peut être déterminée à l'aide de conditions de Cauchy. La démonstration de son existence s'appuie sur le fait suivant.

Théorème (de Nörlund). *Soient donnés une série formelle arbitraire* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *et un secteur* S *de la forme* $0 < |z| < r$, $\alpha < \operatorname{Arg} z < \beta$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. *Il existe alors une fonction* $f(z)$ *holomorphe dans* S *et admettant cette série pour développement asymptotique*:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \to 0, \quad z \in S.$$

La solution $y_1(x, \lambda)$ qui admet le développement asymptotique (11) est définie de façon unique par les conditions de Cauchy (12) pour l'équation (1). On peut établir une équation intégrale pour cette solution. Faisons le changement

$$y = u_1 + u_2,$$

$$y' = \left[\sum_{j=-1}^{N-1} \lambda^{-j}\alpha_j(x)\, u_1 + \sum_{j=-1}^{N-1} (-\lambda)^{-j}\alpha_j(x)\, u_2\right].$$

L'équation (1) devient alors

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=-1}^{N-1} \lambda^{-j}\Lambda_j(x) + \lambda^{-N} Q_N(x, \lambda^{-1})\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

où $\Lambda_j(x) = \operatorname{diag}(\alpha_j(x), (-1)^j \alpha_j(x))$ et les éléments de la fonction matricielle Q_N sont bornés pour $x \in I$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$. Le système obtenu se ramène à un système d'équations intégrales de la même manière qu'au § 2, nº 2. Remarquons que ce système et les conditions de Cauchy (12) dépendent de N, de sorte que la solution $y_1(x, \lambda)$ en dépend aussi. Désignons cette solution par $y_{1N}(x, \lambda)$.

La solution $y_{1N}(x, \lambda)$ ne se développe pas en série asymptotique de la forme (5) sur l'intervalle I. Plus exactement, un tel développement asymptotique existe, mais il n'est pas uniforme en x: au voisinage du point $x = a$ le développement asymptotique se comporte comme une couche limite.

Montrons-le pour $N = 1$. Considérons le système d'équations intégrales (14), § 2, où $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Prenons l'approximation

zéro de la forme $u_1^0(x) \equiv 1$, $u_2^0(x) \equiv 0$; la première approximation est alors

$$u_1^1(x) = 1 + \lambda^{-1} \int_a^x \alpha_1(t)\, dt,$$

$$u_2^1(x) = -\lambda^{-1} \int_a^x \alpha_1(t) \exp\{2\lambda S(x, t)\}\, dt.$$

Supposons pour simplifier que $q(x) > 0$; la fonction $S(x, t)$ traitée comme une fonction de t atteint son maximum sur le chemin d'intégration au point $t = a$. Une intégration par parties nous conduit au développement asymptotique uniforme en $x \in I$:

$$u_2^1(x) = -\sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k-1} L^{k-1} \left(\frac{\alpha_1(x)}{2\sqrt{q(x)}} \right) +$$

$$+ \exp\{2\lambda S(x, a)\} \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k-1} \left[L^{k-1} \left(\frac{\alpha_1(x)}{2\sqrt{q(x)}} \right) \right] \Bigg|_{x=a} + O(\lambda^{-N-1}), \tag{23}$$

$$L = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \frac{d}{dx}.$$

La fonction $F = \exp\{2\lambda S(x, a)\}$ est une fonction classique de couche limite, puisque

$$F(a, \lambda) = 1 \,; \quad \lim_{\lambda \to +\infty} F(x, \lambda) = 0, \quad x \neq a,$$

et diffère sensiblement de 0 seulement dans un petit voisinage du point a de l'ordre de λ^{-1}.

On s'est borné à la première approximation, mais on peut montrer que les solutions u_1 et u_2 des équations intégrales admettent des développements asymptotiques de la forme (23).

§ 4. Systèmes de deux équations contenant un grand paramètre

1. Solutions asymptotiques formelles. Considérons le système

$$y_1' = \lambda [a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2],$$
$$y_2' = \lambda [a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2]$$

à coefficients complexes $a_{jk}(x)$. Mettons-le sous la forme matricielle :

$$y' = \lambda A(x) y, \tag{1}$$

où $A(x) = (a_{jk}(x))$. Supposons que $I = [a, b]$ est un intervalle fini, $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$.

Le système (1) peut être ramené à une équation du second ordre par élimination de l'une des fonctions inconnues, mais pour construire une solution asymptotique formelle il est plus commode de manipuler directement ce système. On admettra que les valeurs propres $p_1(x)$ et $p_2(x)$ de la matrice $A(x)$ sont distinctes pour tous les $x \in I$. Alors $p_{1,2}(x) \in C^\infty(I)$ et la matrice $A(x)$ admet des vecteurs propres linéairement indépendants $e_1(x)$ et $e_2(x)$ de classe $C^\infty(I)$. La matrice $T(x) = (e_1(x), e_2(x))$ ramène la matrice $A(x)$ à la forme diagonale, c'est-à-dire que

$$T^{-1}(x)\, A(x)\, T(x) = \Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), p_2(x)).$$

Soient $e_1^*(x)$ et $e_2^*(x)$ les lignes de la matrice $T^{-1}(x)$; alors

$$e_j^*(x)\, e_k(x) \equiv \delta_{jk}, \quad e_j^*(x)\, A(x) = p_j(x)\, e_j^*(x). \tag{2}$$

On cherchera une solution asymptotique formelle du système (1) sous forme de la série asymptotique

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} f_k(x). \tag{3}$$

En portant ce développement dans le système (1), on obtient le système récurrentiel d'équations

$$\begin{gathered} (A(x) - S'(x) I)\, f_0(x) = 0, \\ (A(x) - S'(x) I)\, f_{k+1}(x) = -f_k'(x), \quad k = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

De la première équation, il s'ensuit que $S'(x)$ est une valeur propre et $f_0(x)$ un vecteur propre de la matrice $A(x)$. Posons $S'(x) = p_1(x)$; alors

$$f_0(x) = \alpha(x)\, e_1(x),$$

où $\alpha(x)$ est une fonction qui se tire de l'équation

$$(A(x) - p_1(x) I)\, f_1(x) = -f_0'(x) \tag{5}$$

du système (1). En multipliant les deux membres de cette équation à gauche par le vecteur-ligne $e_1^*(x)$ et eu égard à l'identité (2) il vient

$$e_1^*(x)\, f_0'(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Donc

$$\alpha(x) = \exp\left\{-\int^{x} e_1^*(t)\, e_1'(t)\, dt\right\}.$$

Trouvons la fonction vectorielle $f_1(x)$. On a $f_1(x) = \alpha_1(x) \times \times e_1(x) + \alpha_2(x)\, e_2(x)$; en portant ceci dans le système (5), on obtient

$$(p_2(x) - p_1(x))\, \alpha_2(x)\, e_2(x) = -f_0'(x).$$

Une multiplication de cette identité à gauche par le vecteur $e_2^*(x)$ nous donne

$$\alpha_2(x) = \frac{\alpha(x)\, e_2^*(x)\, e_1'(x)}{p_1(x) - p_2(x)}.$$

La fonction $\alpha_1(x)$ reste indéterminée ; on la trouve à l'aide de l'équation suivante du système (3).

En poursuivant cette procédure, on obtient tous les termes du développement (2). En posant $S'(x) = p_2(x)$, on trouve de façon analogue la deuxième solution asymptotique formelle.

2. Conditions suffisantes d'existence de la représentation asymptotique des solutions. On dit qu'un point $x_0 \in I$ est un *point de retour* du système (1) si les valeurs propres de la matrice $A(x_0)$ coïncident. Introduisons les conditions:

1) Le système (1) ne possède pas de point de retour, c'est-à-dire que $p_1(x) \neq p_2(x)$ pour $x \in I$.

2) La fonction $\operatorname{Re}(p_1(x) - p_2(x))$ ne change pas de signe pour $x \in I$.

La condition 2) sera discutée dans le § 8. Introduisons les notations

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} e_j^*(t)\, e_j'(t)\, dt\right\}. \tag{6}$$

On rappelle que $e_j(x)$ sont les vecteurs propres, de classe $C^\infty(I)$, de la matrice $A(x)$: $A(x)\, e_j(x) = p_j(x)\, e_j(x)$, et les vecteurs $e_j^*(x)$ les lignes de la matrice $(e_1(x), e_2(x)^-)^1$ (cf. (2)).

Le système (1) possède deux solutions de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda)\, [e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} f_{jk}(x)\, \lambda^{-k} + O(\lambda^{-N})], \quad \lambda \to +\infty, \tag{7}$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, la représentation asymptotique (7) est uniforme en $x \in I$ et la formule (7) peut être dérivée autant de fois qu'on le veut par rapport à x et à λ sans violation de l'uniformité en $x \in I$ de l'estimation du résidu. Les solutions $y_1(x, \lambda)$ et $y_2(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes pour $\lambda \gg 1$.

Exemple. Considérons le système (1) avec la matrice hermitienne

$$A(x)=\begin{bmatrix} a(x) & c(x) \\ \overline{c(x)} & b(x) \end{bmatrix},$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions à valeurs réelles, $c(x)$, une fonction à valeurs complexes. Les valeurs propres de la matrice $A(x)$ sont égales à

$$p_{1,2}(x)=\frac{1}{2}[a(x)+b(x)\pm\sqrt{D(x)}],\quad D=(a-b)^2+4\,|\,c\,|^2,$$

et le système (1) ne possède pas de point de retour si pour $x\in I$ est remplie l'une des conditions:

$$a(x)\neq b(x),\quad c(x)\neq 0.$$

On a (le signe + correspond ici à $j=1$)

$$e_j(x)=\begin{bmatrix} 2c(x) \\ b(x)-a(x)\pm\sqrt{D(x)} \end{bmatrix},\quad e_j^*(x)=\frac{\bar{e}_j^T(x)}{|\,e_j(x)\,|^2},$$

d'où il suit que le système (1) admet une solution de la forme

$$y_1(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{c(x)}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{D(x)}}\exp\left\{\lambda\int_{x_0}^{x}p_1(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{c(t)}{\sqrt{D(t)}}\left(\frac{a(t)-b(t)}{c(t)}\right)'dt\right\}[e_j(x)+O(\lambda^{-1})].$$

En remplaçant $\sqrt{D}$ par $-\sqrt{D}$, on obtient la solution $y_2(x,\lambda)$.

3. Paramètres auxiliaires et λ complexes. Considérons le système

$$y'=\lambda A(x,\mu)\,y. \tag{8}$$

Toutes les propositions énoncées au § 3, n° 1.5, pour l'équation scalaire du second ordre sont valables pour le système (8), pourvu que $\sqrt{q(x,\mu)}$ soit remplacée par $p_1(x,\mu)-p_2(x,\mu)$ dans les conditions 1) et 2).

§ 5. Systèmes d'équations proches de systèmes diagonaux

Considérons le système de n équations

$$y'=(\Lambda(x)+B(x))\,y \tag{1}$$

sur la demi-droite $\mathbf{R}^+$: $x\geqslant 0$, où $\Lambda(x)$ et $B(x)$ sont des matrices carrées d'ordre n, le vecteur y est à n dimensions et la matrice $\Lambda(x)$

une matrice diagonale d'éléments $p_1(x), \ldots, p_n(x)$. On admettra que $\Lambda(x)$ et $B(x)$ sont de classe $C(\mathbf{R}^+)$.

Il est plus commode de formuler les résultats fondamentaux sur la représentation asymptotique des solutions de systèmes de la forme (1) lorsque $x \to \infty$ non pas pour $n = 2$ mais directement pour n arbitraire.

Si $B(x) \equiv 0$, le système (1) est intégrable et admet le système fondamental de solutions

$$\tilde{y}_j(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt\right\} f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

où f_j est un vecteur de composantes δ_{jk}. Il est naturel de supposer que si les éléments de la fonction matricielle $B(x)$ sont petits pour $x \gg 1$, les solutions du système (1) sont voisines des fonctions vectorielles $\tilde{y}_j(x)$. Exhibons les conditions suffisantes correspondantes.

1. Systèmes quasi diagonaux. Le système (1) est dit *quasi diagonal* si

$$\lim_{x\to\infty} \| B(x) \| = 0. \tag{2}$$

Mais cette condition ne suffit encore pas pour que les solutions du système (1) soient voisines des solutions d'un système diagonal. Introduisons la condition:

1) pour un certain j et pour $k \neq j$

$$\operatorname{Re}(p_k(x) - p_j(x)) \geqslant c > 0, \quad x \geqslant a \geqslant 0. \tag{3}$$

Théorème (Perron). *Le système quasi diagonal* (1) *admet une solution* $y_j(x)$ *telle que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_{jk}(x)}{y_{kk}(x)} = 0, \quad j \neq k, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{y'_{jj}(x)}{y_{jj}(x)} - p_k(x)\right) = 0.$$

Cette solution se représente sous la forme

$$y_j(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\,dt\right\} [f_j + u_j(x)], \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} p_j^{(1)}(x) = \lim_{x\to\infty} \| u_j(x) \| = 0.$$

Si $\operatorname{Re}(p_{j+1}(x) - p_j(x)) \geqslant c > 0$ pour tous les j, le système (1) admet une matrice fondamentale $Y(x)$ de la forme

$$Y(x) = [I + U(x)] \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \Lambda(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} \Lambda_1(t)\,dt\right\}, \tag{5}$$

où $\Lambda_1(x)$ est une matrice diagonale et

$$\lim_{x\to\infty} \|\Lambda_1(x)\| = \lim_{x\to\infty} \|U(x)\| = 0. \tag{6}$$

Les formules asymptotiques (4) et (5) sont assez grossières. En effet,

$$y_{jj}(x)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p_k(t)\,dt\right\} = \exp\{o(x)\}, \quad x\to\infty.$$

Le second membre de cette formule peut, par exemple, tendre vers l'infini avec x. Il est impossible de préciser ce résultat sans conditions supplémentaires sur le comportement asymptotique de la fonction matricielle $B(x)$ même pour $n = 1$.

Exhibons des résultats identiques au théorème de Perron. Supposons que la condition

$$\|B(x)\| = o(\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))), \quad x\to\infty \tag{7}$$

est réalisée pour un certain j et tous les $k \neq j$.

Le système (1) admet alors une solution $y_j(x)$ pour laquelle sont valables les estimations

$$\begin{gathered} 0 < c_1\exp\left\{\operatorname{Re} S_j(x_0, x) - (1+\delta)\int_{x_0}^{x} \|B(t)\|\,dt\right\} \leqslant \\ \leqslant \|y_j(x)\| \leqslant c_2\exp\left\{\operatorname{Re} S_j(x_0, x) + (1+\delta)\int_{x_0}^{x} \|B(t)\|\,dt\right\}, \\ S_j(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt, \quad x \geqslant x_0 \gg 1, \end{gathered} \tag{8}$$

où $\delta > 0$ peut être pris arbitrairement petit moyennant un accroissement de x_0, et les constantes c_k, indépendantes de x_0.

De (8) il suit que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \|y_j(x)\|}{\operatorname{Re} S_j(x_0, x)} = 1.$$

Si la condition (7) est réalisée pour tous les j, les solutions $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ forment un système fondamental de solutions.

Soient $\Lambda(x) \equiv \text{const}$, $B(x) \to 0$ pour $x\to\infty$. Les estimations (8) sont alors valables pour tous les $j = 1, \ldots, n$; les valeurs propres de la matrice Λ peuvent être arbitraires. En particulier,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \|y_j(x)\|}{x} = \operatorname{Re}\lambda_j.$$

2. Systèmes L-diagonaux. Le système (1) est dit *L-diagonal* si $\| B(x) \| \in L^1([0, \infty[)$, c'est-à-dire que

$$\int_0^\infty \| B(x) \| \, dx < \infty. \tag{9}$$

Introduisons une condition analogue à la condition 1):

2) pour $x \gg 1$ les différences $\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))$ ne changent pas de signe pour j fixe et pour tous les k.

Théorème (N. Levinson). *Le système L-diagonal (1) admet une solution $y_j(x)$ telle que*

$$y_j(x) = \exp\left\{ \int_{x_0}^x p_j(t)\, dt \right\} [f_j + u_j(x)], \quad \lim_{x \to \infty} \| u_j(x) \| = 0. \tag{10}$$

On rappelle que f_j est un vecteur de composantes δ_{jk}. Si la condition 2) est réalisée pour tous les j, le système (1) admet une matrice fondamentale $Y(x)$ de la forme

$$Y(x) = [I + U(x)] \exp\left\{ \int_{x_0}^x \Lambda(t)\, dt \right\}, \quad \lim_{x \to \infty} \| U(x) \| = 0. \tag{11}$$

La condition 2) sera discutée au § 8.

Le théorème de Levinson admet la précision suivante. On dira que k est de classe $H_1(j)$ si pour $0 \leqslant t \leqslant x < \infty$ on a l'inégalité

$$\operatorname{Re} S_{kj}(t, x) \leqslant c_{kj} < \infty,$$

où

$$S_{kj}(t, x) = \int_t^x [p_k(t) - p_j(t)]\, dt.$$

Par ailleurs, $k \in H_2(j)$ si

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{Re} S_{kj}(0, x) = -\infty.$$

Supposons que chaque $k = 1, \ldots, n$ appartient à l'une des classes $H_1(j)$ ou $H_2(j)$. Le système L-diagonal (1) admet alors une solution $y_j(x)$ de la forme (10). Pour le résidu $u_j(x)$, on a l'estimation

$$\| u_j(x) \| \leqslant C \left[\int_x^\infty \| B(t) \|\, dt \right] + \sum_{k \in H_2(j)} \int_x^\infty | \exp\{S_{kj}(t, x)\} | \, \| B(t) \| \, dt. \tag{12}$$

Si l'on dispose d'une information plus précise sur les fonctions $\| B(x) \|$ et $p_k(t)$, on peut affiner l'estimation (12) en appliquant la méthode de Laplace d'estimation asymptotique des intégrales.

Exemples. 1. Supposons que les valeurs propres $p_1(x), \ldots$ $\ldots, p_n(x)$ sont toutes imaginaires pures. Alors

$$\| U(x) \| \leqslant C \int_x^\infty \| B(t) \| \, dt,$$

où $U(x)$ est la fonction matricielle de (11). En effet, dans ce cas la condition 2) est remplie pour tous les j, et k est de classe $H_1(j)$ pour tous les k et j.

2. Supposons que j est tel que

$$\operatorname{Re} p_j(x) \leqslant \operatorname{Re} p_k(x)$$

pour $x \gg 1$ et pour tous les k. Alors

$$\| u_j(x) \| \leqslant C \int_x^\infty \| B(t) \| \, dt.$$

Certains résultats sur la représentation asymptotique des solutions de systèmes d'équations sont cités dans le chapitre V.

3. Double représentation asymptotique. Considérons le système

$$y' = [\lambda \Lambda(x) + \Lambda_1(x) + \lambda^{-1} B(x, \lambda^{-1})]\, y, \tag{13}$$

où la matrice $\Lambda(x)$ est la même que dans le système (1), $\Lambda_1(x) =$ $= \operatorname{diag}(p_1^{(1)}(x), \ldots, p_n^{(1)}(x))$ et

$$\| B(x, \lambda^{-1}) \| \leqslant C b(x), \qquad \int^\infty b(t)\, dt < \infty \tag{14}$$

pour $x \geqslant x_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$. Dans ce cas, si les fonctions matricielles Λ et Λ_1 sont soumises à certaines conditions, on peut établir des formules asymptotiques pour les solutions qui sont valables aussi bien pour $x \to \infty$ et $\lambda > 0$ fixe, que pour $\lambda \to +\infty$ et x fixe. Plus exactement, supposons que pour un certain j et pour tous les $k \neq j$ sont remplies les conditions

$$\int^\infty | \operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x)) | \, dx = \infty, \tag{15}$$
$$\operatorname{Re}(p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)) = o(\operatorname{Re}(p_j(x) - p_k(x))), \qquad x \to \infty.$$

Le système (13) admet alors une solution de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^x p_j(t)\, dt + \int_{x_0}^x p_j^{(1)}(t)\, dt\right\} [1 + \lambda^{-1} u_j(x, \lambda^{-1})]. \tag{16}$$

Ceci étant, pour tout $\lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 0$, il existe un $x(\lambda_1) < \infty$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_1$, $x \geqslant x(\lambda_1)$ l'on a l'estimation

$$\| u_j(x, \lambda^{-1}) \| \leqslant k_j(x), \quad \lim_{x \to \infty} k_j(x) = 0. \tag{17}$$

Si ces conditions sont satisfaites pour tous les j, le système (13) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x, \lambda) = [I + \lambda^{-1} U(x, \lambda^{-1})] \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} \Lambda(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} \Lambda_1(t)\, dt\right\},$$

$$\| U(x, \lambda^{-1}) \| \leqslant k(x), \quad \lim_{x \to \infty} k(x) = 0.$$

4. Equations scalaires. Considérons l'équation

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} q_k(x)\, y^{(n-k)} = 0 \tag{18}$$

sur la demi-droite $\mathbf{R}^+$, où $q_k(x)$ sont des fonctions à valeurs complexes, $q_k(x) \in C(\mathbf{R}^+)$. Supposons que

$$q_k(x) = a_k + r_k(x), \quad \int^{\infty} | r_k(x) | \, dx < \infty$$

et que $p_1, \ldots, p_n$ sont les racines de l'équation

$$p_n + \sum_{k=1}^{n} a_k p^{n-k} = 0.$$

Le théorème de Levinson nous dit que l'équation (18) admet un système fondamental de la forme

$$y_j^{(k)}(x) = a_j^k e^{p_k x} [1 + o(1)], \quad x \to \infty,$$

où j, $k = 1, \ldots, n$.

Exemple. L'équation de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2m} \psi'' + [V(x) - E] \psi = 0$$

avec les conditions $E > 0$, $V(x) \in L_1(]-\infty, \infty[)$ admet deux systèmes fondamentaux tels que

$$\psi_{1,2}^{+}(x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \to +\infty,$$
$$\psi_{1,2}^{-}(x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \to -\infty,$$

où $k = \sqrt{2mE}/h$.

§ 6. Représentation asymptotique des solutions pour de grandes valeurs de l'argument

1. Approximation WKB. Considérons l'équation

$$y'' - q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

sur la demi-droite $\mathbf{R}^+$, où $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$. On admettra que les conditions 1) et 2) du § 3, n° 1, 2, sont satisfaites pour les grands x, c'est-à-dire que

$$q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\sqrt{q(x)} \geqslant 0, \quad x \gg 1.$$

Introduisons les notations

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\,dt, \quad \alpha_1(x) = \frac{1}{8}\frac{q''(x)}{q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32}\frac{q'^2(x)}{q^{5/2}(x)}, \tag{2}$$

$$\rho(x) = \int_{x}^{\infty} |\alpha_1(t)|\,dt.$$

1.1. *Terme principal de la représentation asymptotique.* Soit $q(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$. Si l'intégrale

$$\int^{\infty} |\alpha_1(t)|\,dt < \infty, \tag{3}$$

l'équation (1) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/4}(x)\exp\{\pm S(x_0, x)\}\,[1 + \varepsilon_{1,2}(x)], \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon_{1,2}(x) = 0. \tag{5}$$

Le résidu $\varepsilon_2(x)$ vérifie la majoration

$$|\varepsilon_2(x)| \leqslant C\rho(x). \tag{6}$$

Toutes les estimations de ce paragraphe sont valables pour $x \gg 1$.

Pour la solution y_2 les formules (4), (5) et (6) découlent directement de l'estimation WKB (11), § 2, pour $b = \infty$.

L'estimation du résidu $\varepsilon_1(x)$ est plus compliquée. On distinguera deux cas.

A. Re $S(]0, +\infty[) < \infty$; dans ce cas $\varepsilon_1(x)$ admet la majoration (6).

B. Re $S(]0, +\infty[) = +\infty$; alors

$$|\varepsilon_1(x)| \leqslant C\left[|\rho(x)| + \int_{x_0}^{x} |e^{2S(t, x)}|\,|\alpha_1(t)|\,dt\right]. \tag{7}$$

1.2. *L'équation* (1) *avec une fonction* $q(x)$ *réelle*. Deux cas sont possibles.

A. Solutions non oscillantes: $q(x) > 0$ pour $x \gg 1$. Alors

$$y_{1,2}(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm S(x_0, x)\}.$$

Si de plus

$$q'(x)\, q^{-3/2}(x) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{8}$$

$$S(0, +\infty) = +\infty, \tag{9}$$

alors pour $x \to \infty$

$$y_1(x) \to \infty, \quad y_2(x) \to 0.$$

Ceci étant, la solution $y_2(x)$ décroît exponentiellement et la solution $y_1(x)$ croît exponentiellement.

La solution $y_2(x)$ *est définie de façon unique par sa représentation asymptotique à l'infini: si une solution* $y(x)$ *est telle que*

$$y(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-S(x_0, x)\}, \quad x \to \infty,$$

alors $y(x) \equiv y_2(x)$.

La solution $y_2(x)$ possède les propriétés suivantes:

$$\lim_{x\to\infty} y_2(x) = 0,$$

$$\int^{\infty} |y_2^p(x)|\, dx < \infty, \qquad \int^{\infty} |q(x)|^r\, |y_2(x)|^p\, dx < \infty, \tag{10}$$

où $p > 0$ et r est quelconque. En effet, des conditions (8), (9) et de la règle de L'Hospital, il suit que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln q(x)}{S(x_0, x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} = 0,$$

ce qui prouve la première des relations (10), puisque

$$\lim_{x\to\infty} \exp\{-S(x_0, x) + m \ln q(x)\} = 0$$

pour tout m. D'autre part, pour $n > 0$ et $x \geqslant x_0 \gg 1$,

$$\int_{x_0}^{x} q^m(t) \exp\{-nS(x_0, t)\}\, dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)} \exp\{-(n + o(1))\, S(x_0, t)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)} \exp\left\{-\frac{n}{2} S(x_0, t)\right\} dt =$$

$$= -\frac{2}{n} \exp\left\{-\frac{n}{2} S(x_0, x)\right\}\Bigg|_{x_0}^{x} \to \text{const}, \quad x \to \infty,$$

ce qui prouve les deux dernières relations (10). Si la solution $y(x)$ satisfait l'une quelconque des relations (10), alors $y(x) = \text{const}\, y_2(x)$.

B. Solutions oscillantes : $q(x) < 0$. Considérons pour la commodité l'équation

$$y'' + q(x)\, y = 0, \tag{11}$$

et supposons que $q(x) > 0$ pour $x \gg 1$. Cette équation admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm iS(x_0, x)\}[1 + \varepsilon_{1,2}(x)].$$

Ceci étant, la majoration (6) est valable aussi bien pour $\varepsilon_1(x)$ que pour $\varepsilon_2(x)$.

Les deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont définies de façon unique par leurs représentations asymptotiques pour $x \to \infty$. Si la condition (8) est satisfaite, ces solutions sont définies de façon unique par des conditions aux limites de type *conditions de rayonnement de Sommerfeld* :

$$\lim_{x\to\infty} (y'/y \mp i\sqrt{q(x)}) = 0.$$

Si l'intégrale $\int^{\infty} q^{-1/2}(x)\, dx$ converge (resp. diverge), toutes les solutions de l'équation (11) appartiennent (resp. n'appartiennent pas) à l'espace $L_2([0, \infty[)$.

1.3. *Analyse de la condition* (3). Si $q(x) = x^{\alpha}$, la condition (3) est satisfaite pour $\alpha > -2$. Pour α entier, ceci exprime que $x = \infty$ est un point singulier irrégulier de l'équation (1) (chap. I, § 2).

Indiquons quelques classes de fonctions pour lesquelles sont valables les conditions 1), 2), (3) et (8).

1. $q(x) = ax^{\alpha}$, $\alpha > -2$, $a \neq 0$.
2. $q(x) = a(\lg x)^{\alpha}$, $-\infty < \alpha < \infty$, $a \neq 0$.
3. $q(x) = a \exp\{bx^{\alpha}\}$, $\alpha > 0$, $b > 0$, $a \neq 0$.

Donc, lorsque $x \to \infty$ la fonction $q(x)$ peut croître à n'importe quelle vitesse et peut même décroître mais pas moins vite que x^{-2}. La condition (3) traduit une certaine régularité dans le comportement de $q(x)$ lorsque $x \to \infty$.

Si lorsque $x \to \infty$ la fonction $q(x)$ se conduit comme dans les cas 1, 2 et 3 (par exemple $q(x) \sim ax^{\alpha}$) et cette représentation asymptotique peut être dérivée deux fois, toutes les conditions énumérées ci-dessus sont satisfaites.

Les formules asymptotiques (4) sont valables dans le cas aussi où la fonction $q(x)$ présente un point singulier fini en x_0, $x \to x_0$.

Supposons que $I = [x_0, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, $q(x) \in C^2(I)$, que les conditions 1) et 2) sont satisfaites pour $x \in I$ et que

$$\int^{x_0} |\alpha_1(x)|\, dx < \infty. \tag{3'}$$

Dans ces conditions les formules (4), où $\varepsilon_j(x) \to 0$, $x \to x_0$, sont valables.

Si $q(x) = a(x - x_0)^{\alpha}$, $a \neq 0$, la condition (3') est satisfaite pour $\alpha < -2$ et pas pour $\alpha \geqslant -2$. A noter que pour $\alpha = 2$ le point x_0 est un point singulier régulier de l'équation (1). Dans ce cas la représentation asymptotique des solutions est d'une forme différente.

Supposons que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \quad 4\gamma, \qquad \int^{\infty} \left| d\left(\frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)}\right)\right| < \infty, \quad \gamma \neq \pm 1,$$

et que pour $x \gg 1$ *les fonctions*

$$\exp\{\pm i\tilde{S}(x)\}, \quad \tilde{S}(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\ \sqrt{1 - \frac{q'^2(t)}{16q^3(t)}}\, dt$$

sont bornées. Alors l'équation (11) *admet un système fondamental tel que*

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &\sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm i\tilde{S}(x)\}, \\ y'_{1,2}(x) &\sim (-\gamma \pm i\sqrt{1-\gamma^2})\sqrt[4]{q(x)} \exp\{\pm i\tilde{S}(x)\} \end{aligned} \tag{12}$$

lorsque $x \to \infty$.

Ces formules sont en particulier valables si

$$q(x) \sim ax^{-2}, \quad x \to \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1/4,$$

et si cette représentation asymptotique est dérivable. Les formules (12) peuvent être mises sous la forme

$$y_{1,2}(x) = x^{-1 \pm i\sqrt{a - 1/4} + o(1)}, \quad x \to \infty.$$

1.4. *Dérivation de la représentation asymptotique.* Supposons remplies les conditions du n° 1.1 et la condition (8). Les formules asymptotiques (4) peuvent alors être dérivées deux fois, c'est-à-dire que

$$y_{1,2}^{(j)}(x) \sim (\pm\sqrt{q(x)})^j q^{-1/4}(x) \exp\{\pm iS(x_0, x)\}, \quad x \to \infty, \quad j = 1, 2.$$

1.5. *Termes suivants du développement asymptotique.* La comparaison des formules (4), § 5, et (7), § 3, montre que le terme principal de la représentation asymptotique des solutions de l'équation $y'' - \lambda^2 q(x)\, y = 0$ est de la même forme aussi bien pour x fini et $\lambda \to +\infty$ que pour $\lambda = 1$ et $x \to +\infty$. Ceci est valable également pour

les termes suivants du développement asymptotique: la représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) est de la forme (5), § 3, où $\lambda = 1$, sous des conditions de type régularité du comportement de la fonction $q(x)$ et de ses dérivées lorsque $x \to \infty$. Grossièrement parlant, cette condition exprime que la suite $\{\alpha_j(x)\}$ doit être asymptotique pour $x \to \infty$ (les fonctions $\alpha_j(x)$ figurent dans le § 3, (4)).

Exemple. Supposons que $q(x) = x^\alpha \varphi(x)$, où $\alpha > -2$, $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^{-n}$ et que cette série converge pour $x \geqslant x_0 > 0$. Alors, pour $x \to \infty$

$$\alpha_j(x) \sim c_j x^{\beta_j}, \quad \beta_j = \alpha/2 - (\alpha/2 + 1)(j+1),$$

où c_j sont des constantes, de sorte que la suite $\{\alpha_j(x)\}$ est asymptotique. Ceci est vrai aussi de chacune des fonctions $q(x)$ examinées au n° 1.3.

Introduisons les fonctions $a_N^{\pm}(x) = \sum_{j=1}^{N} (\pm 1)^j \alpha_j(x)$ et faisons la transformation

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_N^+ & a_N^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Pour $N = 0$ cette transformation est confondue avec celles introduites au § 1, n° 4. L'équation (1) se ramène alors au système

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{a_N^+ - a_N^-} \begin{bmatrix} q - a_N^+ a_N^- + a_N^{+\prime} & q - a_N^{-2} - a_N^{-\prime} \\ -q + a_N^{+2} + a_N^{+\prime} & -q + a_N^+ a_N^- + a_N^{-\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Ce système sera L-diagonal (§ 5) sous réserve que convergent les intégrales $\rho_N^{\pm}(x_0, \infty)$, où

$$\rho_N^{\pm}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} |\, q - a_N^{\pm 2} - a_N^{\pm\prime} \,|\, |\, a_N^+ - a_N^- \,|^{-1}\, dt. \tag{13}$$

Dans ce cas, l'équation (1) admet deux solutions de la forme

$$y_{1,2}(x) = q^{-1/4}(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \pm \sqrt{q(t)}\, dt + \sum_{j=1}^{N} (\pm 1)^j \int_{x_0}^{x} \alpha_j(t)\, dt \right\} [1 + \varepsilon_{1,2}(x)], \tag{14}$$

où $\varepsilon_{1,2}(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$. On a l'estimation

$$|\varepsilon_2(x)| \leqslant C\rho_{\bar{N}}(x, \infty). \tag{15}$$

Si $q(x)$ est de la même forme que dans l'exemple cité, alors

$$\varepsilon_j(x) = O(x^{-\delta_N}), \quad \delta_N = (\alpha/2+1)(N+1)$$

lorsque $x \to \infty$, $j = 1, 2$.

2. Compléments. Toutes les formules asymptotiques des solutions pour $x \to \infty$ exhibées dans ce paragraphe s'appuient en fait sur le théorème de Levinson relatif à la représentation asymptotique des solutions de systèmes L-diagonaux (§ 4, n° 2). Citons quelques résultats plus fins. Considérons les équations

$$y'' + (1+\alpha(x))\, y = 0, \tag{16}$$

$$y'' - (1+\alpha(x))\, y = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0. \tag{18}$$

Supposons remplie la condition

$$\int^{\infty} |\alpha(t)|^n\, dt < \infty, \tag{19}$$

où $n \geqslant 1$ est un entier. Pour $n = 1$ la représentation asymptotique des solutions est donnée dans e § 5. Traitons le cas $n > 1$.

A. $n = 2$. L'équation (17) admet le système fondamental de solutions

$$y_{1,2}(x) \sim \exp\left\{\pm i\left(x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\, dt\right)\right\}, \quad x \to \infty. \tag{20}$$

Exemple. L'équation

$$y'' - (1 + x^{-\alpha}\sin x)\, y = 0, \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1,$$

satisfait la condition (19) pour $n = 2$. La représentation asymptotique des solutions pour $x \to \infty$ est de la forme

$$y_{1,2}(x) = \exp\{\pm (x - x^{-\alpha}\cos x)\}\,[1 + o(1)].$$

Remarquons que formellement on peut déduire la formule (20) de la formule (4):

$$\sqrt{1+\alpha(x)} = 1 + \frac{1}{2}\alpha(x) + O(\alpha^2(x)), \quad x \to \infty,$$

de sorte que

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+\alpha(t)}\,dt = x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt + \int_{x_0}^{\infty} O(\alpha^2(t))\,dt + \\ + \int_{x}^{\infty} O(\alpha^2(t))\,dt + C = x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt + C' + o(1).$$

B. $n = 3$. L'équation (17) admet un système fondamental de la forme

$$y_{1,2}(x) \sim \exp\left\{\pm\left(x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\int_{x_0}^{t} \alpha(\tau)\,e^{2(\tau-t)}\,d\tau\,dt\right)\right\}, \\ x \to \infty.$$

Ces formules ne peuvent être simplifiées.

Des formules analogues sont valables pour tout $n > 1$, mais elles deviennent plus volumineuses lorsque n croît [2].

La situation est plus complexe pour l'équation (16). Citons des résultats de [75]. Supposons que la fonction $\alpha(x)$ est continue et réelle pour $x \geqslant x_0$. Introduisons les notations

$$\beta_1(x) = \int_{x}^{\infty} \alpha(t)\cos 2t\,dt, \quad \beta_2(x) = \int_{x}^{\infty} \alpha(t)\sin 2t\,dt.$$

C. Supposons que les intégrales $\beta_1(x)$ et $\beta_2(x)$ convergent pour $x \geqslant x_0$ et $\alpha\alpha_i \in L_1$ $(x \geqslant x_0)$, $i = 1, 2$. L'équation (16) admet alors un système fondamental de solutions de la forme $(x \to +\infty)$:

$$y_1(x) = \cos(x + \sigma(x)) + o(1), \quad y_2(x) = \sin(x + \sigma(x)) + o(1), \\ y_1'(x) = -y_1(x) + o(1), \quad y_2'(x) = y_2(x) + o(1), \\ \sigma(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt.$$

Ce cas est dit non résonnant. Posons

$$\beta_3(x) = \int_{x}^{\infty} \alpha(t)\,dt.$$

D. Supposons que les intégrales β_1 et β_3 convergent pour $x \geqslant x_0$, que $\alpha g_i \in L_1$ $(x \geqslant x_0)$, $i = 1, 3$, et que les conditions

$$\lim_{x\to\infty}.\sup \int_{x_0}^{x} \alpha(t) \sin 2t = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}.\inf \int_{x_0}^{x} \alpha(t) \sin 2t = -\infty$$

ne sont pas simultanément satisfaites. L'équation (16) admet alors un système fondamental de la forme $(x \to +\infty)$

$$y_1(x) = \rho(x)[\cos x + o(1)], \qquad y_2(x) = (\rho(x))^{-1}[\sin x + o(1)],$$
$$y_1'(x) = \rho(x)[-\sin x + o(1)], \quad y_2'(x) = (\rho(x))^{-1}[\cos x + o(1)],$$
$$\rho(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \alpha(t) \sin 2t\, dt\right\}.$$

E. Posons

$$\tilde{\alpha}_1(x) = \int_{x}^{\infty} \alpha(t)\beta_1(t)\, dt, \quad \tilde{\alpha}_2(x) = \int_{x}^{\infty} \alpha(t)\beta_2(t)\, dt.$$

Si les intégrales β_1, β_2, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ convergent pour $x \geqslant x_0$, $\alpha g_i g_j \in L_1$ $(x \geqslant x_0)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ et $\alpha\tilde{\alpha}_i \in L_1$ $(x \geqslant x_0)$, $i = 1, 2$, alors l'équation (16) admet un système fondamental de la forme

$$y_1(x) = \rho(x)[\cos(x + \sigma(x)) + o(1)],$$
$$y_2(x) = \rho(x)[\sin(x + \sigma(x)) + o(1)],$$
$$y_1'(x) = \rho(x)[-\sin(x + \sigma(x)) + o(1)],$$
$$y_2'(x) = \rho(x)[\cos(x + \sigma(x)) + o(1)],$$

où

$$\rho(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t) \int_{t}^{\infty} \alpha(\tau) \cos 2(t-\tau)\, dt\, d\tau\right\},$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\, dt + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} \alpha(t) \int_{t}^{\infty} \alpha(\tau) \sin 2(t-\tau)\, dt\, d\tau.$$

Exemples. 1. L'équation

$$y'' + [1 + (a + \sin \lambda x)\, x^{-1}] = 0, \quad \lambda \neq \pm 2,$$

admet un système fondamental tel que pour $x \to \infty$

$$y_1(x) = \cos(x + a \ln x) + o(1), \quad y_2(x) = \sin(x + a \ln x + o(1)).$$

2. Si $\alpha(x) = x^{-1} \sin 2x + x^{-3/4} \sin x$, ce sont les conditions du n° D qui sont satisfaites.

3. Si $\alpha(x) = x^{-1/2} \sin \lambda x$, $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, ce sont les conditions du n° E. En particulier, l'équation

$$y'' + [1 + x^{-1/2} \sin \lambda x] = 0, \quad \lambda \neq \pm 1, \pm 2,$$

admet un système fondamental tel que pour $x \to \infty$

$$y_1(x) = \cos(x + \alpha \ln x) + o(1), \quad y_2(x) = \sin(x + \alpha \ln x) + o(1),$$
$$\alpha = [4(\lambda^2 - 4)]^{-1}.$$

§ 7. Représentations asymptotiques doubles

1. Représentation asymptotique WKB. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0 \tag{1}$$

sur la demi-droite $\mathbf{R}^+$, où $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$. Supposons que sont simultanément remplies les conditions du § 3, n° 1.2, et du § 6, n° 1.2, c'est-à-dire que

$$q(x) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad \int^\infty |\alpha_1(x)|\, dx < \infty. \tag{2}$$

Montrons qu'il est alors possible d'établir des formules asymptotiques pour les solutions de l'équation (1) qui sont valables simultanément pour $\lambda \to +\infty$ à x fixe et pour $x \to \infty$ à $\lambda > 0$ fixe. Introduisons les notations classiques

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt, \quad \rho(x) = \int_x^\infty |\alpha_1(t)|\, dt, \tag{3}$$

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_0, x)\},$$

où le signe plus (resp. moins) correspond à $j = 1$ (resp. $j = 2$). On admettra également que

$$\lim_{x \to \infty} q'(x)/q^{3/2}(x) = 0. \tag{4}$$

1.1. *Solution décroissante.* Supposons que $\operatorname{Re} S(0, \infty) = +\infty$; pour $\lambda > 0$ fixe, l'équation (1) admet alors une solution y_2 unique

à un facteur multiplicatif près, telle que $y_2(+\infty) = 0$ (§ 6, n° 1.1). Normons cette solution à l'aide de la condition

$$y_2(x, \lambda) \sim \tilde{y}_2(x, \lambda), \quad x \to \infty,$$

qui définit une seule solution pour tout $\lambda > 0$. En appliquant l'approximation WKB (11), § 2, pour $b = \infty$, on obtient

$$\left| \frac{y_2(x, \lambda)}{\tilde{y}_2(x, \lambda)} - 1 \right| \leqslant 2\left(e^{2\rho(x)/\lambda} - 1\right). \tag{5}$$

Cette majoration est valable pour $x \geqslant 0$ et $\lambda > 0$. Comme $\rho(0) < \infty$, $\rho(\infty) = 0$, le second membre de l'inégalité (5) tend vers 0 si

a) $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \geqslant 0$;

b) $x \to \infty$ uniformément en $\lambda \in [\lambda_0, \infty[$, où $\lambda_0 > 0$ est fixe.

La représentation asymptotique $y_2 \sim \tilde{y}_2$ est donc double. Fixons $\lambda_0 > 0$; de (5) on déduit alors que

$$y_2(x, \lambda) = \tilde{y}_2(x, \lambda)\left[1 + \frac{1}{\lambda}\varphi_2(x, \lambda)\right], \tag{6}$$

où pour $x \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant \lambda_0$, on a la majoration

$$|\varphi_2(x, \lambda)| \leqslant C \int_x^\infty |\alpha_1(t)|\, dt. \tag{7}$$

Si les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors $|y_1| \to \infty$ lorsque $x \to \infty$. La solution qui croît à l'infini ne présente généralement pas d'intérêt, car elle n'admet aucune signification physique.

1.2. *Solutions oscillantes.* Supposons que $\operatorname{Re} S(0, \infty) < \infty$; cette condition est notamment satisfaite si $q(x) < 0$ pour $x \gg 1$. L'équation (1) admet alors deux solutions qui sont oscillantes pour $x \gg 1$ et définies de façon unique par les conditions aux limites à l'infini:

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \lambda), \quad x \to \infty, \quad j = 1, 2.$$

Dans ce cas, la représentation (6) et l'estimation (7) sont valables pour $j = 1, 2$.

1.3. *Approximations supérieures.* Supposons que la fonction $q(x)$ satisfait les conditions (2), (4) et les conditions du § 6, n° 5. Alors

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda) \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} (\pm\lambda)^{-k} \int_{x_0}^{x} \alpha_k(t)\, dt\right\} [1 + \\ + \lambda^{-N-1}\varphi_{jN}(x, \lambda)],$$

$$|\varphi_{jN}(x, \lambda)| \leqslant C \tag{8}$$

pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $x \geqslant 0$. Ces formules sont valables pour la solution y_2 dans les conditions du n° 1.1 et pour les solutions y_1 et y_2, dans les conditions du n° 1.2.

2. Pôle du second ordre. Supposons que

$$q(x) = x^{-2} p(x), \tag{9}$$

où $p(0) \neq 0$, $p(x) \in C^\infty$ pour $x \geqslant 0$ petits. Alors

$$\alpha_1(x) \sim \frac{1}{8\sqrt{p(0)}\, x}, \quad x \to +0, \tag{10}$$

et l'intégrale $\int^0 |\alpha_1(x)|\, dx$ diverge. L'approximation WKB

$$y_{1,2}(x) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm S(x_0, x)\}, \quad x \to +0,$$

n'est pas valable dans ce cas.

Exemple. Soit $p(x) \equiv a$. Alors (1) est une équation d'Euler dont les solutions sont

$$y_j = x^{\alpha_j}, \quad \alpha_j = \frac{1}{2}\left(1 \pm \lambda \sqrt{a + \frac{1}{4\lambda^2}}\right), \quad j = 1, 2,$$

alors que l'approximation WKB est égale à

$$\tilde{y}_j \sim x^{\beta_j}, \quad x \to 0, \quad \beta_j = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda \sqrt{a}).$$

Les exposants α_j, β_j ne sont pas confondus, mais pour $\lambda \gg 1$ ils diffèrent d'une quantité de l'ordre de λ^{-1}.

Mais l'approximation WKB convient si l'on introduit à la place de λ le paramètre

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4p(0)}}. \tag{11}$$

Faisons la même transformation qu'au n° 4, § 1:

$$y = u_1 + u_2, \quad y' = \left(\mu \sqrt{q} - \frac{q'}{4q}\right) u_1 - \left(\mu \sqrt{q} + \frac{q'}{4q}\right) u_2. \tag{12}$$

L'équation (1) se ramène alors au système

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \left[\mu \sqrt{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{q'}{4q} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{\alpha}_1(x)}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\tilde{\alpha}_1(x) = \alpha_1(x) - \frac{1}{8\sqrt{p(0)}\, x}.$$

En vertu de (10), la fonction $\tilde{\alpha}_1(x)$ est de classe C^∞ pour les $x \geqslant 0$ petits, de sorte que le système (13) est justiciable des résultats du § 4.

Si λ est fixe et $4\lambda^2 p(0) \neq -1$, l'équation (1) admet des solutions y_1 et y_2 telles que

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \lambda), \quad x \to 0. \tag{14}$$

Remarquons que les fonctions $\tilde{y}_j(x, \mu)$ sont les solutions exactes de l'équation (1) si $q(x) = (ax^2 + bx + c)^{-2}$.

Passons maintenant aux représentations asymptotiques doubles. De (14) il suit que

$$y_{1,2}(x, \lambda) \sim x^{1/2 \pm \mu \sqrt{p(0)}}, \quad x \to +0. \tag{15}$$

Les cas suivants sont à distinguer.

A. $p(0) \notin]-\infty, 0]$. Choisissons la détermination de la racine pour laquelle $\operatorname{Re} \sqrt{p(0)} > 0$ et supposons que $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$. Alors $y_1 \to \infty$ et $y_2 \to 0$ pour $x \to +0$ et par suite il existe une solution y_2 unique à un facteur multiplicatif près telle que $y_2(+0) = 0$. Normons-la à l'aide de la condition

$$y_2(x, \lambda) \sim \tilde{y}_2(x, \mu), \quad x \to +0. \tag{16}$$

Une telle solution est unique. Cette solution est justiciable des formules (6), (7) et (8) dans lesquelles il convient de remplacer λ par μ et α_j par $\tilde{\alpha}_j$. La fonction $\tilde{\alpha}_1(x)$ est de la forme (13) et les fonctions $\tilde{\alpha}_j(x)$, $j > 1$, satisfont les mêmes relations récurrentielles que les fonctions $\alpha_j(x)$.

B. $p(0) < 0$. Dans ce cas $\sqrt{p(0)}$ est un nombre imaginaire pur, de sorte que $|y_{1,2}| \sim \sqrt{x}$ lorsque $x \to +0$. La condition

$$y_j(x, \lambda) \sim \tilde{y}_j(x, \mu), \quad x \to +0,$$

définit de façon unique les solutions y_1 et y_2 pour lesquelles sont valables les formules (6), (7) et (8) dans lesquelles il faut remplacer λ par μ et α_j par $\tilde{\alpha}_j$.

3. Equation de Sturm-Liouville. Considérons l'équation

$$y'' - (q(x) - \lambda) y = 0 \tag{17}$$

sur la demi-droite $\mathbf{R}^+$, où $\lambda > 0$ est un paramètre. Supposons que la fonction $q(x)$ est réelle, de classe $C^2(\mathbf{R}^+)$ et telle que $q'(x) > 0$ pour $x \gg 1$ et $q(+\infty) = +\infty$. Pour $\lambda \gg 1$ l'équation (17) admet un seul point de retour $x_0(\lambda) = q^{-1}(\lambda)$, $x_0(+\infty) = +\infty$. Exhibons des formules asymptotiques des solutions, valables en dehors d'un voisinage $U(\lambda)$ du point de retour; les dimensions de $U(\lambda)$ dépen-

dent de la vitesse de croissance de la fonction $q(x)$ lorsque $x \to \infty$. Introduisons les notations

$$\tilde{y}_{1,2}(x, \lambda) = (\lambda - q(x))^{-1/4} \exp\left\{\pm i \int_{x_0(\lambda)}^{x} \sqrt{\lambda - q(t)}\, dt\right\}, \quad x < x_0(\lambda),$$

$$\tilde{y}_0(x, \lambda) = (q(x) - \lambda)^{-1/4} \exp\left\{- \int_{x_0(\lambda)}^{x} \sqrt{q(t) - \lambda}\, dt\right\}, \quad x > x_0(\lambda). \tag{18}$$

Toutes les racines sont arithmétiques dans cette formule. Plus bas on admettra partout que $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$.

3.1. *Les fonctions $q(x)$ sont des fonctions puissances.* Supposons que

$$q(x) \sim ax^{\alpha}, \quad x \to \infty, \quad a > 0, \quad \alpha > 0,$$

et que cette représentation asymptotique est deux fois dérivable. Dans ce cas $x_0(\lambda) \sim (\lambda/a)^{1/\alpha}$. Posons

$$k(\lambda) = \lambda^{-(1+2\alpha)/3} N(\lambda), \quad x_{\pm}(\lambda) = \left[\frac{\lambda}{a}(1 \pm k(\lambda))\right]^{1/\alpha},$$

où $N(\lambda)$ est une fonction strictement positive telle que $N(+\infty) = +\infty$. L'équation (17) admet des solutions $y_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, telles que pour $0 \leqslant x \leqslant x_-(\lambda)$ l'on a les estimations

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda)[1 + \varepsilon_j(x, \lambda)], \quad |\varepsilon_j(x, \lambda)| \leqslant CN^{-3/2}(\lambda). \tag{19}$$

Ces deux solutions sont rapidement oscillantes pour $\lambda \gg 1$; on peut les choisir conjuguées complexes. Si $0 \leqslant x \leqslant k_0(\lambda/a)^{1/\alpha}$, où k_0 est une constante, $0 < k_0 < 1$, on déduit de (19) la majoration

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leqslant C\lambda^{-1/\alpha - 1/2}.$$

L'équation (17) admet une solution $y_0(x, \lambda)$ de la forme (18) telle que pour $x_+(\lambda) \leqslant x < \infty$ l'on a la majoration

$$y_0(x, \lambda) = \tilde{y}_0(x, \lambda)[1 + \varepsilon_0(x, \lambda)];$$

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leqslant C\lambda^{-1/2-1/\alpha}\left[\left(\frac{ax^{\alpha}}{\lambda} - 1\right)^{-1/2} + \left(\frac{ax^{\alpha}}{\lambda}\right)^{-1/\alpha - 1/2}\right].$$

Le second membre atteint son maximum pour $x = x_+(\lambda)$, de sorte que

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leqslant C[N^{-3/2}(\lambda) + \lambda^{-1/\alpha - 1/2}].$$

Donc la représentation asymptotique $y_0(x, \lambda) \sim \tilde{y}_0(x, \lambda)$ est double : le résidu $\varepsilon_0(x, \lambda) \to 0$ pour $x \to \infty$ à λ fixe et pour $\lambda \to +\infty$. La solution y_0 décroît lorsque $x \to \infty$ et $y_0(+\infty, \lambda) = 0$. La deu-

xième solution linéairement indépendante croît exponentiellement lorsque $x \to \infty$. Les formules asymptotiques citées peuvent être dérivées par rapport à x et λ un nombre arbitraire de fois sans violation de l'uniformité de l'estimation du résidu.

3.2. *Les fonctions $q(x)$ sont à croissance rapide.* On dit qu'une fonction $l(x)$ strictement positive pour $x \geqslant 0$ est *lentement croissante* si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xl'(x)}{l(x)} = 0.$$

Pour une telle fonction

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{l(kx)}{l(x)} = 1 \tag{20}$$

uniformément en x compris dans un intervalle fini quelconque. La fonction $1/l(x)$ est aussi lentement croissante. Comme exemples de fonctions lentement croissantes citons: $(\ln x)^{\alpha}$, $-\infty < \alpha < \infty$; $(\ln x)^{\alpha} (\ln \ln x)^{\beta}$, $-\infty < \alpha$, $\beta < \infty$; $\exp \{(\ln x)^{\alpha}\}$, $\alpha < 1$.

Posons la condition: les fonctions $q'(q^{-1}(x))/x$, $q''(q^{-1}(x))/x$ sont lentement croissantes et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{q''(x)}{q'(x)\sqrt{q(x)}} = 0.$$

Ces conditions sont satisfaites, par exemple, pour les fonctions $q(x)$ de la forme $Ae^{Bx^{\alpha}}$, A, B, $\alpha > 0$; $P(x)\, e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, $Q(+\infty) = +\infty$.

On voit sur les estimations WKB (§ 2) que les résidus de la formule (19) sont $\leqslant C(I_1 + I_2)$, où

$$I_1 = \left| \int_a^x \frac{q'^2(t)}{|q(t)-\lambda|^{5/2}}\, dt \right|, \quad I_2 = \left| \int_a^x \frac{|q''(t)|}{|q(t)-\lambda|^{3/2}}\, dt \right|.$$

Ici $a = 0$ pour $j = 1, 2$ et $a = \infty$ pour $j = 0$.

Estimons I_1 pour $a = \infty$. En effectuant le changement $t = q(x)/\lambda$, $x = \varphi(\lambda t)$ et en se servant de (20), on obtient

$$I_1 = \lambda^{-3/2} \int_{q(x)/\lambda}^{\infty} \frac{\lambda t q'(\varphi(\lambda t))}{\lambda t (t-1)^{5/2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C\lambda^{-3/2} q'(q^{-1}(\lambda)) \int_{q(x)/\lambda}^{\infty} \frac{t}{(t-1)^{5/2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C'\lambda^{-3/2} q'(q^{-1}(\lambda)) \left[\left(\frac{q(x)}{\lambda} - 1 \right)^{-3/2} + \left(\frac{q(x)}{\lambda} \right)^{-1/2} \right].$$

On estime I_2 de façon analogue.

Soient $N(\lambda)$ une fonction strictement positive, $N(+\infty) = +\infty$,

$$a_1(\lambda) = \lambda^{-1}[q'(q^{-1}(\lambda))]^{2/3}, \quad a_2(\lambda) = \lambda^{-1}\left[\frac{q''(q^{-1}(\lambda))}{q'(q^{-1}(\lambda))}\right]^2.$$

Des conditions imposées à $q(x)$, il suit que $a_j(+\infty) = 0$. Posons $k_j(\lambda) = N(\lambda)\, a_j(\lambda)$, $k_-(\lambda) = \max(k_1(\lambda), k_2(\lambda))$ et supposons que $x_-(\lambda)$ est un point tel que $1 - \lambda^{-1}q(x_-(\lambda)) = k(\lambda)$. L'équation (17) admet des solutions y_1 et y_2 de la forme (19) telles que pour $0 \leqslant x \leqslant x_-(\lambda)$ soient valables les majorations

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leqslant CN^{-3/2}(\lambda).$$

Si $\tilde{x}_-(\lambda)$ est un point tel que

$$\lambda^{-1}q(\tilde{x}_-(\lambda)) - 1 = k_0, \quad 0 < k_0 < 1,$$

on a la majoration

$$|\varepsilon_{1,2}(x, \lambda)| \leqslant C(a_1^{3/2}(\lambda) + a_2^{1/2}(\lambda_1))$$

pour $0 \leqslant x \leqslant \tilde{x}_-(\lambda)$.

Soit $x_+(\lambda)$ un point tel que $\lambda^{-1}q(x_+(\lambda)) - 1 = k(\lambda)$. L'équation (17) admet une solution y_0 de la forme (19) telle que pour $x_+(\lambda) \leqslant x < \infty$ l'on a la majoration

$$|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leqslant Ca_1^{3/2}(\lambda)\left[\left(\frac{q(x)}{\lambda} - 1\right)^{-3/2} + \left(\frac{q(x)}{\lambda}\right)^{-1/2}\right] + \\ + Ca_2^{1/2}(\lambda)\left(\frac{q(x)}{\lambda} - 1\right)^{-1/2}.$$

En particulier, $|\varepsilon_0(x, \lambda)| \leqslant C'N^{-3/2}(\lambda)$ et $y_0(+\infty, \lambda) = 0$. La représentation asymptotique $y_0(x, \lambda) \sim \tilde{y}_0(x, \lambda)$ est double comme au n° 3.1. Si $q(x) = A \exp\{Bx^\alpha\}$, où A, B et $\alpha > 0$, alors

$$a_1^{3/2}(\lambda) \sim C_0 b_1^{1/2}(\lambda) \sim C_1\lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{1-1/\alpha}, \quad \lambda \to +\infty.$$

§ 8. Contre-exemples

1. Exemple de Perron. Considérons le système

$$y_1' = -ay_1, \quad y_2' = (\sin \ln x + \cos \ln x - 2a)\, y_1 + be^{-ax} y_2, \qquad (1)$$

où a, b sont des constantes, $0 < a < \sqrt{2}$. Pour $b = 0$ ce système est intégrable et admet les solutions

$$y_1^0(x) = e^{-ax}, \quad y_2^0(x) = \exp\{x \sin \ln x - 2ax\}.$$

Pour $b \neq 0$ ses solutions sont de la forme

$$y_1(x) = c_1 y_1^0(x), \quad y_2(x) = y_2^0(x)\left(c_2 + bc_1 \int_0^x \exp\{-t \sin \ln t\}\, dt\right).$$

Le système (1) s'écrit

$$y' = \Lambda(x)\, y + B(x)\, y, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ be^{-ax} & 0 \end{bmatrix},$$

où $\Lambda(x)$ est une matrice diagonale. Il est évident que

$$\|B(x)\| \to 0, \ x \to \infty; \quad \int^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty .$$

Mais la condition 2) du § 3 n'est pas réalisée, puisque la fonction

$$\mathrm{Re}\,(p_2(x) - p_1(x)) = \sin \ln x + \cos \ln x - a$$

admet une infinité de zéros sur le demi-axe $x \geqslant 0$. Posons $c_1 = c_2 = 1$; alors

$$\frac{y_1(x)}{y_1^0(x)} = 1, \quad \frac{y_2(x)}{y_2^0(x)} = 1 + b \int_0^x \exp\{-t \sin \ln t\}\, dt.$$

D'où il suit que $\lim\limits_{x \to +\infty} y_2(x)/y_2^0(x) = \infty$.

2. Systèmes à paramètre. Considérons le système de deux équations

$$y' = \lambda A(x)\, y$$

sur l'intervalle $I = [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Soient $p_1(x)$ et $p_2(x)$ les valeurs propres de la matrice $A(x)$. Au § 4, n° 2, nous avons exhibé les formules asymptotiques des solutions du système sous les conditions suivantes:

1) $p_1(x) \neq p_2(x)$, $x \in I$;
2) $\mathrm{Re}\,(p_1(x) - p_2(x))$ ne change pas de signe pour $x \in I$.

Si la condition 1) est seule remplie, le système n'en possède pas moins deux solutions asymptotiques formelles de la forme (7), § 4. Mais si la condition 2) n'est pas satisfaite, le système peut ne pas admettre de solutions exactes ayant une telle représentation asymptotique. Citons des exemples.

Exemples. 1. Considérons le système

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x + i)\, y_2 + \lambda a(x)\, y \tag{2}$$

sur l'intervalle I, où $a(x) \in C^2(I)$. Ici $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = x + i$, de sorte que le système ne possède pas de point de retour. Mais la condition 2) n'est pas satisfaite: la fonction $\mathrm{Re}\,(p_2(x) - p_1(x)) = x$ change de signe sur l'intervalle I.

Un système fondamental de solutions de (2) est de la forme

$$y_1(x)=1+O(\lambda^{-1}),\quad y_2(x)=b(x)+O(\lambda^{-1}), \tag{3}$$

où $b(x) = a(x)(x+i)^{-1}$. Supposons que le système (2) admet une solution (y_1, y_2) pour laquelle est valable la formule asymptotique (3) lorsque $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \in I$. La fonction $a(x)$ se prolonge analytiquement à un demi-voisinage complexe du point $x = 0$ de la forme $|x| \leqslant \rho$, $\operatorname{Im} x \geqslant 0$, $\rho > 0$.

La solution générale du système (2) est de la forme

$$y_1=c_1,\quad y_2=e^{\lambda S(x)}\left[c_2+c_1\int_{-\delta}^{x} e^{-\lambda S(t)}a(t)\,dt\right],\quad S(x)=x^2/2+ix.$$

En comparant à (3), on trouve que $c_1 = O(\lambda^{-1})$. Dans l'identité $y_2 = y_2^0$, posons $x = -\delta$, $x = \delta$ et soustrayons la première relation de la seconde ; on obtient alors

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda S(t)}a(t)\,dt=O(\lambda^{-1}e^{-\lambda\delta^2/2}),\quad \lambda\to+\infty.$$

Le changement de variable $z = S(t)$ ramène cette relation à la forme

$$\int_{\gamma} e^{-\lambda z}f(z)\,dz=O(\lambda^{-1}e^{-b\lambda}),\quad \lambda\to+\infty, \tag{4}$$

où $b = \delta^2/2 > 0$, γ est l'arc de parabole $z = it + t^2/2$, $-\delta \leqslant t \leqslant \delta$, $f(z) = a(z)(z+i)^{-1}$, $z = z(t)$.

Utilisons la proposition suivante. Soient γ une courbe convexe finie simple différentiable dans le plan de z complexe, $f(z)$ une fonction différentiable sur γ. Supposons que la courbe γ est tangente à l'axe imaginaire au point $z = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ aux autres points de la courbe et $\operatorname{Re} z = c > 0$ aux extrémités de γ.

Si la relation (4) a lieu, la fonction $f(z)$ se prolonge analytiquement de la courbe γ au domaine limité par γ et par le segment reliant ses extrémités. Donc la fonction $a(x)$ se prolonge analytiquement à un demi-voisinage complexe du point $x = 0$. Ce fait est valable aussi pour le système

$$y_1'=0,\quad y_2'=\lambda(x+i)y+\lambda^{-N}a(x)y$$

pour tout $N \geqslant -1$.

2. Considérons le système

$$y_1'=0,\quad y_2'=\lambda(x+i\varepsilon)y_2+\lambda y_1 \tag{5}$$

sur l'intervalle $I = [-\delta, \delta]$. Ce système admet un système fondamental de solutions de la forme (3). Montrons que si $\delta > \varepsilon > 0$, le

système (5) ne possède pas de solution pour laquelle est valable la formule asymptotique (3) lorsque $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \in I$.

Les raisonnements de l'exemple 1 nous conduisent à la relation

$$F(\lambda) \equiv \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left\{-\lambda\left(i\varepsilon x + \frac{x^2}{2}\right)\right\} dx = O\left(\exp\left\{-\frac{\lambda\delta^2}{2}\right\}\right), \quad \lambda \to +\infty.$$

Lorsque $\lambda \to +\infty$, on a $F(\lambda) \sim \text{const}\, \lambda^{-1/2} \exp\{-\lambda\varepsilon^2/2\}$. On obtient ainsi une contradiction, puisque $\delta > \varepsilon$.

On a la même proposition pour le système

$$y_1' = 0, \quad y_2' = \lambda(x + i\delta) y_2 + \lambda^{-N} y_1,$$

si $N \geqslant -1$.

§ 9. Racines de multiplicité constante

1. Equation du second ordre. Considérons l'équation

$$y'' - 2\lambda a(x, \lambda^{-1}) y' + \lambda^2 b(x, \lambda^{-1}) y = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$ et supposons que

$$a(x, \lambda^{-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \lambda^{-j}, \quad b(x, \lambda^{-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \lambda^{-j} \tag{2}$$

lorsque $\lambda \to +\infty$. Les conditions imposées à la différentiabilité des coefficients sont les mêmes qu'au § 3, n° 2.1.

Supposons que les racines de l'équation caractéristique

$$p^2 - 2a_0(x) p + b_0(x) = 0$$

sont confondues pour tous les $x \in I$, c'est-à-dire qu'est remplie la condition

$$a_0^2(x) = b_0(x), \quad x \in I. \tag{3}$$

Dans ce cas les solutions admettent des développements en série asymptotique suivant les puissances fractionnaires de λ^{-1}. En effet, la substitution

$$y = \exp\left\{\lambda \int^x a(t, \lambda^{-1})\, dt\right\} z$$

ramène l'équation (1) à la forme

$$z'' + \lambda q(x, \lambda^{-1}) z = 0, \tag{4}$$

où $q(x, \lambda^{-1})$ se développe en série entière asymptotique de λ^{-1}, et de plus

$$q_0(x) = b_1(x) - 2a_0(x) a_1(x) - a_0'(x).$$

L'équation (4) est de la forme (15), § 3, sauf que le coefficient q est multiplié par λ et non pas par λ^2. Donc, les solutions se développent en séries asymptotiques de $\lambda^{-1/2}$ si $q_0(x)$ satisfait les conditions formulées au § 3, n° 1.6.

2. Systèmes d'équations. Considérons le système de deux équations

$$y' = \lambda A(x, \lambda^{-1})\, y \tag{5}$$

avec les mêmes conditions sur la matrice A qu'au § 4, n° 1. On a

$$A(x, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x)\, \lambda^{-j}, \quad \lambda \to +\infty.$$

Supposons que les valeurs propres de la matrice $A_0(x)$ sont confondues: $p_1(x) \equiv p_2(x) = p(x)$, $x \in I$. Distinguons les deux cas suivants.

A. Supposons que la matrice $A_0(x)$ est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $T(x)$ de classe $C^\infty(I)$ régulière pour $x \in I$ et telle que

$$T^{-1}(x)\, A_0(x)\, T(x) = p(x)\, I, \quad x \in I.$$

La substitution

$$y = \exp\left\{\lambda \int^x p(t)\, dt\right\} T(x)\, z \tag{6}$$

ramène le système (5) à la forme

$$z' = \lambda B(x, \lambda^{-1})\, z,$$

où B admet un développement en série asymptotique de λ^{-1}. Ce système ne contient pas de petit paramètre en la dérivée supérieure et l'on ne peut obtenir la représentation asymptotique des solutions que si le système $z' = B_0(x)\, z$ est intégrable.

B. Supposons que la matrice $A_0(x)$ se ramène à la forme normale de Jordan, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $T(x)$ telle que

$$T^{-1}(x)\, A(x)\, T(x) = \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ 0 & p(x) \end{bmatrix}.$$

La substitution (6) ramène le système (5) à la forme $z' = \lambda B(x, \lambda^{-1})\, z$, où $B(x, \lambda^{-1})$ se développe en série asymptotique de λ^{-1}. On a

$$z_1' = \lambda q(x)\, z_2 + b_{11}(x)\, z_1 + b_{12}(x)\, z_2 + \dots,$$
$$z_2' = b_{21}(x)\, z_1 + b_{22}(x)\, z_2 + \dots$$

La substitution

$$z_1 = \sqrt{\lambda}\, w_1, \quad z_2 = w_2$$

nous conduit au système

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \left[\sqrt{\lambda}\begin{bmatrix} 0 & q(x) \\ b_{21}(x) & 0 \end{bmatrix} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Ce système est de la forme (8), § 4, à la seule différence que sa matrice se développe en série asymptotique non pas de λ^{-1}, mais de $\lambda^{-1/2}$. Donc, tous les résultats du § 4, n° 3, sont valables pour le système (7). Le cas B se rencontre très rarement dans les applications.

§ 10. Problèmes aux valeurs propres

Dans ce paragraphe et dans les suivants on indique quelques applications des formules asymptotiques exhibées ci-dessus. Mais dans les problèmes de mécanique, de physique et autres les équations contenant un grand paramètre possèdent généralement des points de retour. C'est pourquoi les principales applications des méthodes asymptotiques n'apparaîtront que dans les chapitres suivants.

1. Problème de Sturm-Liouville. Considérons le problème aux valeurs propres sur l'intervalle $I = [a, b]$:

$$y'' + \lambda^2 q(x)\, y = 0, \quad x \in I, \qquad (1)$$

$$y(a) = y(b) = 0. \qquad (2)$$

On sait [4] que pour $q(x) \not\equiv 0$ ce problème admet une infinité de valeurs propres λ_n^2. On demande de trouver la représentation asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres $y_n(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Supposons que $q(x) > 0$ pour $x \in I$ et $q(x) \in C^\infty(I)$; alors $\lambda_n^2 > 0$ pour tous les n. On admettra donc que $\lambda_n > 0$. La représentation asymptotique du spectre et des fonctions propres est bien connue dans ce cas [35] et l'exemple considéré revêt un caractère purement illustratif.

Soit $\{y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)\}$ un système fondamental de solutions ; toute solution est alors de la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Les conditions aux limites (2) nous conduisent à un système de deux équations algébriques homogènes linéaires en c_1 et c_2. Comme $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, le déterminant du système est nul et l'équation aux valeurs propres est de la forme

$$F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(a, \lambda) & y_2(a, \lambda) \\ y_1(b, \lambda) & y_2(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

L'équation (1) possède deux solutions admettant pour $\lambda \to +\infty$ la représentation asymptotique

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm i\widetilde{S}(x, \lambda)\},$$
$$\widetilde{S} = \lambda \int_a^x \sqrt{q(t)}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm\lambda)^{-k} \int_a^x \beta_k(t)\, dt, \tag{4}$$

uniformément en $x \in I$. Les fonctions $\beta_k(x)$ se déterminent à partir des relations récurrentielles

$$\beta_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \quad \beta_{k+1}(x) = \frac{i}{2\sqrt{q(x)}} \left(\beta_k'(x) + \sum_{s=0}^{k} \beta_s(x)\, \beta_{k-s}(x)\right). \tag{5}$$

D'où il suit que les fonctions $\beta_{2k+1}(x)$ sont imaginaires pures et les fonctions $\beta_{2k}(x)$, réelles. Posons

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_{2k+1} \lambda^{-2k-1},$$
$$c_{-1} = \int_a^b \sqrt{q(t)}\, dt, \quad c_k = -i \int_a^b \beta_k(t)\, dt, \quad k \geqslant 1. \tag{6}$$

La série $\Phi(\lambda)$ et celles qui suivent plus bas sont asymptotiques. En portant le développement asymptotique (4) dans l'équation (3), on obtient l'équation aux valeurs propres: $\sin \Phi(\lambda) = 0$, de sorte que $\Phi(\lambda) = n\pi$, $n \geqslant 0$ est un entier. Donc λ_n admet le développement asymptotique en une série de puissances impaires de n^{-1}:

$$\lambda_n = \sum_{k=-1}^{\infty} d_{2k+1} n^{-2k-1}.$$

Le terme principal de la représentation asymptotique est égal à

$$\lambda_n = \pi n \left(\int_a^b \sqrt{q(t)}\, dt\right)^{-1} + O(n^{-1}).$$

Les coefficients d_k peuvent être calculés à l'aide de la formule de Bürmann-Lagrange:

$$d_k = \frac{\pi}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} [z\Phi(z^{-1})]^k \big|_{z=0}.$$

Trouvons la représentation asymptotique des fonctions propres $y_n(x)$. La première des conditions (2) nous donne $y_n(x) =$

$= c\,(y_1(x, \lambda_n) - y_2(x, \lambda_n))$ ou $y_n^*(x) = \operatorname{Im} y_1(x, \lambda_n)$, puisque les solutions y_1 et y_2 peuvent être choisies conjuguées complexes pour $x \in I$. Normons la fonction $y_n(x)$ à l'aide de la condition $\int\limits_a^b y_n^2(x)dx = 1$; on obtient alors

$$y_n(x) = c_n q^{-1/4}(x) \sin \widetilde{S}(x, \lambda_n).$$

La forme de la fonction $\widetilde{S}$ est indiquée dans (4), c_n est le facteur de normalisation qui se développe en une série asymptotique:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{J}}\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} f_k n^{-2k-1}\right), \quad J = \int\limits_a^b q^{-1/2}\,dx.$$

En effet,

$$\int\limits_a^b q^{-1/2} \sin^2 \widetilde{S}(x, \lambda_n)\,dx = \frac{1}{2}\left[J - \int\limits_a^b q^{-1/2} \cos 2\widetilde{S}(x, \lambda_n)\,dx\right]$$

et une intégration par parties nous conduit à la formule de c_n.

Cette méthode se généralise à des classes plus larges de problèmes aux limites, par exemple de la forme

$$y'' + \lambda^2 q(x, \lambda^{-1})\,y = 0,$$
$$a_{10}(\lambda)\,y(a) + a_{11}(\lambda)\,y'(a) + a_{20}(\lambda)\,y(b) + a_{21}(\lambda)\,y'(b) = 0,$$
$$b_{10}(\lambda)\,y(a) + b_{11}(\lambda)\,y'(a) + b_{20}(\lambda)\,y(b) + b_{21}(\lambda)\,y'(b) = 0,$$

où $a_{jk}(\lambda)$ et $b_{jk}(\lambda)$ sont des polynômes de λ à coefficients complexes,

$$q(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} q_j(x)\,\lambda^{-j}, \quad \lambda \to +\infty.$$

Ce développement asymptotique est uniforme en $x \in I$, $q_0(x) > 0$, les fonctions $q_k(x)$ peuvent être à valeurs complexes pour $k \geqslant 1$.

Dans le cas où $q(x)$ est une fonction à valeurs complexes, même le problème élémentaire (1), (2) n'a pratiquement pas été étudié. Les exemples du § 8 montrent que dans ce cas il n'existe probablement pas de « formule universelle » pour la représentation asymptotique des valeurs propres (cf. [18], chap. IV, § 7).

2. Problème de Regge. Considérons le problème aux valeurs propres sur l'intervalle $I = [0, a]$, $a > 0$:

$$\begin{gathered} -y'' + q(x)\,y = k^2 y, \\ y(0) = 0, \quad y'(a) + iky(a) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

où k est un paramètre spectral et

$$q(x) = (a - x)^{\alpha} r(x), \quad r(a) \neq 0, \quad \alpha > -1, \tag{8}$$

où $r(x) \in C^{\infty}(I)$, de sorte que la fonction $q(x)$ ou ses dérivées peuvent présenter une singularité au point $x = a$. Ce problème n'est pas auto-adjoint même pour des fonctions $q(x)$ réelles et admet donc un spectre complexe. Le demi-plan $\operatorname{Im} k \leqslant 0$ ne contenant qu'un nombre fini de points du spectre, on n'étudiera l'équation (7) que pour $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Les développements asymptotiques des paragraphes précédents échouent ici. En effet, la fonction $Q(x, k) = k^2 - q(x)$ ne présente pas de singularité au point $x = a$ pour $\alpha > 0$ non entier, alors que toutes ses dérivées d'ordre assez élevé en possèdent. C'est pourquoi on se servira des équations intégrales

$$y_1 = e^{-ikx} u_1, \quad u_1(x) = 1 + \frac{i}{2k} \int_0^x (1 - e^{2ik(x-t)}) q(t) u_1(t) \, dt$$

pour construire les représentations asymptotiques des solutions. Soit $K(x, t, k)$ le noyau de l'opérateur intégral ; alors $|K(x, t, k)| \leqslant$ $\leqslant |k|^{-1} |q(t)|$ pour $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ et comme $\int_0^a |q(t)| \, dt < \infty$, la méthode des approximations successives converge pour $k \in G$: $\operatorname{Im} k \geqslant$ $\geqslant 0$, $|k| \geqslant R \gg 1$. Donc

$$y_1(x, k) = e^{-ikx} \left[1 + \frac{i}{2k} \int_0^x (1 - e^{-2ik(x-t)}) q(t) \, dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

et cette représentation asymptotique peut être dérivée.

Par ailleurs, $y_1(0, k) = 1$, $y_1'(0, k) = -ik$, de sorte que la solution $y_1(x, k)$ est une fonction entière de k pour chaque $x \in I$ fixe.

La solution y_2 se détermine à partir de l'équation intégrale

$$y_2 = e^{ik(x-a)} u_2, \quad u_2(x) = 1 + \frac{i}{2k} \int_a^x (e^{2ik(t-x)} - 1) q(t) u_2(t) \, dt.$$

Cette solution satisfait les conditions de Cauchy $y_2(a, k) = 1$, $y_2'(a, k) = ik$, est une fonction entière de k pour chaque $x \in I$ fixe et

$$y_2(x, k) = e^{ik(x-a)} \left[1 + \frac{i}{2k} \int_a^x (e^{2ik(t-x)} - 1) q(t) \, dt + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right].$$

Prenons une fonction propre de la forme $y = c_1y_1 + c_2y_2$; de (7) on déduit alors l'équation aux valeurs propres

$$y_2(0)(y_1'(a) + iky_1(a)) - 2ik = 0.$$

En se servant de la représentation asymptotique des solutions, on peut ramener cette équation à la forme

$$F(k) \equiv \int_0^a e^{-2ikt} q(t)\,dt = 2ik\,[1 + O(k^{-1})]. \tag{9}$$

L'application de la méthode du col nous donne

$$F(k) = c_0 e^{-2ika} k^{-\alpha-1}\,[1 + O(k^{-1})],$$

$$c_0 = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}(\alpha+1)\right\} 2^{-\alpha-1}\,\Gamma(\alpha+1)\,r(a)$$

pour $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \to \infty$, de sorte que l'équation (9) devient

$$e^{-z} z^{\alpha+2} = -a^{\alpha+2} r(a)\,\Gamma(\alpha+1)\,[1 + O(k^{-1})], \quad z = -2ika,$$

d'où l'on déduit la représentation asymptotique du spectre:

$$k_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{i(\alpha+2)}{2a} \ln n + \frac{i}{2a}\,[(\alpha+2)\ln(-2\pi i) -$$

$$- (\alpha+2)\ln a - \ln(-r(a)\,\Gamma(\alpha+1))] + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Pour $|k| \gg 1$ le spectre est composé de deux séquences associées aux valeurs $n > 0$ et $n < 0$. Si la fonction $q(x)$ est réelle, le spectre est constitué des couples $(k_n, -\bar{k}_n)$.

§ 11. Problème de diffusion

1. Matrice de diffusion. Considérons le problème de diffusion [19] pour l'équation

$$y'' + \lambda^2 q(x)\, y = 0, \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ et la fonction $q(x)$ est réelle et continue pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1.1. *La S-matrice et ses propriétés.* Posons les conditions:

1) Les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} q(x) = q_\pm > 0$ existent et sont finies.

2) Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} |\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_-}|\,dx, \quad \int_{0}^{\infty} |\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_+}|\,dx$$

convergent.

L'équation (1) admet alors deux systèmes fondamentaux de solutions dont le comportement asymptotique à l'infini est le suivant:

$$\begin{aligned} y^{+}_{1,2}(x) &= q_{+}^{-1/4} \exp\{\pm i\lambda \sqrt{q_{+}}\, x\}[1+o(1)], \quad x \to +\infty, \\ y^{-}_{1,2}(x) &= q_{-}^{-1/4} \exp\{\pm i\lambda \sqrt{q_{-}}\, x\}[1+o(1)], \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Ces conditions définissent les solutions $y^{\pm}_{j}$ de façon unique.

Les solutions y^{+}_{1}, y^{-}_{1} (resp. y^{+}_{2}, y^{-}_{2}) décrivent des ondes se déplaçant vers la droite (resp. vers la gauche). On a les identités

$$\overline{y^{-}_{1}(x)} = y^{-}_{2}(x), \quad \overline{y^{+}_{1}(x)} = y^{+}_{2}(x).$$

Pour λ fixe, toute solution y peut être représentée sous la forme

$$y(x) = c^{-}_{1} y^{-}_{1}(x) + c^{-}_{2} y^{-}_{2}(x) = c^{+}_{1} y^{+}_{1}(x) + c^{+}_{2} y^{+}_{2}(x),$$

où $c^{\pm}_{j}$ sont des constantes. On appelle *matrice de diffusion* une (2×2)-matrice $S(\lambda) = (s_{jk}(\lambda))$ définie par la relation

$$\begin{bmatrix} c^{+}_{1} \\ c^{-}_{2} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c^{-}_{1} \\ c^{+}_{2} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Les solutions y^{-}_{1} et y^{-}_{2} peuvent être interprétées comme des ondes venant de $-\infty$ et de $+\infty$ au centre (ondes entrantes), les solutions y^{+}_{1} et y^{-}_{2}, comme des ondes sortantes (allant du centre vers l'infini) et diffusées par le potentiel $q(x)$.

La S-matrice décrit le résultat de la diffusion. Ses principales propriétés sont:

1) la S-matrice est unitaire, c'est-à-dire que

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = |s_{21}|^2 + |s_{22}|^2 = 1, \quad s_{11}\bar{s}_{21} + s_{12}\bar{s}_{22} = 0.$$

2) $s_{11} = s_{22}$ (ce qui équivaut à la relation $S(-\lambda) = S^{*}(\lambda)$, où S^{*} est la matrice transposée conjuguée).

1.2. *Coefficients de transmission et de réflexion.* Soit y une solution de la forme

$$y(x) = T_{+} y^{+}_{1}(x) = y^{-}_{1}(x) + R_{+} y^{-}_{2}(x). \tag{4}$$

La solution y est une onde se déplaçant vers la droite pour $x \gg 1$ et la somme d'une onde incidente y^{-}_{1} et d'une onde réfléchie $R_{+} y^{-}_{2}$ pour $x \ll 1$. Les nombres T_{+} et R_{+} s'expriment par l'intermédiaire des éléments de la S-matrice:

$$T_{+} = s_{11}, \quad R_{+} = s_{21}. \tag{5}$$

Les quantités $|T_{+}|^2$ et $|R_{+}|^2$ s'appellent respectivement *coefficients de transmission* et *de réflexion.* L'unitarité de la S-matrice entraîne que $|T_{+}|^2 + |R_{+}|^2 = 1$ (loi de conservation du flux

d'énergie). De façon analogue, si l'onde incidente se déplace vers la gauche, alors

$$y(x) = T_- y_2^- (x) = y_2^+ (x) + R_- y_1^+ (x),$$
$$T_- = s_{22}, \quad R_- = s_{12}, \quad |T_-|^2 + |R_-|^2 = 1.$$

1.3. *Problème sur le demi-axe.* Considérons l'équation (1) sur le demi-axe $\mathbf{R}^+$: $0 < x < \infty$ et posons l'une des conditions à la limite en $x = 0$:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(0) + ay(0) = 0, \tag{6}$$

où a est réel. La solution y qui vérifie l'une des conditions aux limites (6) est de la forme

$$y(x) = c_1(\lambda) y_1(x) + c_2(\lambda) y_2(x),$$

où $y_j = y_j^+$. La fonction

$$S(\lambda) = -c_2(\lambda)/c_1(\lambda) \tag{7}$$

s'appelle *amplitude de diffusion.* Le rôle de l'onde incidente est joué par l'onde $c_2 y_2$ qui se déplace vers la gauche. Vu que la solution y peut être choisie réelle, on a $\overline{c_1(\lambda)} = c_2(\lambda)$ et par suite

$$|S(\lambda)| = 1. \tag{8}$$

1.4. *Réflexion dans le cas où $q(x) > 0$.* Supposons que $q(x) > 0$ pour $x \in \mathbf{R}$ et décroît rapidement lorsque $|x| \to \infty$, de sorte que toutes les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q^{(j)}(x)| dx, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

convergent. Trouvons la représentation asymptotique de la S-matrice lorsque $\lambda \to +\infty$.

L'équation (1) admet les solutions

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\{\pm i\lambda S(0, x)\} \exp\left\{i \int_{+\infty}^{x} a_{1,2}(t, \lambda)\, dt\right\},$$

$$S(0, x) = \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt, \quad a_{1,2} = \sum_{j=1}^{\infty} (\pm\lambda)^{-j} \beta_j(x).$$

Les fonctions $\beta_j(x)$ sont définies au § 10, (5). Ces représentations asymptotiques sont doubles, c'est-à-dire qu'elles sont valables lorsque $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \in \mathbf{R}$ et lorsque $x \to +\infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ (§ 6). Le deuxième système fondamental (y_1^-, y_2^-) est de la même forme, à ceci près que les intégrales sont prises entre

$-\infty$ et x et que la représentation asymptotique est valable pour $x \to -\infty$.

On a

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) = A(\lambda)\, \tilde{y}_1^-(x, \lambda) + B(\lambda)\, \tilde{y}_2^-(x, \lambda).$$

En faisant $x = 0$ dans cette identité et dans celle des dérivées premières, on déduit du système d'équations obtenu

$$A(\lambda) = \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x, \lambda)\, dx\right\}, \quad B(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}).$$

Exprimons les solutions $\tilde{y}_j^{\pm}$ en fonction de $y_j^{\pm}$; trouvons alors les éléments s_{11} et s_{21} de la matrice de diffusion en nous servant des relations (4) et (5). La condition 2) nous donne

$$\int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt = x\sqrt{q_\pm} + B_\pm + o(1), \quad B_\pm = \int_0^{\pm\infty} (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_\pm})\, dx,$$

où $o(1)$ est un infiniment petit pour $x \to \pm\infty$ respectivement.

En comparant les représentations asymptotiques des solutions y_j^+, $\tilde{y}_j^+$ (resp. y_j^-, $\tilde{y}_j^-$) lorsque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$), on obtient

$$\tilde{y}_{1,2}^+ = e^{\pm i\lambda B_+} y_{1,2}^+ \quad (\text{resp. } \tilde{y}_{1,2}^- = e^{\pm i\lambda B_-} y_{1,2}^-).$$

On rappelle que chaque solution de l'équation (1) est définie de façon unique par sa représentation asymptotique lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. On obtient en définitive

$$s_{11} = \exp\left\{i\lambda\left(\int_0^{\infty} (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_+})\, dx + \int_{-\infty}^{0} (\sqrt{q(x)} - \sqrt{q_-})\, dx\right) + \right.$$
$$\left. + i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} \beta_j(x)\, dx\right\}, \quad s_{21} = O(\lambda^{-\infty}). \quad (9)$$

Les éléments s_{12} et s_{22} s'expriment en fonction des éléments s_{11} et s_{21} déjà calculés.

2. Amplitude de diffusion en présence d'absorption. Considérons l'équation

$$y'' + (k^2 + ikr(x))\, y = 0 \quad (10)$$

sur le demi-axe $x > 0$ avec la condition à la limite $y(0) = 0$, où $k > 0$ est un paramètre, $r(x) > 0$ pour $0 < x < l$, $r(x) \equiv 0$ pour

$x \geqslant l$, $r(x) \in C^\infty$ pour $x > 0$ et la fonction $r(x)$ présente une singularité au point $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} r(x) = \infty, \quad \int_0^l \sqrt{r(x)}\, dx = \infty. \tag{11}$$

Pour $x > l$, on a

$$y(x, k) = A(k) e^{-ikx} - B(k) e^{ikx}.$$

La fonction $s(k) = B(k)/A(k)$ s'appelle *amplitude de diffusion.* Ce problème admet l'interprétation physique suivante: une onde plane venant de l'infini aborde une couche absorbante recouvrant l'intervalle $[0, l]$. On demande de trouver la représentation asymptotique de l'amplitude de diffusion $s(k)$ lorsque $k \to +\infty$.

De la condition (11) il s'ensuit que l'équation (10) admet une solution unique $y(x, k)$ à un facteur multiplicatif constant près, telle que $y(0, k) = 0$. L'amplitude de diffusion $s(k)$ s'exprime en fonction de y de la manière suivante:

$$s(k) = e^{-2ikl} \frac{iky(l, k) + y'(l, k)}{iky(l, k) - y'(l, k)}. \tag{12}$$

De (10) il résulte que $s(-\bar{k}) = \overline{s(k)}$.

Etudions le développement asymptotique et l'analyticité en k de la solution $y(x, k)$ sous réserve que la fonction $r(x)$ satisfasse les conditions du nº 1.5, § 6. Supposons que $Q(x, k) = -k^2 - ikr(x)$. Voyons pour quels k complexes sont vérifiées les conditions 1), 2) du § 3. Comme $r(x) \geqslant 0$, on a $Q \neq 0$ si $k \in D_0$, où D_0 est le plan de k complexe muni d'une coupure le long de l'axe imaginaire $]-i\infty, 0]$. Soient D_x le demi-plan $\operatorname{Im} k \geqslant -r(x)/2$ muni d'une coupure le long de l'intervalle fermé $[-ir(x)/2, 0]$, $w = \sqrt{Q(x, k)}$ la détermination dans D_x telle que $\operatorname{Re} w \to +\infty$ lorsque $\operatorname{Im} k \to +\infty$. La fonction w applique bijectivement le domaine D_x sur le demi-plan $\operatorname{Re} w > 0$, de sorte que $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x, k)} \geqslant 0$ pour $k \in D_x$ et, en particulier, $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x, k)} \geqslant 0$ pour $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Donc la solution $y(x, k)$ admet le développement asymptotique (8), § 7, où $j = 2$, et q doit être remplacé par $-1 - ik^{-1}r(x)$ lorsque $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Par ailleurs, la solution $y(x, k)$ est holomorphe par rapport à k dans le domaine D_0 pour chaque x fixe, ce qui résulte du § 3, nº 1.5, de sorte que $s(k)$ est une fonction méromorphe par rapport à k dans le domaine D_0.

La représentation asymptotique de l'amplitude de diffusion est définie par le comportement de la fonction $r(x)$ au voisinage du point $x = l$ (de même que dans le problème de Regge, § 10). On distinguera deux cas.

A. La fonction $r(x)$ présente un zéro d'ordre fini $n \geqslant 1$. Alors

$$s(k) = 2^{-n-3} i^{-n} k^{-n-2} e^{-2ikl} [1 + O(k^{-1/2})]$$

lorsque $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Cette formule s'établit par une substitution directe du développement asymptotique de la solution y dans (12). On voit que plus le raccordement de la couche absorbante $0 < x < l$ avec le milieu $x > l$ est lisse, et plus le coefficient de réflexion $|s(k)|$ est petit.

B. La fonction $r(x)$ admet un zéro d'ordre infini. Alors $s(k) = O(k^{-\infty})$. Pour obtenir une information plus exacte il faut, comme dans le problème de Regge, se tourner vers un système d'équations intégrales pour la solution y. De (14), § 2, il vient

$$y = Q^{-1/4}(u_1 + u_2), \quad u_1 = 1 + \int_0^x \alpha_1 (u_1 + u_2)\, dt,$$

$$u_2 = -\int_0^x \alpha_1 e^{2S(x,\, t)}(u_1 + u_2)\, dt,$$

où α_1 s'exprime en fonction de Q par la formule (9), § 1,

$$S(t,\, x) = \int_t^x \sqrt{Q(t,\, k)}\, dt, \quad \operatorname{Re}\sqrt{Q} \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0.$$

Comme $u_1 = 1 + O(k^{-1/2})$, $u_2 = O(k^{-1/2})$ (toutes les estimations sont données pour $\operatorname{Im} k \geqslant 0$), on déduit de (12):

$$s(k) = -e^{-2ikl} u_2(l,\, k)[1 + O(k^{-1/2})].$$

Par ailleurs,

$$u_2(l,\, k) = -\int_0^l [1 + O(k^{-1/2})]\, \alpha_1 e^{-2S(t,\, x)} dt$$

et le problème se ramène à la détermination de la représentation asymptotique de cette intégrale. Si $r(x) = e^{-f(x)}$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to l - 0$ de façon assez régulière (par exemple, $f(x) = A(l - x)^{-\alpha}$, $A > 0$, $\alpha > 0$), il est alors possible de déterminer la représentation asymptotique pour $k = i\sigma$, $\sigma \to +\infty$ à l'aide de la méthode de Laplace. Alors

$$s(k) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, (f'(t_0))^2}{8\sigma^3 \sqrt{f''(t_0)}} \exp\{2\sigma t_0 - f(t_0)\}, \quad \sigma \to +\infty,$$

où t_0 est un point col: $f'(t_0) = 2\sigma$, tel que $t_0 \to l$ lorsque $\sigma \to +\infty$.

3. Invariant adiabatique d'un oscillateur harmonique linéaire. Considérons l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)\, x = 0 \tag{13}$$

sur la droite réelle $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et $\omega(t) > 0$ une fonction de $C^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \omega(t) = \omega_\pm > 0.$$

L'équation (13) décrit un oscillateur harmonique linéaire dont la fréquence d'oscillations $\omega(\varepsilon t)$ varie lentement avec le temps.

On appelle *invariant adiabatique* d'un système physique une quantité qui varie peu lorsque les paramètres du système varient lentement (mais pas forcément peu!). En d'autres termes, un invariant adiabatique est une loi de conservation approximative ou une intégrale première approximative. Pour l'équation (13), l'*invariant adiabatique d'Ehrenfest* est le rapport de l'énergie de l'oscillateur à sa fréquence:

$$J(t, \varepsilon) = \frac{\dot{x}^2 + \omega(\varepsilon t)\, x^2}{2\omega(\varepsilon t)}, \tag{14}$$

où $x = x(t, \varepsilon)$ est une solution de l'équation (13). La quantité

$$J(\varepsilon) = J(+\infty, \varepsilon) - J(-\infty, \varepsilon) \tag{15}$$

s'appelle *variation totale de l'invariant adiabatique.*

Remarque. Pour $\varepsilon = 1$, l'équation (13) admet une intégrale première exacte (l'invariant de Lewis)

$$I = \frac{1}{2}[\rho^{-2}x^2 + (\rho\dot{x} - \dot{\rho}x)^2],$$

où $\rho(t)$ est solution de l'équation non linéaire

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = -\rho^3.$$

Le lien entre la dernière équation et l'équation (13) est utile dans de nombreux problèmes.

3.1. *Invariant adiabatique et problème de diffusion.* La substitution $\tau = \varepsilon t$ ramène l'équation (13) à la forme

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)\psi = 0, \tag{16}$$

où $\psi(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$. Cette équation ne diffère de l'équation (1) que par les notations. Supposons que $\omega(t)$ tend assez vite vers sa limite lorsque $t \to \pm\infty$, de sorte qu'est remplie la condition:

Les intégrales

$$\int_{}^{+\infty} |\omega(t)-\omega_+|\,dt,\quad \int_{-\infty} |\omega(t)-\omega_-|\,dt,\quad \int_{-\infty}^{\infty} (|\dot\omega(t)|^2+|\ddot\omega(t)|)\,dt$$

convergent.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixe, l'équation (16) admet alors deux systèmes fondamentaux de solutions dont les représentations asymptotiques

$$\psi^+_{1,2} \sim \omega_+^{-1/2} \exp\{\pm i\omega_+\tau/\varepsilon\},\quad \tau\to+\infty,$$
$$\psi^-_{1,2} \sim \omega_-^{-1/2} \exp\{\pm i\omega_-\tau/\varepsilon\},\quad \tau\to-\infty,$$

sont deux fois dérivables. Toute solution de l'équation (16) peut être mise sous la forme

$$\psi = c_1^+\psi_1^+ + c_2^+\psi_2^+ = c_1^-\psi_1^- + c_2^-\psi_2^-, \tag{17}$$

où $c_j^\mp$ ne dépendent que de ε, et pour la variation totale de l'invariant adiabatique, on a la formule

$$J(\varepsilon) = 2(c_1^+c_2^+ - c_1^-c_2^-). \tag{18}$$

3.2. *Estimations de* J (ε). Par construction, $J(t, \varepsilon)$ est un opérateur homogène et $J(\varepsilon)$ une fonctionnelle quadratique homogène définis sur les solutions de l'équation (13). Donc pour déterminer leurs représentations asymptotiques, il faudra normer les solutions. Normons la solution ψ donnée par (17) de la manière suivante: fixons des nombres c_1^- et c_2^- indépendants de ε, c'est-à-dire donnons-nous la représentation asymptotique de la solution ψ lorsque $\tau\to-\infty$. Alors

$$J(\varepsilon) = 2|s_{11}|^{-2}[(|s_{12}|^2+|s_{21}|^2)c_1^-c_2^- - s_{21}(c_1^-)^2 - \bar s_{21}(c_2^-)^2]. \tag{19}$$

Si la solution x est réelle, alors $c_1^- = \bar c_2^- = c$ et

$$J(\varepsilon) = 2|s_{11}|^{-2}[(|s_{12}|^2+|s_{21}|^2) - 2\,\mathrm{Re}\,(s_{21}c^2)].$$

Sous la condition 1), on a $J(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to+0$. Si les fonctions $\omega(t)-\omega_+$ et $\omega(t)-\omega_-$ appartiennent respectivement aux espaces de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^+)$ et $\mathcal{S}(\mathbf{R}^-)$, alors

$$J(\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty),\quad \varepsilon\to+0.$$

Au chapitre III, § 8, on montrera que si la fonction $\omega(t)$ est holomorphe au voisinage de l'axe réel, $J(\varepsilon)$ décroît exponentiellement lorsque $\varepsilon\to+0$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE DANS LE PLAN COMPLEXE

Dans ce chapitre on étudie des équations de la forme

$$w'' + p(z, \lambda) w' + q(z, \lambda) w = 0$$

à coefficients entiers ou méromorphes. Le problème fondamental de la théorie asymptotique consiste à construire la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions lorsque $\lambda \to \infty$ dans tout le plan de z complexe. On se penche aussi sur de nombreux problèmes concrets d'analyse spectrale et de physique mathématique.

§ 1. Lignes de Stokes et domaines limités par elles

1. Structure locale des lignes de Stokes. Considérons l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre et la fonction $q(z)$ holomorphe dans un domaine D du plan de z complexe. Posons

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{q(t)}\, dt \tag{2}$$

et étudions la structure locale des lignes de niveau l_c: $\operatorname{Re} S(z_0, z) = c$. Soient $q(z_0) \neq 0$ et U un disque $|z - z_0| < r$ de rayon $0 < r \ll 1$. La fonction $\sqrt{q(z)}$ admet deux déterminations holomorphes dans U. Fixons l'une d'elles; la formule (2) définit alors une fonction holomorphe dans U (le chemin d'intégration est contenu dans U) qui est un élément (un germe) d'une fonction analytique. En le prolongeant on obtient une fonction analytique multivalente $S(z_0, z)$, dont les points singuliers sont les zéros de la fonction $q(z)$ (des points de branchement). La famille de lignes de niveau $\{l_c\}$, $-\infty < c < \infty$, est définie de façon unique même si la fonction S est infinivalente. Etudions la structure locale des lignes de niveau. Si $q(z_0) \neq 0$ et $r \ll 1$, on peut se servir de (2) pour exprimer z en fonction de S: $z - z_0 = \varphi(S)$, où $\varphi(S)$ est une fonction

holomorphe au point $S = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$. Donc localement la famille $\{l_c\}$ est une famille de segments parallèles et les petits arcs de ces lignes, des courbes analytiques.

Les zéros de la fonction $q(z)$, c'est-à-dire les *points de retour* de l'équation (1), sont les points critiques de la famille $\{l_c\}$.

Soit z_0 un point de retour. On appelle *ligne de Stokes* de l'équation (1) la plus grande composante connexe de la ligne de niveau

$$\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0 \tag{3}$$

issue de z_0 et ne contenant pas d'autres points de retour. Toute ligne de Stokes est une courbe analytique. On définit de façon analogue les lignes de Stokes pour l'équation

$$w'' - Q(z, \lambda) w = 0,$$

où le paramètre λ peut être complexe:

$$\operatorname{Re} \int_{z_0(\lambda)}^{z} \sqrt{Q(t, \lambda)}\, dt = 0,$$

$z_0(\lambda)$ étant un point de retour.

Les lignes de Stokes et les domaines qu'elles limitent jouent un rôle prépondérant dans l'étude de la représentation asymptotique globale des solutions.

La réunion de toutes les lignes de Stokes s'appelle *graphe de Stokes* et se note Φ, et ses composantes connexes, *complexes de Stokes.*

Remarque. Il existe une certaine discordance dans les définitions des lignes de Stokes. Ainsi dans [13] par exemple, les lignes de Stokes

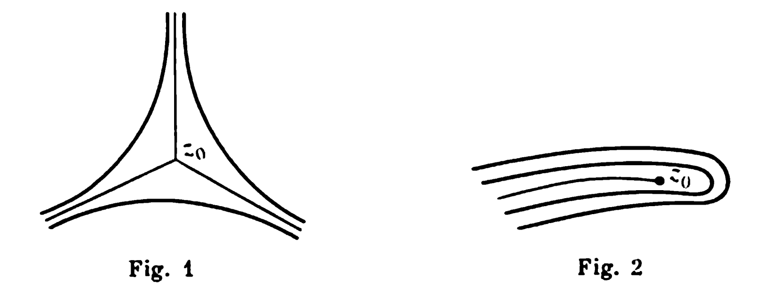


Fig. 1 Fig. 2

sont définies par l'équation $\operatorname{Im} S(z_0, z) = 0$ et les lignes définies ci-dessus, appelées *lignes de Stokes conjuguées* ou *lignes anti-Stokes.*

Soit z_0 un point de retour d'ordre n; pour $z \approx z_0$, on a alors

$$q(z) \sim a(z - z_0)^n, \quad a \neq 0,$$

$$S(z_0, z) \sim \frac{2\sqrt{a}}{n+2} (z - z_0)^{n/2+1}.$$

Donc, d'un point de retour d'ordre n il part $n + 2$ lignes de Stokes, l'angle de deux lignes voisines étant de $2\pi/(n + 2)$. D'un point de retour simple ($n = 1$) il part trois lignes de Stokes avec un angle entre deux lignes voisines égal à $2\pi/3$ (fig. 1).

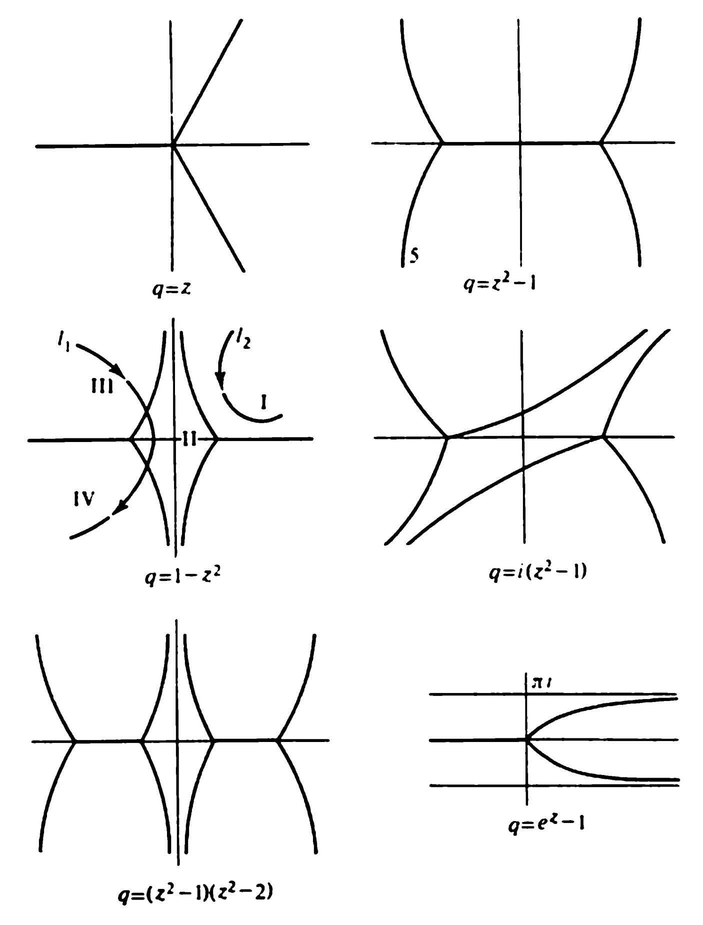


Fig. 3

Supposons que z_0 est un pôle simple de la fonction $q(z)$; alors $S(z_0, z) \sim a\sqrt{z - z_0}$, où $z \to z_0$, $a \neq 0$. L'équation (3) définit localement une courbe d'origine en z_0 (fig. 2) qui s'appelle aussi *ligne de Stokes*. De façon respective, un pôle du premier ordre sera appelé *point de retour d'ordre* -1. La figure 3 représente des lignes de Stokes.

2. Structure globale des lignes de Stokes.

2.1. $q(z)$ *est une fonction entière.* On a le théorème suivant.

Théorème. *Soient D un domaine simplement connexe de bord Γ différentiable par morceaux, $q(z)$ une fonction holomorphe dans $D \cup \Gamma$ sauf éventuellement en un nombre fini de pôles contenus dans D. Si* Re $S(z_0, z) \equiv 0$ *sur Γ, $z_0 \in \Gamma$, la fonction $q(z)$ présente au moins deux pôles dans le domaine D.*

Soit l la ligne de niveau Re $S(z_0, z) = 0$, $z_0 \in l$, c'est-à-dire la plus grande composante connexe de cet ensemble. La fonction $q(z)$ étant entière, la courbe l ne peut contenir de composantes fermées. Soit l_0 la plus grande composante connexe de la courbe l ne contenant pas de points de retour. Alors l_0 est une courbe non fermée simple dont les extrémités ne peuvent être que le point $z = \infty$ ou un point de retour. La fonction Im $S(z_0, z)$ est strictement monotone le long de l_0, puisque la fonction $S(z_0, z)$ applique bijectivement la courbe l_0 sur l'intervalle vertical L: Re $S = 0$, $a <$ Im $S < b$, dans le plan complexe de S.

Posons la condition:

1. Si l_0 n'est pas une ligne de Stokes, alors $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Cette condition est réalisée si $q(z)$ est un polynôme ; elle peut ne pas l'être si $q(z)$ est une fonction entière.

Exemples. 1. Soit $q(z) = e^{2z}$; l'une des déterminations de la fonction $S(0, z)$ est alors e^z. Cette fonction applique la ligne de niveau l_k: Im $z = k\pi + \pi/2$, k est entier, sur le rayon $]0, i(-1)^k \infty[$. Dans cet exemple $q(z) \to 0$ si $z \in l_k$ et $z \to \infty$, Re $z \to -\infty$. Il est naturel d'appeler le point $z = \infty$, point de retour (d'ordre infini) et les lignes l_k, lignes de Stokes.

On admettra dans la suite que la condition 1 est satisfaite.

2. Supposons que $q(z)$ est un polynôme:

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0.$$

Pour $|z| \gg 1$ on a alors

$$S(z_0, z) = \frac{2\sqrt{a_0}}{n+2} z^{n/2+1} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{-j}\right), \quad b_1 = \frac{(n+2)a_1}{2na_0}.$$

Cette série converge pour $|z| \gg 1$. La ligne de niveau l: Re $S(z_0, z) = 0$ qui ne contient pas de point de retour est une courbe simple infinie possédant deux asymptotes parmi les rayons:

$$l_k: z = \rho e^{i\varphi_k} - \frac{a_1}{na_0}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi - \varphi_0}{n+2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

La ligne de Stokes infinie admet une asymptote: l'un des rayons l_k. Les lignes de niveau Im $S(z_0, z) =$ const présentent la même structure: leurs asymptotes sont les rayons

$$l'_k : z = \rho \exp\left\{i\left(\varphi_k - \frac{\pi}{n+2}\right)\right\} - \frac{a_1}{na_0}, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Ces résultats sont valables aussi pour les $n > -2$ non entiers.

2.2. *$q(z)$ est une fonction méromorphe.* Admettons que l'équation (1) possède des points de retour. Si $q(z)$ est une fonction rationnelle, l'équation (1) ne possède pas de point de retour (y compris des pôles d'ordre un) dans les seuls cas suivants:

$$q = a, \quad q = a(z - z_0)^{-2}, \quad q = a(z - z_0)^{-2}(z - z_1)^{-2},$$

où a et z_j sont des constantes. Dans tous ces cas les solutions de l'équation (1) sont des fonctions élémentaires.

Soit O l'ensemble de tous les points singuliers de l'équation (1) sur la sphère de Riemann. Cet ensemble est composé des pôles finis de la fonction $q(z)$ et du point $z = \infty$ si le point $\zeta = 0$ est point singulier de la fonction $\tilde{q}(\zeta) = \zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$ (chap. I, § 1).

Les points singuliers finis se classent de la manière suivante:

1. Un point singulier irrégulier est un pôle d'ordre $n \geqslant 3$ (I_n).

2. Un point singulier régulier de première espèce est un pôle d'ordre un (R_1).

3. Un point singulier régulier de deuxième espèce est un pôle d'ordre deux (R_2).

Le point $z = \infty$ est de type 1, 2 ou 3 selon que $\zeta = 0$ est un pôle d'ordre $n \geqslant 3$, $n = 1$ ou $n = 2$ de la fonction $\tilde{q}(\zeta)$. Si $\tilde{q}(0) \neq 0$, le point $z = \infty$ n'est pas critique; si $\tilde{q}(\zeta)$ présente en $\zeta = 0$ un zéro d'ordre n, alors $z = \infty$ est un point de retour d'ordre n. Si $\zeta = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $\tilde{q}(\zeta)$, le point $z = \infty$ est un point singulier essentiel de l'équation (1).

En règle générale, les points singuliers de l'équation (1) sont des points de branchement d'ordre infini pour toutes ses solutions non triviales. Il est donc naturel d'étudier cette équation sur le revêtement universel $\tilde{C}_z$ de l'ensemble $C_z \setminus O$. On a la projection naturelle $p: \tilde{C}_z \to C_z \setminus O$. On conviendra des notations suivantes dans la suite: M est le projeté de $\tilde{M}$, ensemble contenu dans $\tilde{C}_z$.

On admettra que la condition 1 du n° 2.1 est satisfaite mais pour la ligne $\tilde{l}$.

La condition 1 est vérifiée pour les fonctions rationnelles $q(z)$. Si la ligne de niveau l n'est pas une ligne de Stokes et $z_0 \in l$, alors $\tilde{l}$ est une courbe non fermée infinie (la courbe l peut être fermée;

exemple 2). La fonction $S(z_0, z)$ applique bijectivement $\tilde{l}$ sur l'axe imaginaire $\operatorname{Re} S = 0$ du plan de S complexe.

Exemples. 1. Supposons que $z_0 \neq \infty$ est un pôle de $q(z)$ d'ordre $n \geqslant 3$:

$$q(z) = (z - z_0)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad a = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0. \tag{4}$$

Pour $|z - z_0| \ll 1$ on a alors

$$S(z_1, z) = \sqrt{a_0}\,(z - z_0)^{-n/2+1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^j,$$

$$b_0 = \frac{2}{2-n}, \quad b_1 = -\frac{a_1}{na_0}.$$

Cette série converge pour $|z - z_0| \ll 1$. La ligne de niveau l: $\operatorname{Re} S(z_1, z) = 0$ qui ne contient pas de points de retour est une courbe simple d'origine et d'extrémité en z_0 pour $|z_1 - z_0| \ll 1$ (fig. 4). Ses extrémités sont tangentes en z_0 à deux des rayons:

$$l_k: (2-n) \operatorname{Arg}(z - z_0) + \varphi_0 = = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

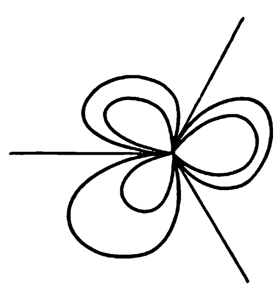


Fig. 4

Les lignes de niveau $\operatorname{Im} S = \text{const}$ présentent la même structure. Ces résultats sont valables aussi pour n non entier, $n > 2$.

2. Supposons que $z_0 \neq \infty$ est un pôle d'ordre deux, c'est-à-dire que $q(z)$ est de la forme (4), $n = 2$. La structure topologique locale des lignes de niveau $\operatorname{Re} S = \text{const}$ est la même que pour la fonction $q(z) = a_0 z^{-2}$.

1) $a_0 > 0$: les lignes de niveau sont des rayons de centre $z = 0$.

2) $a_0 < 0$: les lignes de niveau sont des cercles $|z| = \text{const}$.

3) $\operatorname{Im} a_0 \neq 0$: les lignes de niveau sont des spirales logarithmiques $\alpha \ln r - \beta\varphi = \text{const}$, $(\alpha + i\beta)^2 = a_0$.

La structure des lignes de niveau au voisinage d'un pôle d'ordre un est étudiée au nº 1.

Les lignes de niveau $\operatorname{Re} S = \text{const}$ peuvent avoir une configuration très complexe même dans le cas où $q(z)$ est une fonction rationnelle. Plus exactement, l'ensemble $[\Phi]$ peut avoir des points intérieurs.

3. Supposons que

$$q_\alpha(z) = e^{2i\alpha} (z - a_1)^{-1} (z - a_2)^{-1} (z - a_3)^{-1} (z - a_4)^{-1},$$

où α et a_j sont réels, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $0 < \alpha < \pi$, tg α est irrationnel. Remarquons que le point $z = \infty$ n'est ni un point singulier, ni un point de retour. Si l est une ligne de niveau quelconque Re $S(z_0, z) =$ $=$ const, son adhérence $[l]$ coïncide avec le plan de z complexe tout entier. En effet, pour $\alpha = 0$ la fonction $S(a_1, z)$ envoie bijectivement le demi-plan Im $z \geqslant 0$ dans un rectangle Π du plan de S complexe ayant ses côtés parallèles aux axes de coordonnées. Pour $\alpha \neq 0$ ce demi-plan est appliqué sur le rectangle Π_α, image de Π par une rotation d'angle α autour de l'origine des coordonnées. Prolongeons analytiquement la fonction S à travers les intervalles en lesquels les points a_j partagent l'axe réel. On constate alors que la fonction S applique bijectivement $\tilde{C}_z$ sur le plan de S complexe tout entier, recouvert de rectangles égaux Π_α, Π_α^1, . . . L'image de la ligne de niveau l est une droite verticale L: Re $S =$ const. Si l'on fait coïncider avec Π_α tous les rectangles qui rencontrent L, on constate que l'ensemble des segments de L interceptés est partout dense dans Π_α, puisque tg α est irrationnel. Donc, $[l] = C_z$.

Dans cet exemple $[\Phi] = C_z$ et l'ensemble $[\tilde{\Phi}]$ des points intérieurs de $[\Phi]$ est constitué d'une seule composante connexe. La structure de l'ensemble $[\tilde{\Phi}]$ est étudiée dans [16].

A. $[\tilde{\Phi}]$ peut être constitué d'un nombre fini quelconque de composantes connexes. Ceci étant, $\partial\,[\tilde{\Phi}]$ ne comprend que des points de retour et des points singuliers de type R_1.

B. Si l'équation (1) admet au plus trois points singuliers distincts ou n'admet pas de points de type R_1, alors $[\tilde{\Phi}]$ est vide, de sorte que $[\Phi] = \Phi$.

3. Domaines limités par des lignes de Stokes. Si $q(z)$ est une fonction méromorphe ou entière, la fonction $S(z_0, z)$ est en règle générale infinivalente et applique le plan complexe C_z sur une surface à une infinité de feuillets. Si, en particulier, $q(z)$ est un polynôme de degré n, alors $S(z_0, z)$ est une intégrale elliptique pour $n = 3$, 4 et hyperelliptique pour $n \geqslant 5$. Supposons que D est un domaine simplement connexe et que la fonction $q(z)$ est holomorphe et ne possède pas de zéro dans D. La fonction $\sqrt{q(z)}$ admet alors deux déterminations holomorphes dans D ; ceci est vrai aussi de la fonction $S(z_0, z)$ si $z_0 \in D$ et l'intégrale est prise le long d'un chemin contenu dans D. Dans la suite il sera toujours question de l'une de ces deux déterminations de S.

3.1. *$q(z)$ est une fonction entière.* Soit remplie la condition:

2. $[\Phi] = \Phi$.

On ne connaît pas d'exemples de fonctions entières pour lesquelles la condition 2 n'est pas satisfaite. Si $q(z)$ est un polynôme, la condition 2 est vérifiée.

Les lignes de Stokes partagent le plan complexe en domaines des deux types suivants:

I. Domaine D de type *demi-plan*. La fonction $S(z_0, z)$ envoie bijectivement le domaine D sur un demi-plan de la forme $\operatorname{Re} S > a$ ou $\operatorname{Re} S < a$.

II. Domaine D de type *bande*. La fonction $S(z_0, z)$ envoie bijectivement D sur une bande de la forme $a < \operatorname{Re} S < b$.

Les domaines des deux types sont simplement connexes. Le bord d'un domaine de type demi-plan (resp. bande) est composé d'une (resp. deux) composante(s) connexe(s). Voir exemples sur la figure 3.

Exemple. Supposons que $q(z)$ est un polynôme de degré n. Les lignes de Stokes partagent alors le plan de z en $n+2$ domaines de type demi-plan et N domaines de type bande, $0 \leqslant N \leqslant n-1$.

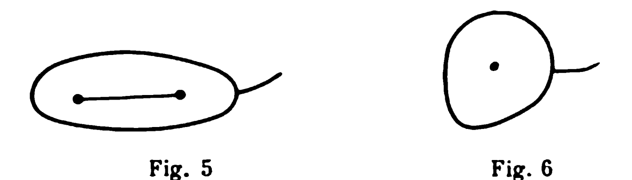


Fig. 5 Fig. 6

S'il n'existe pas de lignes de Stokes finies, alors $N = n - 1$. La ligne de niveau $\operatorname{Re} S = \text{const}$, contenue dans un domaine de type demi-plan admet pour asymptotes deux rayons voisins l_k et l_{k+1}.

3.2. *$q(z)$ est une fonction méromorphe*. Dans ce cas le domaine $C_z \setminus [\Phi]$ est composé de domaines de type demi-plan, bande, couronne et disque.

III. Domaine D de type *couronne*. La fonction $w = e^S$ envoie bijectivement $\tilde{D}$ sur la couronne $0 < a < |w| < b < \infty$. Le bord d'un tel domaine est composé de deux composantes connexes (fig. 5).

IV. Domaine D de type *disque*. La fonction $w = e^S$ applique bijectivement $\tilde{D}$ sur le domaine $0 < |w| < a$ ou $a < |w| < \infty$. Le bord d'un tel domaine est formé d'une courbe connexe et d'un point z_0 qui est un pôle d'ordre deux (fig. 6). Si $z_0 \neq \infty$, on a

$$a = (z - z_0)^2 q(z)|_{z=z_0} > 0.$$

La famille des lignes de niveau $\{l_c\}$ possède des points critiques des types suivants:

1) z_0 est un point de retour d'ordre k, $k = -1, 1, 2, \ldots$ Si $z_0 \neq \infty$, $k = -1$, alors z_0 est un pôle d'ordre un, c'est-à-dire un point singulier régulier de l'équation (1).

2) z_0 est un pôle d'ordre deux, fini ou infini (un point singulier régulier de l'équation (1)). Supposons que $z_0 \neq \infty$. Deux cas sont possibles:

a) $a > 0$: un petit voisinage U troué du point singulier est entièrement recouvert par un domaine de type disque ;

b) $a \notin]0, +\infty[$: U est recouvert par l'adhérence d'un nombre fini de domaines de type bande.

3) z_0 est un point singulier irrégulier d'ordre $k \geqslant 3$. Si $z_0 \neq \infty$, c'est un pôle d'ordre k de la fonction $q(z)$. Dans ce cas U est recouvert par l'adhérence de k domaines de type demi-plan et d'un nombre fini de domaines de type bande.

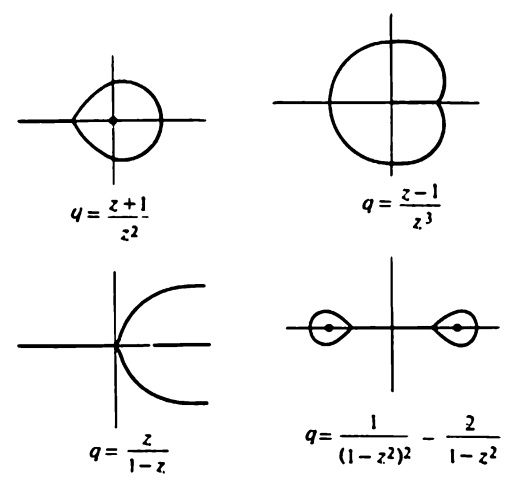


Fig. 7

La figure 7 représente des exemples de lignes de Stokes.

§ 2. Approximations WKB dans le plan complexe

1. Chemins canoniques. Soit D un domaine simplement connexe sur la sphère de Riemann et supposons que $Q(z)$ est une fonction holomorphe ne présentant pas de zéro dans D. Considérons l'équation

$$w'' - Q(z)\, w = 0 \qquad (1)$$

et fixons une détermination de la fonction $S(z_0, z) = \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{Q(t)}\, dt$ dans le domaine D. Au chap. II, § 2, nous avons établi des approximations WKB pour les solutions de l'équation (1) sur l'axe réel. L'équation (1) a été ramenée à un système d'équations intégrales et nous avons vu qu'il était prépondérant que sur le chemin d'intégration (x, b), $x < b$, soit réalisée l'inégalité $\operatorname{Re} S(t, x) \leqslant 0$,

$t \in]x, b[$, de sorte que $|\exp\{S(t, x)\}| \leqslant 1$. Ce fait peut être formulé aussi de la manière suivante: la fonction Re $S(x_0, x)$ ne décroît pas le long du chemin d'intégration. La généralisation de cette propriété à un chemin dans le plan complexe est la notion de chemin canonique.

Soit $\gamma = \gamma(z_0, z^*)$ une courbe différentiable par morceaux contenue dans le domaine D et reliant les points $z_0 \in D$ et $z^* \in \partial D$. La courbe γ s'appelle *chemin canonique* si la fonction Re $S(z_0, z)$ ne décroît pas le long de γ (lorsque le point z se déplace de z_0 en z^*). Les lignes de niveau Re S = const, Im S = const, qui ne contiennent pas de points de retour, sont des chemins canoniques. Pour z^* on prendra généralement l'un des points singuliers de l'équation (1).

Désignons par $S(D)$ et $S(\gamma)$ les images du domaine D et du chemin γ par l'application $S = S(z_0, z)$. Si γ est un chemin canonique, la courbe $S(\gamma)$ jouit de la propriété suivante: son intersection avec une courbe verticale quelconque Re S = const soit est vide, soit est constituée d'une seule composante connexe.

Exemples. 1. Supposons que D est un domaine de type demi-plan $z_0 \in \partial D$ et que la détermination de $\sqrt{Q(z)}$ est telle que Re $S(z_0, z) > 0$ dans D. La contre-image de tout rayon $S(\gamma)$ contenu dans $S(D)$

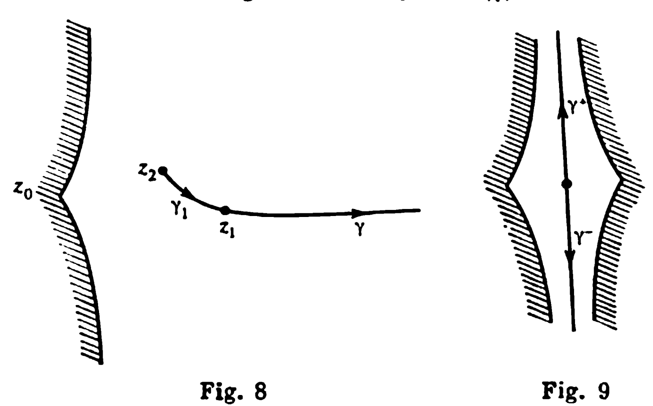


Fig. 8 Fig. 9

est un chemin canonique γ. Si $z_1 \in D$, deux chemins canoniques quelconques $\gamma_0(z_1, z^*)$, $\gamma_1(z_1, z^*)$ contenus dans D peuvent être continûment déformés l'un en l'autre (sur la sphère de Riemann), de telle sorte que tout chemin « intermédiaire » $\gamma_t(z_1, z^*)$, $0 < t < 1$, soit canonique. De tels chemins sont dits *équivalents* (ou *S-homotopes*).

Soient $z_1, z_2 \in D$, $\gamma(z_1, z^*)$ un chemin canonique et Re $S(z_0, z_2) \geqslant$ Re $S(z_0, z_1)$ pour fixer les idées. On peut alors relier les points z_1 et z_2 par un chemin canonique $\gamma_1(z_1, z_2)$ tel que le chemin $\gamma\gamma_1$ soit canonique (fig. 8). On dira que tous les chemins canoniques contenus dans D sont *équivalents* (ou *S-homotopes*).

Supposons pour simplifier que ∂D contient un nombre fini de points de retour. Extirpons leurs ε-voisinages de $S(D)$ et désignons la contre-image du domaine obtenu par D_ε. Tous les chemins canoniques contenus dans D_ε sont équivalents.

2. Soit D un domaine de type bande (§ 1). Tous les chemins canoniques infinis contenus dans D se répartissent en deux classes $\gamma^\pm$ de chemins S-homotopes : $\operatorname{Im} S \to \pm\infty$ le long d'un chemin de classe $\gamma^\pm$ (fig. 9).

Remarque. Considérons un domaine de type bande (cf. fig. 9). Sur la surface de Riemann ce domaine présente un point frontière à l'infini, le point $z = \infty$, qui est un point singulier de l'équation (1). Mais du point de vue de la théorie asymptotique il faut admettre que ∂D contient deux points à l'infini $z^\pm$: $\operatorname{Im} S \to \pm\infty$ lorsque $z \to z^\pm$. Plus exactement, le point frontière à l'infini est défini par une classe de chemins canoniques équivalents.

2. Théorème fondamental. Supposons qu'il existe un chemin canonique reliant les points $z \in D$ et $z^* \in \partial D$ pour l'équation (1). Posons

$$\rho(z, D) = \inf_{\gamma(z, z^*)} \int_{\gamma(z, z^*)} |\alpha_1(t)|\,|dt|, \tag{2}$$

où inf est pris sur tous les chemins canoniques reliant z à z^*, et la fonction $\alpha_1(t)$ est donnée par la formule (9) du chap. II, § 1. Supposons remplies les conditions suivantes :

1) pour chaque point $z \in D$ il existe un chemin canonique $\gamma(z, z^*)$;

2) $\rho(z, D) < \infty$ pour tout point $z \in D$ (pour une classe fixe de chemins S-homotopes).

On a alors le

Théorème. *L'équation* (1) *admet une solution* $w(z)$ *telle que pour* $z \in D$ *sont valables les estimations*

$$\begin{gathered}\left|\frac{w(z)}{Q^{-1/4}(z)\exp\{-S(z_0, z)\}} - 1\right| \leqslant 2\left(e^{2\rho(z,D)} - 1\right),\\ \left|\frac{w'(z)}{Q^{1/4}(z)\exp\{-S(z_0, z)\}} + 1\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4}\left|\frac{Q'(z)}{Q^{3/2}(z)}\right| + 4\left[1 + \frac{1}{4}\left|\frac{Q'(z)}{Q^{3/2}(z)}\right|\right]\left[e^{2\rho(z,D)} - 1\right],\end{gathered} \tag{3}$$

où $z_0 \in D$ *est un point fixe quelconque.*

Ce théorème appartient à G. Birkhoff [44]. Sa démonstration reprend *ad litteram* celle du théorème du § 2, chap. I. Pour contour

d'intégration on choisit un chemin canonique $\gamma(z, z^*)$ sur lequel $\operatorname{Re} S(t, z) \leqslant 0$, de sorte que

$$|\exp\{2S(t, z)\}| \leqslant 1.$$

Comme dans le cas réel, les formules asymptotiques pour w et w' résultent des estimations (3). Soient γ un chemin canonique, $z \in \gamma$; son arc $\gamma(z, z^*)$ est alors un chemin canonique. De la condition 2) il suit que

$$\lim_{z \to z^*} \int_{\gamma(z, z^*)} |\alpha_1(t)|\, |dt| = 0. \qquad (4)$$

Donc pour $z \in \gamma$ et $z \to z^*$ on a la formule asymptotique

$$w(z) \sim Q^{-1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}. \qquad (5)$$

Cette relation est réalisée si $z \to z^*$ le long d'un chemin canonique. Dans la suite on notera par « $z \to z^*$ » le fait que « $z \to z^*$ le long d'un chemin canonique ».

Soit satisfaite la condition

$$\lim_{z \to z^*} Q'(z)\, Q^{-3/2}(z) = 0; \qquad (6)$$

les estimations (3) entraînent alors

$$w'(z) \sim -Q^{1/4}(z) \exp\{-S(z_0, z)\}, \quad z \to z^*. \qquad (7)$$

La condition 1) est réalisée pour les domaines des exemples 1 et 2 ci-dessus ; étudions la convergence de l'intégrale

$$\rho(z) = \int_z^{z^*} |\alpha_1(t)|\, |dt|, \quad z \neq z^*.$$

Soit $z^* \neq \infty$; posons $z^* = 0$ par souci de simplicité.

Exemples. 1. Supposons que $z = 0$ est un pôle d'ordre $n \geqslant 3$ de la fonction $Q(z)$; alors $\rho(z) < \infty$ si l'intégrale est prise sur le segment $[0, z]$. Ceci est vrai dans le cas où $Q(z) \sim az^\alpha$, $a \neq 0$, $\alpha < -2$, lorsque $z \to 0$ dans un secteur D de sommet $z = 0$ et cette représentation asymptotique est deux fois dérivable. L'intégrale $\rho(z) = \infty$ pour $\alpha \geqslant -2$. En particulier, $\rho(z) = \infty$ si $z = 0$ est un point singulier régulier de l'équation (1).

2. Supposons que $Q(z)$ est un polynôme, $z^* = \infty$ et l'intégrale $\rho(z)$ est prise le long d'un rayon ; alors $\rho(z) < \infty$. Ceci est vrai lorsque $Q(z) \sim az^\alpha$ pour $z \to \infty$ dans le secteur D si $a \neq 0$, $\alpha > -2$. Si $\alpha \leqslant -2$, on a $\rho(z) = \infty$.

Si les conditions du théorème et les conditions (6) sont satisfaites, l'équation (1) admet une solution $\tilde{w}(z)$ telle que pour $z \to z^*$

$$\tilde{w}(z) \sim Q^{-1/4}(z) \exp\{S(z_0, z)\}, \quad \tilde{w}'(z) \sim Q^{1/4}(z) \exp\{S(z_0, z)\}.$$

Les solutions $w(z)$ et $\tilde{w}(z)$ forment un système fondamental.

3. Conditions aux limites pour les solutions. Dans les problèmes singuliers aux valeurs propres, les problèmes de diffusion et autres, les conditions aux limites sont données au point à l'infini ou en un point singulier de l'équation. Formulons leurs analogues dans le plan complexe en supposant que sont satisfaites les conditions du théorème et les conditions (6). Soit $\gamma = \gamma(z_0, z^*)$ un chemin canonique ; deux cas peuvent se présenter :

$$\lim_{z \to z^*,\, z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z_0, z) = +\infty, \tag{8a}$$

$$\lim_{z \to z^*,\, z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z_0, z) = a, \qquad 0 \leqslant a < \infty, \tag{8b}$$

ce qui conduit à deux types de conditions aux limites.

I. *Condition de décroissance de la solution.* Soit $w(z)$ la solution construite dans le théorème du n° 2 ; dans le cas (8a)

$$\lim_{z \to z^*,\, z \in \gamma} w(z) = 0. \tag{9}$$

Comme $\lim\limits_{z \to z^*,\, z \in \gamma} \tilde{w}(z) = \infty$, toute solution vérifiant la condition (9) sera de la forme $\text{const} \cdot w(z)$.

II. *Condition de rayonnement.* Dans le cas (8b) la solution $w(z)$ construite dans le théorème du n° 2 satisfait la condition

$$\lim_{z \to z^*,\, z \in \gamma} \frac{w'(z)}{\sqrt{Q(z)}\, w(z)} = -1. \tag{10}$$

Cette condition est satisfaite par une seule solution.

Dans les deux cas la solution qui est justiciable de la formule asymptotique (5) est unique, c'est-à-dire que cette solution est définie de façon unique par sa représentation asymptotique.

Les résultats ci-dessus s'étendent aux équations de la forme

$$(P(z)\, w')' - Q(z)\, w = 0$$

(cf. chap. II, § 2).

§ 3. Equations à coefficients polynomiaux. Représentation asymptotique globale des solutions

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$w'' + p(z, \lambda)\, w' + q(z, \lambda)\, w = 0, \tag{1}$$

où p et q sont des polynômes de z dont les coefficients sont fonctions d'un grand paramètre $\lambda > 0$. Le problème fondamental de la théorie

asymptotique posé pour l'équation (1) s'énonce comme suit: trouver la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions lorsque $\lambda \to +\infty$ dans le plan de z complexe tout entier.

Ce problème n'a été complètement étudié que dans les cas où la dépendance des coefficients de l'équation par rapport au paramètre est simple. Décrivons l'algorithme de résolution du problème fondamental pour l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z)\, w = 0. \tag{2}$$

On introduit un ensemble fini de domaines non bornés $\{D_j\}$ (appelés *canoniques*) dont la réunion recouvre le plan de z complexe tout entier à l'exception des voisinages des points de retour. On construit des systèmes fondamentaux spéciaux (appelés *élémentaires*) (u_j, v_j) dont la représentation asymptotique est partout connue dans D_j. Toute solution $w(z, \lambda)$ de l'équation (2) peut être mise sous la forme

$$w(z, \lambda) = \alpha_j u_j + \beta_j v_j = \alpha_k u_k + \beta_k v_k,$$

où α_l, β_l ne dépendent que de λ. On a

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \Omega_{jk}(\lambda) \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La matrice $\Omega_{jk}(\lambda)$ s'appelle *matrice de passage* du système fondamental (u_j, v_j) au système (u_k, v_k) et ne dépend pas de w. Il est évident que

$$\Omega_{jl} = \Omega_{kl}\ \Omega_{jk}, \quad \Omega_{jk} = \Omega_{kj}^{-1}.$$

On démontre que toute matrice de passage d'un système élémentaire à un autre est le produit d'un nombre fini de matrices de passage élémentaires appartenant à l'un des quatre types. La représentation asymptotique des matrices de passage élémentaires est calculée dans le nº 3.

La résolution du problème fondamental se décompose donc en trois étapes.

1. *Problème de topologie.* Trouver les lignes de Stokes de l'équation (1).

2. *Problème d'analyse.* Trouver la représentation asymptotique des systèmes fondamentaux élémentaires de solutions.

3. *Problème d'algèbre.* Multiplier les matrices de passage.

Le problème 1 est en fait un problème d'ordinateur: on peut en effet se servir d'un ordinateur pour trouver les points de retour et construire les lignes de Stokes pour une équation donnée. Le problème 2 a été résolu précédemment. La représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions au voisinage des points de retour est étudiée dans le chap. IV.

L'algorithme mentionné est général : il convient et dans le cas où $q(z)$ est une fonction entière ou méromorphe, et dans le cas où la dépendance des coefficients de l'équation par rapport au paramètre est plus complexe.

2. Systèmes fondamentaux élémentaires de solutions de l'équation (1).

2.1. *Domaines canoniques.* Les points de retour de l'équation (1) sont indépendants de λ. Introduisons la notation

$$S(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{q(t)}\, dt. \tag{4}$$

Soit $\lambda > 0$; les lignes de Stokes sont alors définies par l'équation

$$\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0,$$

où z_0 est un point de retour, et ne dépendent pas de λ (comparer avec (3) du § 2).

Un domaine D du plan de z complexe s'appelle *canonique* si la fonction $S(z_0, z)$ envoie bijectivement D sur le plan complexe tout entier muni d'un nombre fini de coupures verticales (fig. 10). Le domaine D est simplement connexe et ne contient pas de points de retour, ∂D est constitué de lignes de Stokes (les contre-images des bords des coupures). Le domaine canonique D est la réunion de deux domaines de type demi-plan (les demi-plans de « gauche » et de « droite ») et de quelques domaines de type bande.

Extirpons de $S(D)$ les ε-voisinages gauches (resp. droits) des coupures et les ε-voisinages des points de retour (cf. fig. 10) ; désignons la contre-image du domaine obtenu par D_ε^+ (resp. D_ε^-). Pour chaque point $z^* \in D_\varepsilon^+$ il existe un chemin canonique infini $\gamma^+(z^*)$ tel que $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to +\infty$ lorsque $z \in \gamma^+$, $z \to \infty$. Pour chaque point $z^* \in D_\varepsilon^-$ il existe un chemin infini $\gamma^-(z^*)$ tel que le chemin $-\gamma^-(z^*)$ est canonique et $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to -\infty$ lorsque $z \in \gamma^-$, $z \to \infty$.

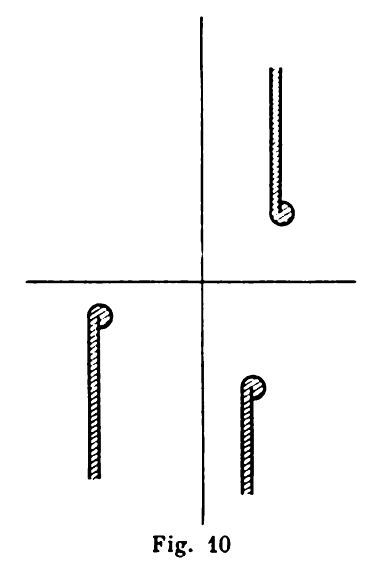


Fig. 10

2.2. *Terme principal de la représentation asymptotique des solutions.* Supposons que D est un domaine canonique et que $\lambda > 0$ est fixe. On rappelle que toute solution de l'équation (2) est une fonction entière de z. L'équation (2) admet une solution $w_1(z, \lambda)$, unique à un facteur multiplicatif près, telle que

$$\lim w_1(z, \lambda) = 0, \quad z \to \infty, \quad \operatorname{Re} S(z_0, z) \to +\infty, \tag{5}$$

et une solution $w_2(z, \lambda)$, unique à un facteur multiplicatif près, telle que

$$\lim w_2(z, \lambda) = 0, \quad z \to \infty, \quad \operatorname{Re} S(z_0, z) \to -\infty. \tag{5'}$$

Ces solutions forment un système fondamental pour $\lambda \gg 1$. Pour w_1 prenons la solution w mentionnée dans le théorème du § 2.

Posons

$$\tilde{w}_{1,2}(z, \lambda; z_0) = q^{-1/4}(z) \exp\{\mp \lambda S(z_0, z)\},$$
$$\rho^{\pm}(z) = \int_{\gamma^{\pm}(z)} |\alpha_1(t)|\, |dt|, \tag{6}$$

la détermination de $\sqrt[4]{q(z)}$ est fixe dans D. En vertu de (3) du § 2, on a

$$\left| \frac{w_1(z, \lambda)}{w_1(z, \lambda; z_0)} - 1 \right| \leqslant 2\left(e^{\lambda^{-1}\rho^+(z)} - 1\right)$$

pour $z \in D_\varepsilon^+$, $\lambda > 0$. Fixons $\lambda_0 > 0$; pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $z \in D_\varepsilon^+$ on a alors

$$\begin{gathered} w_1(z, \lambda) = \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0)\,[1 + \lambda^{-1}\varphi_1(z, \lambda)], \\ |\varphi_1(z, \lambda)| \leqslant C\rho^+(z), \end{gathered} \tag{7}$$

où C est indépendant de λ. Donc

$$w_1(z, \lambda) \sim \tilde{w}_1(z, \lambda; z_0)$$

et, de plus, cette représentation asymptotique est *double*. Plus exactement, elle est valable si

a) $\lambda \to +\infty$ uniformément en $z \in D_\varepsilon^+$;

b) $z \to \infty$ de telle sorte que $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to +\infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$.

De façon analogue, il existe une solution w_2 telle que

$$\begin{gathered} w_2(z, \lambda) = \tilde{w}_2(z, \lambda; z_0)\,[1 + \lambda^{-1}\varphi_2(z, \lambda)], \\ |\varphi_2(z, \lambda)| \leqslant \varepsilon_2(z). \end{gathered} \tag{8}$$

La représentation asymptotique $w_2' \sim \tilde{w}_2$ est double ; elle est valable si

a) $\lambda \to +\infty$ uniformément en $z \in D_\varepsilon^-$;

b) $z \to \infty$ de telle sorte que $\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z) \to -\infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$.

Des représentations asymptotiques doubles analogues sont valables pour toutes les dérivées par rapport à z et à λ.

Si $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$, (w_1, w_2) est un système fondamental de solutions. Ceci étant, $w_1(z) \to 0$ (resp. $w_1(z) \to \infty$) lorsque $z \to \infty$, $\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z) \to +\infty$ (resp. $\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z) \to -\infty$) et $w_2(z) \to 0$ (resp. $w_2(z) \to \infty$) lorsque $z \to \infty$, $\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z) \to -\infty$ (resp. $\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z) \to +\infty$).

Signalons un cas particulier important. Supposons que D est un domaine canonique et que toutes les coupures dans $[S\,(D)]$ sont orientées dans le même sens, vers le bas pour fixer les idées. Alors

$$\lim_{z\to\infty,\, z\in D} \varphi_j(z, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2,$$

si $\mathrm{Im}\, S\,(z_0, z) \to +\infty$ ou $|\,\mathrm{Re}\, S\,(z_0, z)\,| \to \infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0$, où $\lambda_0 > 0$ est arbitraire mais fixe.

2.3. *Domaines maximaux de validité de la représentation asymptotique WKB.* Soient D_0 un domaine de type demi-plan, $z_0 \in \partial D_0$ un point de retour, la détermination de la fonction $S\,(z_0, z)$ dans D_0 étant choisie de telle sorte que $\mathrm{Re}\, S > 0$ pour $z \in D$. L'équation (1) admet une solution w_1 telle que

$$w_1(z, \lambda) = \tilde{w}_1(z, \lambda;\ z_0)\,[1 + O(\lambda^{-1})] \tag{9}$$

lorsque $\alpha \to \infty$ uniformément en $z \in D_{0\varepsilon}$. Le domaine $D_{0\varepsilon}$ est le domaine D_0 privé des voisinages des points de retour frontières. Par ailleurs, $w_1 \to 0$ pour $z \in D_0$, $z \to \infty$, pour chaque $\lambda > 0$ fixe. Posons le problème suivant: trouver le plus grand domaine D du plan de z complexe dans lequel est valable le développement asymptotique (9).

Exemples. 1. Supposons que $q\,(z) = z$ et que D_0 est le domaine $|\,\mathrm{Arg}\, z\,| < \pi/2$. Du point de retour $z = 0$ partent trois lignes de Stokes l_1, l_2 et l_3: les rayons $\mathrm{Arg}\, z = \pm\pi/3$ et $\mathrm{Arg}\, z = \pi$. Soit D le plan de z complexe muni d'une coupure le long de l_3 ; la fonction $S\,(0, z) = (2/3)\, z^{3/2}$, $\sqrt{x} > 0$ pour $x > 0$, envoie bijectivement D dans un domaine composé de trois demi-plans. Donc pour chaque point $z \in D$ il existe un chemin canonique $\gamma^+(z)$ qui finit dans le domaine D_0 et $\mathrm{Re}\, S \to +\infty$ le long de $\gamma^+(z)$. Supposons que D_ε est le domaine D privé d'un ε-voisinage de la coupure le long de l_3. La représentation asymptotique (9) est alors valable dans D_ε en

vertu du théorème du § 2. Ceci étant, $\varepsilon > 0$ peut être choisi aussi petit que l'on veut mais indépendant de λ.

La représentation asymptotique (9) n'est valable dans aucun autre domaine plus grand. En effet, supposons que l'on puisse « gommer » une partie de la coupure l_3, c'est-à-dire ajouter à D_ε un ε-voisinage d'un segment de la forme $[x_1, x_2]$, $x_j < 0$. La fonction $\tilde{w}_1$ présente un point de branchement $z = 0$, donc n'est pas univalente dans le domaine $\tilde{D}_\varepsilon$, tandis que la solution w_1 est une fonction univalente. Remarquons aussi que $\tilde{D}_\varepsilon$ ne satisfait pas les hypothèses du théorème du § 2, puisqu'il n'existe de chemin canonique $\gamma^+(z)$ pour aucun point z situé sur l'un des bords de la coupure l_3.

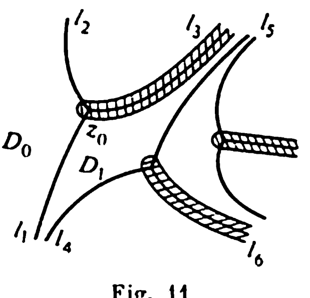


Fig. 11

2. Supposons que $q(z) = z^n$, $n \geqslant 2$ est un entier; alors $z = 0$ est un point de retour multiple. Soit D_0 le domaine $|\operatorname{Arg} z| < \pi/(n+2)$. Le chemin canonique $\gamma^+(z)$ existe alors pour tout point z contenu dans le domaine D: $|\operatorname{Arg} z| < 3\pi/(n+2)$ et il n'existe pas pour les points situés sur ∂D. La représentation asymptotique (9) est valable dans le domaine D_ε déduit de D par extraction d'un ε-voisinage de ∂D. La solution w_1 s'exprime par l'intermédiaire des fonctions de Bessel dont les représentations asymptotiques entraînent la maximalité du domaine D_ε.

3. Supposons que $q(z) = z^2 - 1$, et que D est le domaine $\mathrm{I} \cup \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$ (cf. fig. 3). Pour tout point $z \in D$ (resp. $z \in \partial D$) il existe (resp. il n'existe pas) un chemin canonique $\gamma^+(z)$, et la représentation asymptotique (9) est valable dans D_ε. La maximalité du domaine D_ε résulte des représentations asymptotiques connues des fonctions de Weber.

Supposons que $q(z) \not\equiv \text{const}$ est un polynôme tel que

1) tous ses zéros sont simples;

2) l'équation (2) ne possède pas de lignes de Stokes finies.

Construisons le plus grand domaine de validité de la représentation asymptotique (9). En vertu de 2) le bord ∂D_0 est composé de deux lignes de Stokes: l_1 et l_2, et du point de retour $z_0 \in \partial D_0$ est issue encore une ligne de Stokes, l_3. Faisons une coupure le long de l_3 et retirons son ε-voisinage du plan complexe. Si $q(z)$ est une fonction linéaire, le domaine D_ε obtenu est maximal (exemple 1). Dans le cas contraire, D_0 est contigu à un domaine D_1 de type bande (fig. 11) et ∂D_1 contient une composante connexe, composée de lignes

de Stokes l_4 et l_5 et d'un point de retour z_1. Du point z_1 est issue une autre ligne de Stokes, l_6 ; retirons son ε-voisinage du plan complexe. Si $q(z)$ est du second degré, le domaine D_ε obtenu est maximal, dans le cas contraire il faut poursuivre cette procédure. A chaque pas, la coupure est effectuée le long de la ligne de Stokes qui n'appartient pas au dernier domaine ajouté (de type demi-plan ou bande).

Soient remplies les conditions 1) et 2). Le domaine maximal D_ε de validité de la représentation asymptotique (9) est le plan complexe tout entier privé des voisinages de certaines lignes de Stokes.

Ceci étant, $\varepsilon > 0$ peut être choisi aussi petit que l'on veut mais indépendant de λ. Il est plus commode de s'exprimer ainsi : D est un plan muni d'une coupure le long d'une ligne de Stokes. La coupure s'effectue le long de l'une des trois lignes de Stokes issues de chaque point de retour (cf. fig. 11). L'algorithme de construction du domaine D est indiqué ci-dessus. Dans ce cas l'adhérence $[D]$ coïncide avec le plan de z complexe tout entier. Si l'une des conditions 1) ou 2) n'est pas satisfaite, $C_z \setminus [D]$ est un domaine (exemples 2 et 3).

Indiquons les propriétés de la solution $w_1(z, \lambda)$ pour $\lambda \gg 1$ fixe.

1. *Comportement de la solution w_1 lorsque $z \to +\infty$.* Par construction, $\operatorname{Re} S(z_0, z) < 0$ pour $z \notin D_0 \cup \partial D_0$. Soient $D_1 \neq D_0$ un domaine de type demi-plan et S un secteur contenu dans D_1. Alors $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to -\infty$ pour $z \in S$, $z \to \infty$, de sorte que

$$w_1(z, \lambda) \to \infty, \quad z \to \infty, \quad z \in S.$$

Donc, lorsque $z \to \infty$, la solution w_1 décroît exponentiellement dans le domaine D_0 et croît exponentiellement dans tous les autres domaines de type demi-plan.

2. *Zéros de la solution w_1.* De la formule (9) il s'ensuit que w_1 ne possède pas de zéro dans le domaine maximal D de validité de la représentation asymptotique. Cette solution admet une infinité de zéros au voisinage de chaque ligne de Stokes suivant laquelle a été effectuée la coupure.

2.4. *La solution w_1 du point de vue de la théorie des fonctions entières.* Supposons que

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \operatorname{Re} a_0 > 0, \ n \geqslant 1.$$

La solution w_1 est alors une fonction entière à croissance complètement régulière, d'ordre de croissance $n/2 + 1$ et de type $2\lambda |a_0| / (n+2)$.

La solution w_1 dépend des paramètres $\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_n$. Si $\lambda > 0$ est fixe, la solution w_1 est une fonction holomorphe de a_0 dans le domaine $\operatorname{Re} a_0 > 0$ et une fonction entière des variables $z, a_1, \ldots, a_n$.

2.5. *Développements asymptotiques des solutions.* Soient D un domaine canonique, w_1 et w_2 des solutions de la forme (7) et (8). Lorsque $\lambda \to +\infty$, $z \in D_\varepsilon^+ \cap D_\varepsilon^-$, on a alors les développements asymptotiques

$$\begin{aligned} w_1(z, \lambda) &\sim q^{-1/4}(z) \exp\{-\lambda S(z_0, z)\} \times \\ &\qquad \times \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma^+(z)} \alpha_k(t)\,dt\right\}, \\ w_2(z, \lambda) &\sim q^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\} \times \\ &\qquad \times \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{\gamma^-(z)} \alpha_k(t)\,dt\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Les fonctions $\alpha_k(z)$ sont accessibles au chap. II, § 3. Le premier (resp. le second) développement asymptotique reste en vigueur lorsque $z \in D$, $z \to \infty$, de telle sorte que $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to +\infty$ (resp. $-\infty$). Ces deux développements peuvent être dérivés par rapport à z et à λ autant de fois qu'on le veut.

Le développement asymptotique de w_1 peut encore être mis sous la forme

$$w_1(z, \lambda) = \tilde{w}_1(z, \lambda;\ z_0)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k(z)\right],$$

où les $a_k(z)$ se déterminent à partir des relations

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_k(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma^+(z)} \alpha_k(t)\,dt\right\},$$

l'égalité étant comprise au sens d'une égalité des séries entières formelles de λ^{-1}. Pour $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$, $z \in D_\varepsilon^+$ on a l'estimation

$$\left|\frac{w_1(z, \lambda)}{\tilde{w}_1(z, \lambda;\ z_0)} - 1 - \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k} a_k(z)\right| \leqslant C_N(1+|z|)^{-\alpha_N},$$

$$\alpha_N = (N+1)(n/2+1),$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, n est le degré du polynôme $q(z)$. Les fonctions $a_k(z)$ sont holomorphes dans D et $a_k(z) = O(z^{-k(n/2+1)})$ lorsque $z \to \infty$, $z \in D$. On a des majorations analogues pour la solution w_2 et pour les dérivées de w_1 et de w_2.

2.6. *Systèmes fondamentaux élémentaires de solutions.* Soient D un domaine canonique, l une ligne de Stokes contenue dans D, $z_0 \in l$ un point de retour (l'origine de l). Tout *système fondamental élémentaire de solutions* $(u(z), v(z))$ est défini de façon unique par la donnée

du triplet (l, z_0, D). Choisissons la détermination de la fonction $S(z_0, z)$ dans le domaine D de telle sorte que

$$\operatorname{Im} S(z_0, z) > 0, \quad z \in l. \tag{11}$$

Les solutions u et v admettent les représentations asymptotiques

$$\begin{aligned} u(z) &\sim c q^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\}, \\ v(z) &\sim c q^{-1/4}(z) \exp\{-\lambda S(z_0, z)\}, \end{aligned} \tag{12}$$

où c est une constante de normalisation:

$$|c| = 1, \qquad \lim_{z \to z_0,\, z \in l} \operatorname{Arg}[c q^{-1/4}(z)] = 0. \tag{13}$$

Les formules asymptotiques (12) sont valables pour u (resp. v) lorsque $z \to \infty$ à $\lambda > 0$ fixe dans le domaine D, de telle sorte que $\operatorname{Re} S(z_0, z) \to +\infty$ (resp. $-\infty$). Les solutions u et v sont par construction proportionnelles aux solutions w_2 et w_1 du n° 2.2 et sont définies de façon unique par leurs représentations asymptotiques (par rapport à z). Signalons que $\operatorname{Re} S(z_0, z) > 0$ (resp. < 0) à droite (resp. à gauche) de l au voisinage de l.

3. Matrices de passage. Il existe quatre types de matrices de passage appelées *matrices élémentaires.*

1) $(l, z_1, D) \to (l, z_2, D)$: seul change le sens de la ligne de Stokes l; ce passage n'est possible que pour une ligne de Stokes finie.

2) $(l_1, z_1, D) \to (l_2, z_2, D)$ et de plus les rayons $S(l_1)$ et $S(l_2)$ sont de même sens.

3) $(l, z_0, D_1) \to (l, z_0, D_2)$: seul change le domaine canonique.

4) $(l_1, z_0, D_1) \to (l_2, z_0, D_2)$, où l_1 et l_2 sont des lignes de Stokes voisines issues d'un même point de retour.

Toute matrice de passage $(l_1, z_1, D_1) \to (l_2, z_2, D_2)$ d'un système fondamental élémentaire à un autre est le produit d'un nombre fini de matrices de passage élémentaires.

3.1. *Matrice de passage* $(l, z_1, D) \to (l, z_2, D)$. Cette matrice est de la forme

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda\alpha} \\ e^{i\lambda\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\alpha = |S(z_1, z_2)|, \qquad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

3.2. *Matrice de passage* $(l_1, z_1, D) \to (l_2, z_2, D)$. Supposons que les rayons $S(l_1)$ et $S(l_2)$ sont de même sens et que l_2 est située à

gauche de l_1. Alors

$$\Omega = e^{i\varphi_0} \begin{bmatrix} e^{-\lambda a} & 0 \\ 0 & e^{\lambda a} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$a = S(z_1, z_2), \quad \operatorname{Re} a > 0, \quad e^{i\varphi_0} = c_2/c_1.$$

Les formules (14) et (15) sont exactes.

3.3. *Matrice de passage* $(l, z_0, D_1) \to (l, z_0, D_2)$. Seul change le domaine canonique contenant l. Par exemple (cf. fig. 3, $q = 1 - z^2$), pour D_1 on peut prendre la réunion des domaines I, II et III (et des lignes de Stokes correspondantes), pour D_2, la réunion des domaines I, II et IV.

Supposons que D est une composante connexe de $D_1 \cap D_2$ contenant l. Alors $S(D)$ est la bande $-a_- < \operatorname{Re} S < a_+$ à coupures verticales, $a_\pm > 0$. On a

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1+\eta_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & 1+\eta_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = O(\exp\{-2\lambda(a_+ - \varepsilon)\}, && \omega_{21} = O(\exp\{-2\lambda(a_- - \varepsilon)\}), \\ &\eta_{11} = O(\lambda^{-1}), && \eta_{22} = O(\lambda^{-1}), \end{aligned} \tag{16}$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Si $a_- = +\infty$, alors $\eta_{11} = \omega_{21} = 0$; si $a_+ = +\infty$, alors $\omega_{12} = \eta_{22} = 0$.

Remarque. De (16) il s'ensuit que si l'on a besoin de calculer les matrices de passage seulement avec une précision d'ordre $O(\lambda^{-1})$, il suffit d'indiquer un couple (l, z_0) et de ne pas se préoccuper du choix du domaine canonique.

Donnons le développement asymptotique des éléments $\omega_{11}(\lambda)$ et $\omega_{12}(\lambda)$. Supposons que l_1 est un contour infini qui commence dans le domaine D_1 là où $\operatorname{Re} S \to -\infty$ et qui finit dans le domaine D_2 là où $\operatorname{Re} S \to -\infty$; l_2 se définit de la même manière en changeant S par $-S$. Alors

$$\omega_{jj}(\lambda) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_j} \alpha_k(z)\, dz\right\}, \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Les contours l_1 et l_2 sont représentés sur la figure 3.

3.4. *Matrice de passage* $(l_1, z_0, D_1) \to (l_2, z_0, D_2)$. Supposons que z_0 est un point de retour d'ordre n, les lignes de Stokes l_1 et l_2 sont issues de z_0 et l_2 est située à gauche de l_1. Alors

$$\Omega = \exp\left\{-\frac{i\pi n}{2(n+2)}\right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \sin \frac{\pi n}{2(n+2)} \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}). \tag{18}$$

On ne connaît pas d'estimation plus exacte du résidu de $\omega_{22}(\lambda)$ lorsque $n > 1$. Si z_0 est un point de retour simple, on a

$$\Omega = e^{-i\pi/6}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}). \qquad (19)$$

Pour établir le développement asymptotique des matrices de passage, il est nécessaire de préciser le choix des domaines canoniques. Soient z_0 un point de retour simple, l_1, l_2 et l_3 des lignes de Stokes d'origine z_0, l_{j+1} est située à gauche de l_j (les indices sont pris modulo 3). Choisissons les domaines canoniques D_j de telle sorte que la partie de D_j qui est située à gauche de l_j soit confondue avec la partie de D_{j+1} qui se trouve à droite de l_{j+1} et désignons par $\Omega_{j,j+1}$ la matrice de passage $(l_j, z_0, D_j) \to \to (l_{j+1}, z_0, D_{j+1})$. De tels domaines et les systèmes fondamentaux élémentaires de solutions seront dits *compatibles*. Alors

$$\Omega_{j,\,j+1} = e^{-i\pi/6}\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{j,\,j+1}^{-1} \\ 1 & i\alpha_{j+1,\,j+2} \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} = 1,$$

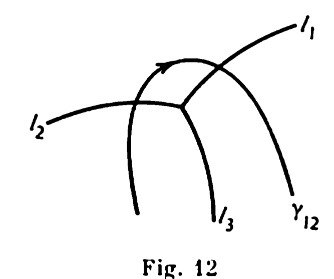


Fig. 12

ce qui résulte de l'identité $\Omega_{31}\Omega_{23}\Omega_{12} = I$. On a le développement asymptotique

$$\alpha_{j,\,j+1}(\lambda) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{\gamma_{j,\,j+1}} \alpha_k(t)\,dt\right\}. \qquad (21)$$

Le contour infini $\gamma_{j,j+1}$ est situé dans $D_j \cup D_{j+1}$, débute en D_{j+} là où Re $S \to +\infty$ et s'achève en D_j là où Re $S \to -\infty$. La détermination de $\sqrt{q(z)}$ est choisie comme pour le système fondamental de solutions (u_j, v_j). La figure 12 représente le contour γ_{12}.

Soient z_0 un point de retour d'ordre n, $\Omega_{j,j+1}$ la matrice de passage $(l_j, z_0, D_j) \to (l_{j+1}, z_0, D_{j+1})$. Alors

$$\Omega_{j,\,j+1} = \exp\left\{-\frac{i\pi n}{2(n+2)}\right\}\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{j,\,j+1}^{-1} \\ 1 & \beta_{j,\,j+1} \end{bmatrix}$$

et $\alpha_{j,\,j+1}$ sont justiciables de la formule (21).

3.5. *Polynômes à coefficients réels.* Dans ce cas les points de retour et les lignes de Stokes de l'équation (2) jouissent de nombreuses propriétés supplémentaires. On rappelle que M^* est l'ensemble symétrique de M par rapport à l'axe réel.

1. Les points de retour et les lignes de Stokes sont symétriques par rapport à l'axe réel.

2. Si x_1 et x_2 sont des points de retour réels, $q(x) < 0$ pour $x \in l = (x_1, x_2)$, alors l est une ligne de Stokes. Dans (14), $\varphi_0 = 0$.

3. Soient x_0 un point de retour réel simple, l_0, l_1 et l_2 des lignes de Stokes d'origine x_0. Alors l'une des lignes de Stokes (l_0 pour fixer les idées) est un intervalle de l'axe réel, $l_2 = l_1^*$ et la ligne $l_1 \diagdown x_0$ est située dans le demi-plan supérieur $\operatorname{Im} z > 0$. Les lignes $l_1 \diagdown x_0$ et $l_2 \diagdown x_0$ ne rencontrent pas l'axe réel.

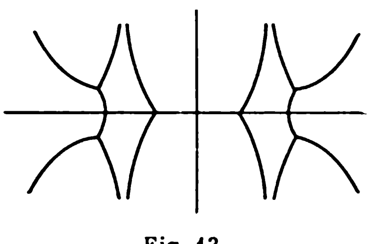


Fig. 13

4. Supposons que x_1 et x_2 sont des points de retour réels simples, $x_2 < x_1$, $q(x) < 0$ pour $x_2 < x < x_1$. Désignons par l_1, l_2 les lignes de Stokes issues des points x_1 et x_2 et situées dans le demi-plan supérieur. Alors $\varphi_0 = -\pi/6$ dans (15).

5. Supposons que la ligne de Stokes l coupe l'axe réel en x_0, $q(x_0) \neq 0$. Alors l est une ligne de Stokes finie, $l = l^*$ (fig. 13), $q(z) = (z^2 - a^2)(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)$, $a, b, c > 0$.

6. Soient x_0 un point de retour réel simple, $q(x) > 0$ pour $x > x_0$. Choisissons la détermination de $\sqrt{q(x)} > 0$ pour $x > x_0$; alors $S(x_0, x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt > 0$ pour $x > x_0$, $S(x_0, +\infty) = +\infty$. Donc le demi-axe $x > x_0$ coupe le domaine D_0 de type demi-plan. Supposons que l et l^* sont des lignes de Stokes issues du point x_0 et situées respectivement dans les demi-plans $\operatorname{Im} z > 0$ et $\operatorname{Im} z < 0$. Il existe un domaine D tel que la fonction S est à un feuillet dans D,

$$D \supset (x_0, +\infty), \quad D \supset D_0, \quad D = D^*, \quad \partial D \supset l \cup l^*,$$

et $S(D)$ est le demi-plan $\operatorname{Re} S > 0$ muni d'un nombre fini de coupures verticales.

7. Supposons que $q(x) < 0$ sur l'axe réel $\mathbf{R}$. Alors $\mathbf{R}$ est contenu dans un domaine D de type bande, $D = D^*$. En effet, supposons que $\sqrt{q(x)} = i\,|\sqrt{q(x)}|$; la fonction $S(0, x)$ envoie alors bijectivement $\mathbf{R}$ dans l'axe imaginaire.

8. Soient $q(x_1) = q(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$, $q(x) > 0$ pour $x_1 < x < x_2$. Désignons par l_1 et l_2 les lignes de Stokes issues des points x_1 et x_2 et contenues dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$. Il existe alors un domaine D tel que $\partial D \supset l_1 \cup l_2$, $D = D^*$, la fonction S est à un feuillet dans D et $S(D)$ est une bande de la forme $a < \operatorname{Re} S < b$ munie d'un nombre fini de coupures verticales.

9. Soit $q(x_0) = 0$, $q(x) < 0$ pour $x > x_0$. Le rayon $l = (x_0, +\infty)$ est alors une ligne de Stokes. Il existe un domaine canonique D tel que $D \supset l$, $D = D^*$ et toutes les coupures frontières du domaine $S(D)$ sont dirigées dans le sens inverse de celui de $S(l)$ (fig. 14).

La réalité du polynôme $q(x)$ permet de préciser certaines formules pour les matrices de passage.

10. Soient x_0 un point de retour réel simple, $q(x) > 0$ pour $x_0 < x < b \leqslant +\infty$. Numérotons les lignes de Stokes l_0, l_1 et $l_{1'}$ issues de x_0 de telle sorte que $l_0 = (a, x_0)$, $\operatorname{Im} z > 0$ sur l_1 et $l_{1'} = l_1^*$. Choisissons les domaines canoniques D_0, D_1 et $D_{1'}$ de telle sorte que

$$D_0 = D_0^*, \quad D_{1'} = D_1^*,$$
$$D_0 \supset l_0, \quad D_1 \supset (x_0, b),$$

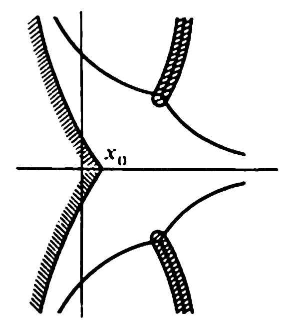


Fig. 14

et considérons les systèmes fondamentaux élémentaires de solutions (u_j, v_j) associés à (l_j, x_0, D_j), $j = 0, 1, 1'$. Si l'on adopte les notations de (20), on obtient alors

$$\alpha_{10}\alpha_{01'} = 1, \quad |\alpha_{1'1}| = 1. \tag{22}$$

11. Supposons que $b = +\infty$ dans les conditions du n° 10. Alors

$$\alpha_{11'} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_{11'}} \alpha_k(z)\,dz\right\},$$

où le contour $l_{11'}$ est représenté sur la figure 15. La détermination

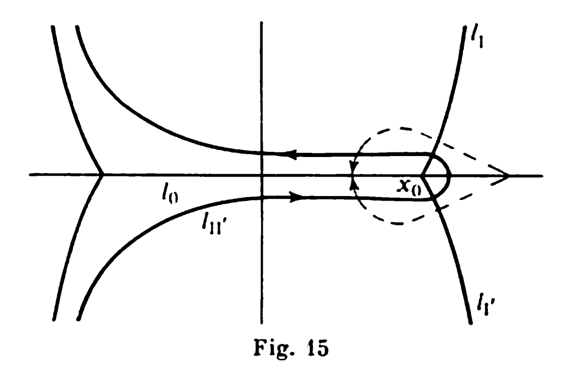


Fig. 15

de la fonction $\sqrt{q(z)}$ est choisie de telle sorte que $\sqrt{q(z)} = i\,|\sqrt{q(z)}|$ sur l'intersection du contour avec l'axe réel.

12. Supposons que les conditions du n° 11 sont satisfaites et que w_1 est une solution réelle de l'équation (2) telle que $w_1(+\infty, \lambda) = 0$. Alors

$$w_1(x, \lambda) \sim cq^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_0, x)\}, \quad \lambda \to +\infty,$$

où c est une constante réelle, $\sqrt{q(x)} > 0$, $\sqrt[4]{q(x)} > 0$ pour $x > x_0$. Formellement on peut déterminer la représentation asymptotique de w_1 sur la ligne de Stokes $l = (a, x_0)$ de la manière suivante.

En prolongeant analytiquement cette représentation asymptotique du demi-axe $x > x_0$ à l_0, en contournant le point de retour x_0 par en haut (resp. par en bas), on obtient les valeurs de w_1^+ (resp. w_1^-). Les chemins suivant lesquels a lieu le prolongement sont indiqués sur la figure 15. La représentation asymptotique de la solution w_1 est alors égale à

$$w_1(x, \lambda) = \frac{1}{2}[w_1^+(x, \lambda) + w_1^-(x, \lambda)].$$

Cette formule est facile à retenir.

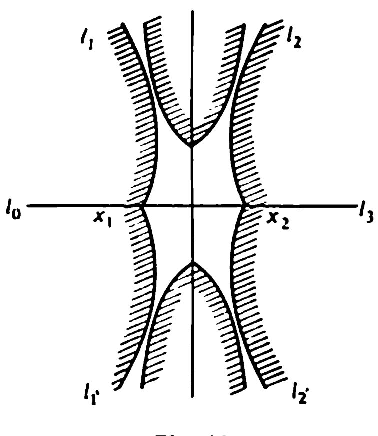


Fig. 16

13. Supposons que $q(x)$ est une fonction à valeurs réelles, $x_1 < x_2$, $q(x_1) = q(x_2) = 0$ et $q(x) > 0$ pour $x_1 < x < x_2$. Soient x_1 et x_2 des points de retour simples; du point x_1 sont alors issues trois lignes de Stokes: l_0, l_1 et l_1^*, du point x_2, trois lignes de Stokes: l_2, l_2^* et l_3 (fig. 16). Ici $\operatorname{Im} z > 0$ pour $z \in l_1$, $z \in l_2$ et les lignes de Stokes l_0 et l_3 sont des intervalles de l'axe réel. Introduisons les systèmes fondamentaux élémentaires de solutions (u_j, v_j) associés aux triplets (l_j, x_j, D_j), $0 \leqslant j \leqslant 3$, où $x_j = x_1$ ou $x_j = x_2$ selon que l'un ou l'autre de ces points de retour est extrémité de la ligne de Stokes l_j, et $(u_{j'}, v_{j'})$, $j = 1, 2$, associés aux triplets (l_j^*, x_j, D_j'). Choisissons les domaines canoniques de telle sorte que $D_0 = D_0^*$, $D_3 = D_3^*$, si bien que

$$v_0(z, \lambda) \equiv \overline{u_0(\bar{z}, \lambda)}, \quad v_3(\bar{z}, \lambda) \equiv \overline{u_3(\bar{z}, \lambda)}.$$

Les autres domaines canoniques seront pris compatibles (n° 3.4), de sorte que, en particulier, on aura l'identité $\alpha_{32}\alpha_{22'}\alpha_{2'3} = 1$. Il existe un domaine D dont la frontière contient les lignes de Stokes l_1, l_1^*, l_2 et l_2^* et qui est envoyé bijectivement par la fonction S dans la

bande $a < \operatorname{Re} S < b$ munie d'un nombre fini de coupures verticales et de plus $D = D^*$. Posons

$$D_2 = D_0^+ \cup D \cup D_3^+ \cup l_1 \cup l_2, \quad D_1 = D_2,$$
$$D_2' = D_0^+ \cup D \cup D_3^- \cup l_1 \cup l_2^*, \quad D_1' = D_2^*,$$

où $D_j^{\pm} = D_j \cap \{\operatorname{Im} z \gtrless 0\}$. Alors [59]

$$|\alpha_{11'}| = (1+\delta)^{-1/2}, \quad |\alpha_{22'}| = (1+\delta)^{1/2},$$
$$\alpha_{1'1} = \alpha_{32}\overline{\alpha_{2'3}}, \quad \operatorname{Im}(\alpha_{10}/\bar{\alpha}_{32}) = 0, \tag{23}$$
$$\delta = e^{-2\lambda\xi}[1 + O(\lambda^{-1})], \quad \xi = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q(x)}\, dx > 0.$$

L'intérêt de ces formules réside dans le fait que les valeurs des modules de ces fonctions sont données avec une précision exponentielle, alors que les valeurs $\alpha_{11'}(\lambda)$ et $\alpha_{22'}(\lambda)$ ne sont calculées qu'à λ^{-N} près pour tout N. En effet,

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \Omega(\lambda) \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix},$$
$$\omega_{22}(\lambda) = \overline{\omega_{11}(\lambda)}, \quad \omega_{21}(\lambda) = \overline{\omega_{12}(\lambda)}.$$

De l'identité

$$\Omega(\lambda) = [(\Omega_{10}\Omega_{21}\Omega_{32})^T]^{-1}$$

il vient

$$\omega_{11} = ie^{\lambda\xi}[-(\alpha_{1'1}\alpha_{2'3})^{-1} + \alpha_{10}e^{-2\lambda\xi}], \quad \omega_{12} = e^{\lambda\xi}\alpha_{32}\alpha_{1'1}^{-1},$$
$$\omega_{21} = e^{\lambda\xi}\alpha_{2'3}^{-1}, \qquad \omega_{22} = ie^{\lambda\xi}\alpha_{32},$$

ce qui nous conduit aux relations

$$\alpha_{1'1} = \alpha_{32}\overline{\alpha_{2'3}}, \quad 1 + \delta = |\alpha_{22'}|^2,$$
$$\delta = e^{-2\lambda\xi}\alpha_{10}(\overline{\alpha_{32}})^{-1}.$$

On s'est servi ici de l'identité $\alpha_{32}\alpha_{22'}\alpha_{2'3} = 1$. La quantité δ est donc réelle et

$$\operatorname{Im}(\alpha_{10}/\bar{\alpha}_{32}) = 0, \quad |\alpha_{22'}| = \sqrt{1+\delta}\, e^{i\varphi_2(\lambda)};$$

on établit de façon analogue les autres relations (23).

4. Dépendance arbitraire des coefficients par rapport au paramètre. Considérons l'équation

$$w'' - Q(z, \lambda)\, w = 0,$$
$$Q(z, \lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(\lambda)\, z^j, \quad a_0(\lambda) \neq 0, \tag{24}$$

où $a_k(\lambda)$ sont des fonctions continues de λ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$. Dans ce cas, les points de retour et les lignes de Stokes de l'équation dépendent de λ. Supposons satisfaites les conditions:

1) Tous les zéros $z_1(\lambda), \ldots, z_n(\lambda)$ du polynôme Q sont simples pour $\lambda \geqslant \lambda_0$.

2) Il existe une fonction $N(\lambda) > 0$, $N(+\infty) = +\infty$ telle que les disques

$$O_k(\lambda) : |z - z_k(\lambda)| \leqslant |Q_z'(z(\lambda), \lambda)|^{-1/3} N(\lambda)$$

ne se coupent pas pour $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Introduisons les notations

$$S(z, \lambda; z_0) = \int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(t, \lambda)}\, dt,$$

$$\tilde{w}_{1,2}(z, \lambda; z_0) = Q^{-1/4}(z, \lambda) \exp\{\pm S(z, \lambda; z_0)\}.$$

Soit $D_0(\lambda)$ un domaine canonique

$$D(\lambda) = D_0(\lambda) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} O_k(\lambda).$$

Pour $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$ l'équation (24) admet des solutions w_1 et w_2 telles que

$$\left| \frac{w_j(z, \lambda)}{\tilde{w}_j(z, \lambda; z_0)} - 1 \right| \leqslant A_j(z) N^{-3/2}(\lambda),$$
$$\left| \frac{w_j'(z, \lambda)}{Q^{1/2}(z, \lambda)\, \tilde{w}_j(z, \lambda; z_0)} \pm 1 \right| \leqslant A_j(z) N^{-3/2}(\lambda), \tag{25}$$

où $j = 1, 2$; le signe plus est pris pour $j = 1$; lorsque $z \to \infty$, $z \in D(\lambda)$, $A_1(z) \to 0$ si $\operatorname{Re} S \to +\infty$ et $A_2(z) \to 0$ si $\operatorname{Re} S \to -\infty$. En particulier,

$$w_j(z, \lambda) \sim \tilde{w}_j(z, \lambda; z_0), \quad \lambda \to +\infty$$

uniformément en $z \in D(\lambda)$.

La formule (19) reste valable pour les matrices de passage à ceci près qu'il faut remplacer les résidus d'ordre $O(\lambda^{-1})$ par des résidus d'ordre $O(N^{-3/2}(\lambda))$.

Exemple. Soient $q(z)$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$, $Q(z, \lambda) = q(z) - \lambda$. On peut alors poser $N(\lambda) = \lambda^{1/3 - 2\varepsilon/3}$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire et les résidus de (25) seront d'ordre $O(\lambda^{-1/2+\varepsilon})$.

5. Paramètres auxiliaires. Considérons l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z, \omega) w = 0,$$
$$q(z, \omega) = a_0(\omega) z^n + a_1(\omega) z^{n-1} + \ldots + a_n(\omega), \tag{26}$$

où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, ω un paramètre complexe, $a_j(\omega)$ des polynômes, $a_0(\omega) \not\equiv 0$. Etudions l'uniformité des formules asymptotiques par rapport au paramètre ω. Posons

$$S(a, b; \omega) = \int_b^a \sqrt{q(z, \omega)}\, dz. \tag{27}$$

5.1. *Graphes de Stokes.* On appelle *graphe de Stokes* $\Phi(\omega_0)$ la réunion de toutes les lignes de Stokes de l'équation (26) pour $\omega = \omega_0$. Deux graphes $\Phi(\omega_1)$ et $\Phi(\omega_2)$ sont dits *équivalents* s'il existe un homéomorphisme $\varphi: \Phi(\omega_1) \to \Phi(\omega_2)$ qui transforme les points de retour en points de retour. Une valeur du paramètre ω_0 est dite *régulière* s'il existe un voisinage $U \ni \omega_0$ tel que tous les graphes de Stokes $\Phi(\omega)$, $\omega \in U$, sont équivalents, et *singulière* dans le cas contraire. Décrivons l'ensemble I de tous les points singuliers ω. On a

$$q(z, \omega) = a_0(\omega)(z - b_1(\omega))^{n_1} \ldots (z - b_k(\omega))^{n_k},$$

où $n_j \geqslant 1$ sont des entiers, $n_1 + \ldots + n_k = n$, $b_j(\omega)$, des fonctions algébriques. Soient I_1 l'ensemble de tous les zéros du coefficient $a_0(\omega)$, I_2 l'ensemble de toutes les valeurs de ω telles que $b_j(\omega) = b_l(\omega)$, $j \neq l$, I_3 l'ensemble de toutes les valeurs de ω telles que

$$\operatorname{Re} S(b_j(\omega), \quad b_l(\omega), \quad \omega) = 0 \tag{28}$$

pour certains $j, l, j \neq l$. Ces définitions ne dépendent pas du choix des déterminations $b_j(\omega)$. Donc $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$; l'ensemble I est fermé. Les ensembles I_1 et I_2 sont composés d'un nombre fini de points, l'ensemble I_3, d'un nombre fini de courbes analytiques appelées *singulières.*

On rappelle que les composantes connexes d'un graphe de Stokes s'appellent *complexes de Stokes.* Un complexe de Stokes est dit *simple* (resp. *multiple*) s'il contient un seul (resp. au moins deux) point(s) de retour. Si $\omega_0 \in I_3$, il existe une ligne de Stokes finie reliant les points $b_j(\omega)$ et $b_l(\omega)$, de sorte qu'il existe un complexe multiple de Stokes. Ces complexes jouent un rôle fondamental dans les problèmes aux valeurs propres (§ 5).

Exemples. 1. $q = -z^2 + \omega$ (oscillateur harmonique). L'ensemble I_1 est vide, l'ensemble I_2 est composé du seul point $\omega = 0$, l'ensemble I_3 est la droite $\operatorname{Im} \omega = 0$.

2. $q = -z(z - \omega)^2$ (l'équation (26) décrit des ondes de densité linéaires dans la galaxie spiralée). L'ensemble I_1 est vide, l'ensemble I_2 est composé du seul point $\omega = 0$, l'ensemble I_3 est la réunion de quatre rayons $\operatorname{Im} \omega^{5/2} = 0$.

3. $q = -a(\omega)(z - b_1(\omega))^{n_1}(z - b_2(\omega))^{n_2}$, où a, b_1 et b_2 sont des polynômes. L'ensemble I_1 est celui des racines de l'équation

$a(\omega) = 0$, I_2, celui des racines de l'équation $b_1(\omega) = b_2(\omega)$, I_3, l'ensemble défini par l'équation

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\pi n_2/2}(a(\omega))^{1/2}(b_2(\omega) - b_1(\omega))^{(n_1+n_2+2)/2}] = 0.$$

4. $q = e^{i\varphi_0}z^n - \omega$. L'ensemble I_1 est vide, l'ensemble I_2 est composé du point $\omega = 0$, I_3, des rayons $\mathrm{Arg}\,\omega = \psi$ tels que

$$2\psi - \varphi_0 + 2(k + j)\pi/n = \pi l,$$

où j, k et l sont des entiers, $k \neq j$, $0 \leqslant j,\ k \leqslant n - 1$.

5. $q = \omega^2 p(z)$, $p(z)$ est un polynôme, $z_1, \ldots, z_l$ tous ses zéros distincts. L'ensemble I_1 est composé du seul point $\omega = 0$, I_2 est vide et I_3 est constitué d'un nombre fini de rayons $\mathrm{Arg}\,\omega = \psi$ tels que

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\psi}\int_{z_j}^{z_k}\sqrt{p(t)}\,dt\right) = 0$$

pour certains j, k, $j \neq k$.

L'ensemble des points réguliers de $C \setminus I$ est composé d'un nombre fini de composantes connexes (de domaines). Soient ω_1 et ω_2 des valeurs régulières situées sur la même composante connexe Ω, γ une courbe simple reliant les points ω_1 et ω_2 et contenue dans Ω. Si $D(\omega_1)$ est un domaine canonique pour $\omega = \omega_1$, le mouvement de ω le long de γ engendre une famille de domaines canoniques équivalents $\{D(\omega)\}$ qui dépendent continûment du paramètre ω.

5.2. *Analyticité des représentations asymptotiques WKB par rapport au paramètre.* Soient ω_0 une valeur régulière, $D(\omega_0)$ un domaine canonique, $\Omega \supset \omega_0$ le domaine maximal de points réguliers. Posons

$$\tilde{w}_{1,2}(z, \lambda, \omega;\ z_0) = q^{-1/4}(z, \omega)\exp\{\mp \lambda S(z_0, z, \omega)\}.$$

Pour $\lambda \gg 1$ il existe dans le domaine $D(\omega_0)$ un système fondamental de solutions de la forme (7) et (8):

$$w_j(z, \lambda, \omega) \sim \tilde{w}_j(z, \lambda, \omega;\ z_0), \quad j = 1, 2, \tag{29}$$

pour $\omega = \omega_0$. Supposons que Ω contient une courbe γ reliant les points ω_0 et ω_1. Prolongeons analytiquement les solutions w_j et les approximations WKB $\tilde{w}_j$ le long de γ (par rapport au paramètre ω). La formule (29) reste alors en vigueur lorsque $\lambda \to +\infty$, $z \in D(\omega)$, pour tout $\omega \in \gamma$. En particulier, les fonctions des deux membres de (29) sont analytiques dans le domaine Ω. Si $K \subset \Omega$ est un compact, la représentation asymptotique des solutions est uniforme en $\omega \in K$. Ceci vaut également pour les approximations d'ordre supérieur (10). Tous ces développements asymptotiques peuvent être dérivés autant de fois qu'on le veut par rapport à z, λ et ω. Les formules respectives pour les matrices de passage restent aussi en vigueur.

Soient ω_0 un point singulier, $\gamma \ni \omega_0$ une courbe dont tous les points sont réguliers à l'exception de ω_0 et $\{D(\omega)\}$ une famille continue de domaines canoniques ($\omega \in \gamma$, $\omega \neq \omega_0$). Le domaine limite $D(\omega_0)$ est alors canonique. Mais les graphes de Stokes $\Phi(\omega)$, $\omega \neq \omega_0$, et $\Phi(\omega_0)$ peuvent ne pas être équivalents et la formule (29) peut ne pas convenir pour $\omega = \omega_0$. Il existe un cas particulier important où la formule (29) reste en vigueur. Soient L une courbe singulière ne contenant pas de points de type I_1 et I_2, et Ω_1, Ω_2 les composantes connexes de l'ensemble des points réguliers, contiguës à L. La relation (29) est alors valable par prolongement analytique le long de toute courbe γ contenue dans $\Omega_1 \cup L \cup \Omega_2$.

Tous les résultats formulés ci-dessus restent en vigueur si les coefficients $a_0(\omega), \ldots, a_n(\omega)$ sont holomorphes dans l'adhérence $[G]$ d'un domaine borné du plan de ω complexe. Par ailleurs, ils s'étendent de façon évidente au cas de plusieurs paramètres: $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$.

§ 4. Equations à coefficients entiers et méromorphes

1. Equations à coefficients entiers. Considérons l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z) w = 0, \tag{1}$$

où $q(z)$ est une fonction entière, $\lambda > 0$ un grand paramètre. Toute solution de l'équation (1) est une fonction entière de z. Les résultats cités dans le § 3 pour les polynômes $q(z)$ s'étendent à ce cas à quelques exceptions près. Mettons en évidence la différence fondamentale qui existe entre les polynômes et les fonctions transcendantes entières du point de vue de l'approximation WKB. Soit l une ligne de niveau semi-cubique $\operatorname{Re} S(z_0, z) = 0$ (ou $\operatorname{Im} S(z_0, z) = 0$) d'origine z_0. Si $q(z)$ est un polynôme, alors

$$I = \int_l |\alpha_1(z)| \, |dz| < \infty.$$

Si $q(z)$ est une fonction entière, cette intégrale peut être divergente. Si par exemple $q(x)$ est une fonction réelle périodique ou quasi périodique et $|q(x)| \geqslant \delta > 0$ sur l'axe réel, alors $l = [0, \infty[$ est la ligne de niveau $\operatorname{Im} S(0, x) = 0$, $I = \infty$ ($q \not\equiv \text{const}$). Autre exemple: $z = \infty$ est un point de retour d'ordre infini ($q(z) = e^{2z}$, $l =]-\infty, 0]$, $I = \infty$). Les représentations asymptotiques WKB ne conviennent pas dans ces deux exemples.

Le domaine canonique D se définit comme au § 3, n° 1, à ceci près que $[S(D)]$ est susceptible de contenir une infinité de coupures verticales. On définit de façon exactement analogue les domaines $D_\varepsilon^\pm$ et D_ε, mais les dimensions des ε-voisinages varient d'une coupure

à l'autre (si ces coupures sont en nombre infini et s'accumulent). Supposons que D est un domaine canonique et soient satisfaites les conditions (§ 2, (16))

$$\sup_{z\in D_\varepsilon} \rho^{\pm}(z) < \infty. \tag{2}$$

L'équation (1) admet alors les solutions $w_1(z, \lambda)$ et $w_2(z, \lambda)$ pour lesquelles sont valables les formules (7), (8) du § 3 pour $z \in D_\varepsilon^+$ (resp. $z \in D_\varepsilon^-$), $\lambda \geqslant \lambda_0$. Les notions de système fondamental élémentaire de solutions, de matrices de passage et toutes les formules (à λ^{-1} près) relatives à ces matrices restent en vigueur. Si la condition (2) est remplacée par la condition

$$\sup_{z\in D_\varepsilon} \left(\int_{\gamma_z^+} |\alpha_k(t)|\,|dt|,\ \int_{\gamma_z^-} |\alpha_k(t)|\,|dt| \right) < \infty,\quad k=1, 2, \ldots, \tag{3}$$

alors les solutions w_1 et w_2 sont justiciables des développements asymptotiques (10) du § 3. Tous les autres résultats du § 3 (hormis les n° 4, 5 et 6) restent valables si la condition (3) est satisfaite dans les domaines canoniques respectifs.

2. $q(z)$ est une fonction méromorphe. Dans ce cas les solutions de l'équation (1) sont généralement des fonctions multivalentes; les points singuliers de l'équation sont les points de branchement des solutions.

Classons les points singuliers de l'équation (1) comme au § 1, n° 2.2. Supposons que $q(z)$ est rationnelle.

2.1. *Equation sans points singuliers réguliers.* Dans ce cas $[\Phi] = \Phi$ (Φ est un graphe de Stokes) et les lignes de Stokes subdivisent le plan complexe en un nombre fini de domaines de type demi-plan et bande (§ 1). Ces domaines et les domaines canoniques construits avec eux sont simplement connexes, de sorte que les solutions de (1) sont des fonctions univalentes dans chacun d'eux. Tous les résultats du § 3 sont valables pour ce cas.

Le développement asymptotique des matrices de passage peut être appliqué au calcul de la représentation asymptotique des génératrices du groupe de monodromie de l'équation (1) lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exemple. L'équation

$$w'' - \lambda^2 \frac{z^2-1}{z^3} w = 0$$

présente deux points singuliers irréguliers $z = 0$ et $z = \infty$. Fixons un point $a \neq 0, \infty$ et un système fondamental de solutions $(w_1(z), w_2(z))$ holomorphe en a et prolongeons analytiquement ce système

le long d'une courbe fermée simple γ contenant le point $z = 0$ à l'intérieur. On obtient alors un système fondamental $(\tilde{w}_1(z), \tilde{w}_2(z))$ holomorphe en a et

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_1(z) \\ \tilde{w}_2(z) \end{bmatrix} = U(\lambda) \begin{bmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{bmatrix},$$

où $U(\lambda)$ est une matrice d'ordre 2. Dans cet exemple le groupe de monodromie G de l'équation admet une seule génératrice U et est composé de matrices U^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ On rappelle que les groupes de monodromie associés aux divers systèmes fondamentaux de solutions donnés en a sont semblables (chap. I, § 2).

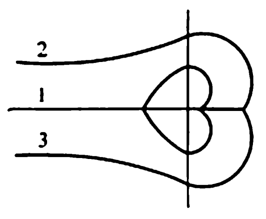


Fig. 17

Introduisons trois systèmes fondamentaux élémentaires de solutions (u_j, v_j) associés aux triplets (l_j, z_j, D_j), où $z_1 = -1$, $z_2 = z_3 = 1$ (les lignes de Stokes sont représentées sur la figure 17).

Passons du système fondamental (u_1, v_1) à (u_2, v_2), ensuite à (u_3, v_3) et enfin de nouveau à (u_1, v_1) (fig. 17) ; la matrice de passage obtenue

$$U = \Omega_{31}\Omega_{23}\Omega_{12}$$

est la génératrice cherchée du groupe de monodromie. On a (§ 3, (15), (20))

$$\Omega_{23} = e^{i\pi/6} \begin{bmatrix} -i + O(\lambda^{-1}) & 1 \\ 1 + O(\lambda^{-1}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_{12} = \frac{c_1}{c_2} \begin{bmatrix} e^{\lambda\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\alpha_1} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{31} = \frac{c_3}{c_1} \begin{bmatrix} e^{\lambda\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\alpha_2} \end{bmatrix},$$

où c_j sont des constantes de normalisation (§ 3),

$$\alpha_j = \int\limits_{\gamma_j} \sqrt{q(z)}\, dz, \quad \operatorname{Re} \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

Le contour γ_1 relie les points -1 et 1 et est contenu dans le demi-plan supérieur, le contour γ_2 relie les points 1 et -1 et est situé dans le demi-plan inférieur. Donc

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \int\limits_{\gamma} \sqrt{q(z)}\, dz = \alpha,$$

où γ est une courbe fermée simple d'origine et d'extrémité en $z = 1$ qui contient le point $z = 0$ à l'intérieur et est orientée dans le sens positif. Signalons que la fonction $\sqrt{q(z)}$ prend des valeurs différentes à l'origine et à l'extrémité du contour γ. On a

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} [1+O(\lambda^{-1})]\, e^{\lambda\alpha} & -i \\ -i+O(\lambda^{-1}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice U sont égales à

$$\mu_{1,2}(\lambda) = \pm [1+O(\lambda^{-1})] \exp\left\{\pm \lambda \int_{\gamma} \sqrt{\frac{z^2-1}{z^3}}\, dz\right\}.$$

L'intégrale étendue au contour γ vaut $\frac{1}{2}(1-i)\, \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

2.2. *Equations à points singuliers réguliers de type* R_2, 1. La fonction $q(z)$ peut présenter dans ce cas des pôles d'ordre 2. Si $a \neq 0$ est un tel pôle, on a

$$q(z) = -p(z)/(z-a)^2, \quad p(a) > 0.$$

Les lignes de Stokes partagent le plan complexe en un nombre fini de domaines de type demi-plan et bande, et de plus le voisinage d'un point de type R_2, 1 est recouvert par l'adhérence d'un nombre fini de domaines de type bande. Donc tous les résultats du § 3 relatifs aux matrices de passage sont valables.

Le fait nouveau ici est la détermination de la solution par la condition à la limite en un point a de type R_2. Soit D_0 un domaine de type bande tel que deux des lignes de Stokes qui le limitent ont pour extrémité un point de type R_2, et soit $D \supset D_0$ un domaine canonique. Introduisons le nouveau paramètre

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4p(a)}}, \tag{4}$$

comme au chap. II, § 6, (11), $\mu > 0$. L'équation (1) possède deux solutions w_1 et w_2 telles que

$$w_{1,2}(z, \lambda) = [q(z)]^{-1/4} \exp\{\pm \mu S(z_0, z)\} [1+\mu^{-1} \varphi_{1,2}(z, \mu)]. \tag{5}$$

Cette représentation asymptotique est double. Fixons $\lambda_0 > 0$; pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $z \in D_\varepsilon$, on a alors

$$|\varphi_{1,2}(z, \mu)| \leqslant C.$$

Si $\lambda > 0$ est fixe et $z \to a$ dans le domaine D_0, il vient

$$|\varphi_{1,2}(z, \mu)| \leqslant C\, |z-a|,$$

$$w_{1,2}(z, \lambda) \sim C_{1,2}(\lambda)\, (z-a)^{1/2 \pm i\mu\sqrt{p(a)}},$$

de sorte que ces solutions oscillent fortement. Si w est une solution de l'équation (1)

$$w(z, \lambda) \sim (z-a)^{1/2+i\mu\sqrt{p(a)}}, \quad z \to a, \quad z \in D_0, \tag{6}$$

alors $w \equiv C(\lambda) w_1$. De même, la solution w_2 peut être donnée par une condition à la limite au point a. La condition (6) peut être remplacée par la suivante:

$$\frac{w'(z, \lambda)}{w(z, \lambda)} \sim \left(\frac{1}{2} + i\mu\sqrt{p(a)}\right)(z-a)^{-1}, \quad z \to a, \quad z \in D_0.$$

Ces résultats permettent de s'« éloigner » d'un point singulier de type R_2, c'est-à-dire de prolonger la représentation asymptotique de la solution à un domaine dans lequel sont valables les représentations asymptotiques WKB standards et seulement ensuite de procéder à leur raccordement.

§ 5. Représentation asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $-d^2/dx^2 + \lambda^2 q(x)$. Problèmes auto-adjoints

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$ly \equiv y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \tag{1}$$

où la fonction $q(x)$ est continue et réelle sur l'axe réel, λ un paramètre spectral.

1.1. *Problème sur l'axe tout entier.* Supposons qu'existent les limites finies ou infinies $\lim\limits_{x\to\pm\infty} q(x) = q_\pm > 0$. Le spectre de l'opérateur l traité dans l'espace $L_2(\mathbf{R})$ est discret et est composé d'un ensemble dénombrable de valeurs propres strictement positives $\{\lambda_n\}$ (la séquence $\{-\lambda_n\}$ ne sera pas envisagée). Rangeons ces valeurs dans l'ordre de grandeur croissante:

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Les fonctions propres $y_n(x) = y(x, \lambda_n)$ décroissent exponentiellement lorsque $|x| \to \infty$ et la condition $y \in L_2(\mathbf{R})$ peut être remplacée par les conditions aux limites

$$y(-\infty, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0. \tag{2}$$

On demande d'étudier le comportement asymptotique de λ_n lorsque $n \to \infty$.

1.2. *Problème sur le demi-axe* $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$. Posons la condition à la limite

$$ay(0, \lambda) + by'(0, \lambda) = 0, \tag{3}$$

où a et b sont des constantes réelles, $(a, b) \neq (0, 0)$. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = q_+$, $0 < q_+ \leqslant \infty$. Le spectre du problème (1), (3) est alors discret et possède les mêmes propriétés que dans le problème (1), (2). La condition $y \in L_2(\mathbf{R}^+)$ peut être remplacée par la condition à la limite

$$y(+\infty, \lambda) = 0. \tag{4}$$

2. Problème à deux points de retour sur l'axe tout entier.

2.1. *Représentation asymptotique des valeurs propres.* Supposons que la fonction $q(x)$ possède exactement deux zéros réels simples $x_1 < x_2$. Dans ce cas $q(x) < 0$ pour $x_1 < x < x_2$, $q(x) > 0$ pour $x < x_1$, $x > x_2$. Supposons que $q(x)$ est un polynôme de degré $n \geqslant 2$. On peut déterminer alors la représentation asymptotique des valeurs propres à l'aide du théorème du § 2 sans utiliser les notions de domaines canoniques et de matrices de passage.

Pour chaque $\lambda > 0$ fixe l'équation (1) admet une solution $y_1(x, \lambda)$ (resp. $y_2(x, \lambda)$) unique à un facteur multiplicatif constant près telle que $y_1(-\infty, \lambda) = 0$ (resp. $y_2(+\infty, \lambda) = 0$). Si λ est une valeur propre, $y_2(x, \lambda) \equiv Cy_1(x, \lambda)$ en vertu de (2). Prenons deux points distincts z^- et z^+; on obtient alors l'équation aux valeurs propres

$$\frac{y_1(z^+, \lambda)}{y_2(z^+, \lambda)}\,\frac{y_2(z^-, \lambda)}{y_1(z^-, \lambda)} = 1 \tag{5}$$

Cette équation est exacte, c'est-à-dire valable pour tout $\lambda > 0$.

I. *Solution* y_2. Comme $q(x) > 0$ pour $x > x_2$, l'équation (1) possède une solution admettant le développement asymptotique

$$y_2(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\left\{-\lambda S(x_2, x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{+\infty}^{x} \alpha_k(t)\, dt\right\} \tag{6}$$

lorsque $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \geqslant x_2 + \delta$, $\delta > 0$ étant arbitraire. Ici $\sqrt{q(x)}$, $\sqrt[4]{q(x)} > 0$ pour $x > x_2$. Déterminons le domaine de validité de ce développement asymptotique pour les z complexes et voisins de x. Le segment $l_0 = [x_1, x_2]$ est une ligne de Stokes. Des points de retour x_j sont encore issues deux lignes de Stokes l_j et $l'_j = l_j^*$, $j = 1, 2$ (fig. 18) ; $\operatorname{Im} z > 0$ pour $z \in l_j$, $z \neq x_j$. On rappelle que M^* est l'ensemble symétrique de M par rapport à l'axe réel. Si Π est une petite bande de la forme $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$, alors le

développement asymptotique (6) est valable dans le domaine Π^+ obtenu à partir de Π par suppression des voisinages des lignes de Stokes l_0, l_1 et l_1' et du domaine situé à gauche de l_1, l_1'. Pour tout point $z \in \Pi^+$ il existe un chemin canonique infini $\gamma \supset [x_2 + \delta, +\infty[$

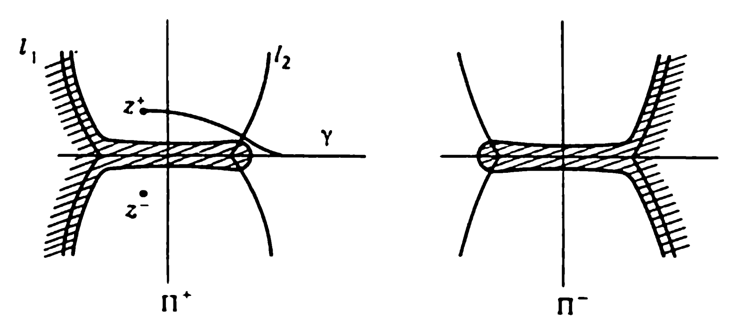


Fig. 18

(cf. fig. 18). Prenons pour z^+ un point situé à proximité et au-dessus de l_0 (par exemple $z^+ = (x_1 + x_2)/2 + i\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$) et posons $z^- = \overline{z^+}$.

II. *Solution* y_1. L'équation (1) possède une solution y_1 admettant le développement asymptotique

$$y_1(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda S(x_1, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{-\infty}^{x} \alpha_k(t)\, dt\right\} \qquad (7)$$

lorsque $\lambda \to +\infty$ uniformément en $x \leqslant x_1 - \delta$, $\delta > 0$ étant arbitraire. Ici $\sqrt{q(x)}$, $\sqrt[4]{q(x)} > 0$ pour $x < x_1$. Le domaine de validité du développement asymptotique (7) au voisinage de l'axe x est le domaine Π^- (cf. fig. 18) ; ce développement est en particulier valable aux points $z^{\pm}$.

En portant (6) et (7) dans (5), on obtient une équation aux valeurs propres. Ceci étant, il faut tenir soigneusement compte du choix des déterminations de toutes les fonctions multivalentes. Soit U un petit voisinage complexe simplement connexe du segment l_0. Chaque fonction $\sqrt{q(z)}$ et $\alpha_k(z)$ admet alors deux déterminations holomorphes dans le domaine $V = U \setminus l_0$. Désignons par $(\sqrt{q(z)})_j$ la détermination figurant dans le développement asymptotique de la solution y_j et remplaçons pour la commodité $q^{-1/4}(z)$ par

$$\exp\left\{-\frac{1}{4}\int_{z_1}^{z} \frac{q'(t)}{q(t)}\, dt\right\},$$

où $z_1 = x_1 - \delta$, $z_2 = x_2 + \delta$, $\delta > 0$.

Les déterminations $(\sqrt{q(z)})_1$ et $(\sqrt{q(z)})_2$ sont choisies de telle sorte que $(\sqrt{q(x)})_1 > 0$ pour $x < x_1$, $(\sqrt{q(x)})_2 > 0$ pour $x > x_2$. Donc $(\sqrt{q(x)})_2 < 0$ pour $x < x_1$, $(\sqrt{q(x)})_2 = i|\sqrt{q(x)}|$ sur le bord supérieur de la coupure et

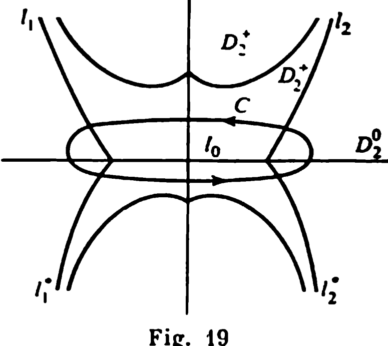


Fig. 19

$$(\sqrt{q(z)})_1 = -(\sqrt{q(z)})_2,$$

$$(\alpha_k(z))_1 = (-1)^k (\alpha_k(z))_2, \quad z \in V.$$

Soit C un contour fermé simple englobant le segment l_0 et orienté dans le sens positif (fig. 19). En portant les développements asymptotiques (6) et (7) dans (5), on obtient l'équation

$$\exp\left\{\sum_{k=-1}^{\infty} d_k \lambda^{-k}\right\} = 1.$$

On a (l'intégration est étendue à des contours contenus dans V)

$$d_{-1} = S_1(x_1, z^+) + S_2(x_2, z^+) - S_2(x_2, z^+) - S_1(x_1, z^-) =$$
$$= [-S_2(x_1, z^+) + S_2(x_2, z^+)] + [S_2(x_1, z^-) - S_2(x_2, z^-)].$$

Le premier crochet est égal à l'intégrale $S_2(x_2, x_1)$ prise le long du bord supérieur de la coupure l_0, c'est-à-dire à $i\xi_0$, où

$$\xi_0 = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}|\, dx. \tag{8}$$

Le deuxième crochet est égal aussi à $i\xi_0$, donc $d_{-1} = 2i\xi_0$ ou

$$d_{-1} = \oint_C \sqrt{q(z)}\, dz$$

Ici et plus bas $\sqrt{q(x)} = (\sqrt{q(z)})_2$, c'est-à-dire que

$$\sqrt{q(z)} > 0, \quad x \in C, \quad x > x_2. \tag{9}$$

D'autre part,

$$d_0 = -\frac{1}{4} \oint_C \frac{q'(z)}{q(z)}\, dz = -\pi i,$$

$$d_k = \left[\int_{-\infty}^{z^+} (\alpha_k(z))_1\, dz - (-1)^k \int_{+\infty}^{z^+} (\alpha_k(z))_2\, dz\right] +$$
$$+ \left[\int_{+\infty}^{z^-} (-1)^k (\alpha_k(z))_1\, dz - \int_{-\infty}^{z^-} (\alpha_k(z))_1\, dz\right] = (-1)^k \oint_C \alpha_k(z)\, dz,$$

où la détermination de $\sqrt{q(z)}$ est choisie conformément à (9). On obtient finalement l'équation aux valeurs propres

$$\exp\left\{2i\lambda\xi_0 - i\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z)\, dz\right\} = 1,$$

dont le premier membre est une série asymptotique. Les nombres d_k sont tous imaginaires purs. On a donc le développement asymptotique

$$\lambda_n \xi_0 = n\pi + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \lambda_n^{-k}, \quad n \to \infty, \tag{10}$$

où $n > 0$ est entier,

$$\beta_k = \frac{i}{2} (-1)^k \oint_C \alpha_k(z)\, dz.$$

En appliquant la formule de Bürmann-Lagrange, on obtient le développement asymptotique de λ_n en puissances de n^{-1} lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{gathered}
\lambda_n = \frac{n\pi}{\xi_0} + \frac{\pi}{2\xi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\pi n)^{-k}, \\
\gamma_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{d\mu}\right)^{k-1} [f(\mu)]^k \big|_{\mu=0}, \\
f(\mu) = \xi_0 - \frac{\pi\mu}{2} - \mu \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu^k.
\end{gathered} \tag{11}$$

Bien que la série $f(\mu)$ diverge en général, les expressions de γ_k sont finies par la substitution formelle $\mu = 0$. De (11) il s'ensuit que

$$\lambda_n = \left(\int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}|\, dx\right)^{-1} \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \frac{i}{64\pi n} \oint_C q'^2(z)\, q^{-5/2}(z)\, dz + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Des raisonnements précédents il découle que les développements asymptotiques (10) et (11) sont valables sous les conditions suivantes sur $q(x)$:

1) $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} q(x) = q_\pm > 0$;

2) les intégrales $\int_{-\infty} |\alpha_k(x)|\,dx$, $\int^{+\infty} |\alpha_k(x)|\,dx$ convergent pour tous les $k=1, 2, \ldots$;

3) la fonction $q(z)$ est holomorphe dans un voisinage complexe du segment $[x_1, x_2]$.

Si les intégrales de la condition 2) convergent pour $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N$, on a un développement asymptotique (10) de résidu $O(\lambda_n^{-N})$.

Faisons quelques remarques.

1. La condition d'analyticité de la fonction $q(z)$ (la condition 3)) est superflue: les développements asymptotiques (10) et (11) ont lieu sous les conditions 1) et 2). Dans ce cas

$$\beta_k = i(-1)^{k+1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha_k(t)\,dt,$$

où $\sqrt{q(x)} = i\,|\sqrt{q(x)}|$ et les intégrales β_k sont régularisées de façon convenable.

2. Les fonctions $\alpha_{2k}(z)$ sont holomorphes dans le domaine U sauf aux pôles x_1 et x_2, et β_{2k} sont des fonctions rationnelles des valeurs des dérivées de $q(z)$ aux points x_1 et x_2. Si $q(z)$ est un polynôme, β_{2k} seront des fonctions algébriques de ses coefficients.

3. Si $q(z)$ est un polynôme, la fonction $S = \int \sqrt{q(z)}\,dz$ est une intégrale abélienne (elliptique pour $n = 3, 4$ et hyperelliptique pour $n \geqslant 5$), qui de toute évidence est associée à l'équation (1). Le nombre

$$d_{-1} = \oint_C \sqrt{q(z)}\,dz$$

est la période imaginaire pure de l'intégrale abélienne S. De (11) il suit que le terme principal de la représentation asymptotique s'exprime en fonction de cette période: $\lambda_n \sim n\pi i/d_{-1}$. Si $q(x)$ admet plusieurs (un nombre arbitraire fini) de points de retour, le terme principal de la représentation asymptotique de λ_n s'exprime aussi en tonction des périodes imaginaires pures de l'intégrale S.

2.2. *Oscillateur harmonique.* Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2(x^2 - a^2)\,y = 0, \quad a > 0.$$

On sait que les valeurs propres se déterminent à partir des relations

$$\lambda_n \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

La méthode du n° 2.1 permet de calculer exactement tous les λ_n. Ici $x_1 = -a$, $x_2 = a$ et il n'existe pas de lignes de Stokes autres que l_j et l'_j, $j = 0, 1, 2$. Soient D_2 le domaine borné par les lignes de Stokes l_1, l_0 et $l_{2'}$ et $S_2 = \int_a^z \sqrt{q(t)}\,dt$, $\sqrt{q(x)} > 0$ pour $x > a$. Alors $S_2(D_2)$ est le plan de S complexe muni d'une coupure le long du demi-axe $]-i\infty, 0[$. On a

$$y_1(z, \lambda) = q^{-1/4}(z)\,e^{-\lambda S_2}[1 + \varepsilon_1(z, \lambda)],$$

où $\varepsilon_1(z, \lambda) \to 0$ pour $z \in D_2$, $z \to \infty$, $|\operatorname{Re} S_2| \to \infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ (§ 3, n° 2). Soient D_1 le domaine borné par les lignes de Stokes l_0, l_2 et $l_{1'}$ et $S_1 = \int_{-a}^z \sqrt{q(t)}\,dt$, $\sqrt{q(x)} > 0$ pour $x < -a$. Alors

$$S_1(D_1) = S_2(D_2), \quad y_2(z, \lambda) = q^{-1/4}(z)\,e^{\lambda S_1}[1 + \varepsilon_2(z, \lambda)],$$

où $\varepsilon_2(z, \lambda) \to 0$ pour $z \in D_1$, $z \to \infty$, $|\operatorname{Re} S_1| \to \infty$ uniformément en $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$. Si λ est une valeur propre, $y_1(z, \lambda) \equiv Cy_2(z, \lambda)$. Supposons que z est situé dans le domaine D borné par les lignes de Stokes l_0, l_1, et l_2; alors

$$1 + \varepsilon_1(z, \lambda) = Ce^{i\lambda\xi_0}(1 + \varepsilon_2(z, \lambda)).$$

En faisant tendre z vers l'infini dans le domaine D (par exemple $z = iy$, $y \to +\infty$), on obtient $1 = Ce^{i\lambda\xi_0}$. Si l'on considère le domaine D_j^* au lieu de D_j, et D^* au lieu de D, on trouve $1 = Ce^{-i\lambda\xi_0}$. L'élimination de C nous donne l'équation aux valeurs propres $e^{2i\lambda\xi_0} = 1$, d'où l'on déduit (12).

2.3. *Règle de quantification de Bohr-Sommerfeld.* Considérons le problème aux valeurs propres pour l'équation de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2m}\psi'' + (U(x) - E)\psi = 0 \tag{13}$$

de potentiel réel $U(x)$, où E est un paramètre spectral (réel) et $h > 0$, un petit paramètre.

Supposons que $U(x)$ a la forme d'une fosse potentielle, c'est-à-dire qu'il admet un seul point de minimum x_0 et $U'(x) > 0$ (resp. $U'(x) < 0$) pour $x > x_0$ (resp. $x < x_0$). Supposons que $U(x_0) = 0$. Il existe alors les limites finies ou infinies $U_\pm = U(\pm\infty) > 0$. Posons $J = [E_1^0, E_2^0]$, où $0 < E_1^0 < E_2^0 < \min(U_+, U_-)$. Pour tout $E \in J$ l'équation (13) admet exactement deux points de retour simples $x_1(E) < x_2(E)$.

Supposons que $q = 2m(U(x) - E)$ satisfait pour $E \in J$ les conditions 2), 3) du nº 2.1 : la fonction $U(z)$ est holomorphe au voisinage du segment $I = [x_1(E_2^0), x_2(E_2^0)]$ et les intégrales $\int_{-\infty}^{a} |\alpha_k(x)|\,dx$, $\int_{b}^{+\infty} |\alpha_k(x)|\,dx$ convergent pour $a < x_1(E_2)$, $b > x_2(E_2)$. Ici $\alpha_k(x, E)$ se calculent à l'aide de la fonction $q = 2m(U(x) - E)$. Des raisonnements identiques à ceux du nº 2.1 nous conduisent au développement asymptotique

$$\begin{gathered}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2m(E-U(x))}\,dx = h\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(E)\,h^{k+1},\\ \beta_k(E) = \frac{i}{2}(-1)^k \oint_C \alpha_k(z, E)\,dz.\end{gathered} \tag{14}$$

Cette relation est une équation en E qui nous donne la représentation asymptotique des $E_n(h)$ sous les conditions suivantes:

$$h \to 0, \quad E_1^0 \leqslant E \leqslant E_2^0, \quad f(E_1^0) < \left(n + \frac{1}{2}\right) h < f(E_2^0).$$

Le terme principal de la représentation asymptotique se déduit de l'équation

$$f(E) \equiv \int_{U(x)<E} \sqrt{2m(E-U(x))}\,dx = n\left(\pi + \frac{1}{2}\right) h. \tag{15}$$

La formule (15) s'appelle *formule de quantification de Bohr-Sommerfeld.*

La fonction $f(E)$ jouit des propriétés suivantes:

1) Si $U(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, alors $f(E) \in C^\infty(E_1^0, E_2^0)$, $0 < E_1^0 < E_2^0$, et est strictement croissante. Si x_0 est un point de minimum non dégénéré ($U''(x_0) > 0$), alors $f(E) \in C^\infty([0, E_2^0])$.

La dernière assertion est mise en défaut si $U''(x_0) = 0$. Par exemple, $U(x) = x^4$, $f(E) = \text{const}\cdot E^{3/4}$.

2) Si la fonction $U(z)$ est holomorphe dans un voisinage complexe du segment $I = [x_1(E_2^0), x_2(E_2^0)]$, la fonction $f(E)$ est holomorphe dans un voisinage complexe du segment $J = [E_1^0, E_2^0]$, $E_1^0 > 0$. Si, par ailleurs, $U''(x_0) > 0$, ceci est valable pour $E_1^0 = 0$.

Cette propriété de la fonction $f(E)$ résulte de la formule

$$f(E) = \oint_C \sqrt{2m(E-U(z))}\,dz.$$

Faisons quelques remarques.

1. Supposons que $0 < E_1^0 \leqslant E \leqslant E_2^0$, $h \to 0$, $n \to \infty$, de sorte que $nh \to$ const. Le terme principal de la représentation asymptotique de $E_n(h)$ est alors égal à

$$E_n^0(h) = f^{-1}(h(n+1/2)).$$

Dans ces conditions, on a le développement asymptotique

$$E_n(h) = E_n^0(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \ldots$$

Les coefficients c_n peuvent être calculés par les méthodes de la théorie des perturbations.

2. Si $U''(x_0) > 0$, le développement asymptotique (14) est valable pour le cas où $0 \leqslant E \leqslant E_2^0$. Ceci résulte de ce que pour $E \approx 0$ l'équation (13) ne possède pas de points de retour voisins de l'axe réel et distincts de $x_1(E)$ et $x_2(E)$. Le développement asymptotique (14) nous permet donc de déterminer la représentation asymptotique des niveaux inférieurs d'énergie $E_n(h)$. Supposons que $h \to 0$, $0 \leqslant n \leqslant n_0$, où n_0 est fixe ; alors

$$E_n(h) = \pi(n+1/2)\,U''(x_0)\,h + O(h^2).$$

3. Pour E fixe, $0 < E_1^0 \leqslant E \leqslant E_2^0$, les fonctions $\alpha_{2k}(z, E)$ sont holomorphes dans un voisinage complexe de l'intervalle $[x_1(E), x_2(E)]$ à l'exception des pôles $x_1(E)$ et $x_2(E)$, et β_{2k} sont des fonctions rationnelles des dérivées de $U(x)$ en ces points. Si $U(x)$ est un polynôme, β_{2k} sont des fonctions algébriques de E et des coefficients du polynôme $U(z)$.

2.4. *Représentation asymptotique des fonctions propres.* Supposons que la fonction $q(z)$ satisfait les conditions 1), 2) et 3) du nº 2.1 et qu'elle est holomorphe dans U_ε, ε-voisinage complexe de l'intervalle $[x_1, x_2]$. Désignons par U la réunion du domaine $U_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon_0}$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, et des demi-axes $x \leqslant x_1 - \varepsilon$, $x \geqslant x_2 + \varepsilon$. Le développement asymptotique de la fonction propre $y_n(x)$, $n \to \infty$, pour $x \geqslant x_2 + \varepsilon_0$ est donné par la formule (6), où $\lambda = \lambda_n$. Ce développement est uniforme en x. Toutes les fonctions y figurant sont des fonctions multivalentes de z, $z \in U$. Néanmoins, comme prouvé au nº 2.1, le développement asymptotique (6) est valable pour $y_n(z) = y(z, \lambda_n)$ partout dans U, c'est-à-dire que le second membre de la formule (6) est une fonction univalente pour $\lambda = \lambda_n$ et $z \in U$. On obtient le développement asymptotique de la fonction $y_n(x)$ pour $n \to \infty$ en prolongeant analytiquement le développement asymptotique (6) du demi-axe $x \geqslant x_2 + \varepsilon_0$ au demi-axe $x \leqslant x_1 - \varepsilon_0$. Pour le terme principal de la représentation asymptotique, ce fait a été prouvé par G. Birkhoff [44].

Prenons les déterminations de $\sqrt{q(x)}$ et $\sqrt[4]{q(x)}$ qui sont strictement positives pour $x < x_1$; alors

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= c_n q^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda_n S(x_1, x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \int_{-\infty}^{x} \alpha_k(t)\,dt\right\}, \\
c_n &= -i \exp\left\{-i\lambda_n \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \int_{C_+} \alpha_k(t)\,dt\right\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

lorsque $n \to \infty$, $x \leqslant x_1 - \varepsilon_0$, où C_+ est un contour composé des demi-axes $]-\infty, x_1 - \varepsilon_0[$, $]x_2 + \varepsilon_0, +\infty[$ et d'une partie du contour C reliant les points $x_1 - \varepsilon_0$ et $x_2 + \varepsilon_0$ et contenu dans le demi-plan supérieur. Ces développements asymptotiques peuvent être dérivés autant de fois qu'on le veut par rapport à x. Remarquons que la constante c_n est réelle puisque la fonction $y_n(x)$ est réelle et $c_n = (-1)^n [1 + O(n^{-1})]$.

Trouvons le développement asymptotique de $y_n(x)$ sur l'intervalle $I = [x_1 + \varepsilon_0, x_2 - \varepsilon_0]$. Si l'on prolonge analytiquement le second membre de la formule (6) du demi-axe $]x_2, +\infty[$ à un point x situé sur le bord supérieur (resp. inférieur) de la coupure I, on obtient la valeur $y_2^+(x, \lambda_n)$ (resp. $y_2^-(x, \lambda_n)$) et le développement asymptotique est leur demi-somme (§ 3, n° 1.2). Comme $y_2^-(x, \lambda_n) = \overline{y_2^+(x, \lambda_n)}$, il vient

$$
y_n(x) = |q(x)|^{-1/4} \operatorname{Re} \left(\exp\left\{i\lambda \int_{x_2}^{x} |\sqrt{q(t)}|\,dt + \right.\right.
$$
$$
\left.\left. + i\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_n)^{-k} \int_{+\infty}^{x} \alpha_k(t)\,dt\right\}\right). \tag{17}
$$

La détermination de $\sqrt{q(x)}$ est choisie >0 pour $x > x_2$ et le chemin d'intégration contourne le point x_2 par en haut. Le terme principal de la représentation asymptotique est égal à

$$
y_n(x) = |q(x)|^{-1/4} \left[\cos\left(\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \xi_0^{-1} \int_{x_2}^{x} |\sqrt{q(t)}|\,dt + \frac{\pi}{4}\right)\right] + O(n^{-1}),
$$

de sorte que $y_n(x)$ oscille fortement sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Les formules asymptotiques pour les fonctions propres de la forme (6), (16) et (17) sont valables pour l'équation (13) aussi. Les

termes principaux de la représentation asymptotique sont

$$y_n(x) = (U(x) - E_n)^{-1/4} \exp\left\{-h^{-1} \int_{x_2(E)}^{x} \sqrt{U(t) - E_n}\, dt\right\}, \quad x > x_2(E),$$

$$y_n(x) = (E_n - U(x))^{-1/4} \cos\left(h^{-1} \int_{x_2(E)}^{x} \sqrt{-U(t) + E_n}\, dt + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x_1(E) < x < x_2(E),$$

$$y_n(x) = (U(x) - E_n)^{-1/4} \exp\left\{h^{-1} \int_{x_1(E)}^{x} \sqrt{U(x) - E_n}\, dt\right\} (-1)^n,$$

$$x < x_1(E).$$

Toutes les racines sont strictement positives dans ces formules.

2.5. *Application des matrices de passage*. Soit $q(z)$ un polynôme satisfaisant les conditions du n° 2.1. Etablissons la formule (10) pour les valeurs propres en nous servant du développement asymptotique des matrices de passage (§ 3). Cette méthode peut sembler plus complexe que celle du n° 2.1. Mais elle est plus universelle et est valable notamment pour le cas où l'équation (1) possède un nombre fini arbitraire de points de retour réels.

Du § 3, n°s 3, 5 et 6, il s'ensuit qu'il existe un domaine D_2^0 tel que la fonction $S(x_2, z)$ est à un feuillet dans D_2^0,

$$D_2^0 \supset \,]x_2, +\infty[, \quad \partial D_2^0 \supset l_1 \cup l_{1'}, \quad (D_2^0)^* = D_2^0$$

et $S(D_2^0)$ est le demi-plan Re $S > 0$ muni d'un nombre fini de coupures verticales. Sur la figure 19, le domaine D_2^0 est la réunion des domaines D_1, D_2 et de la ligne de Stokes l_1. Si $q(z)$ est une fonction entière satisfaisant la condition 1) (§ 1, n° 2), alors $S(D_2^0)$ peut contenir une infinité de coupures verticales.

Choisissons le domaine canonique $D_2 \supset \,]x_2, +\infty[$ de telle sorte que $D_2 \supset D_2^0$, $D_2 = D_2^*$. Alors $\partial D_2 \supset l_1 \cup \bar{l}_0 \cup l_{1'}$, (cf. fig. 19). Supposons que $D_2^{\pm} = D_2 \setminus [D_2^0] \cap \{\pm \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$; alors les domaines D_2^+ et D_2^- ne se rencontrent pas, sont contenus respectivement dans les demi-plans supérieur et inférieur et $(D_2^+)^* = D_2^-$.

On construit de façon analogue le domaine $D_1^0 \supset \,]-\infty, x_1[$. Posons

$$D_1 = D_1^0 \cup l_1 \cup l_2^* \cup D_2^+ \cup D_2^- ;$$

alors $D_1^* = D_1$ et $D_1 \setminus D_2 = D_2^+ \cup D_2^-$. Introduisons le domaine canonique

$$D_0 = D_2^+ \cup l_0 \cup D_2^- = D_4$$

et les systèmes fondamentaux élémentaires de solutions (u_j, v_j) associés aux triplets (l_j, x_j, D_j), $x_4 = x_1$. Soit $y_2(x, \lambda)$ une solution admettant le développement asymptotique (6). Alors $y_2(z, \lambda) \equiv \equiv e^{-i\pi/12} v_2(z, \lambda)$. Exprimons y_2 en fonction du système fondamental (u_1, v_1), c'est-à-dire prolongeons sa représentation asymptotique de la ligne de Stokes l_2 à la ligne l_1. On a $y_1 = e^{-i\pi/12}(au_1 + bv_1)$, où

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \Omega_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \Omega_{41}\Omega_{04}\Omega_{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et Ω_{jk} est la matrice de passage du système j au système k. La solution $u_1(x, \lambda)$ (resp. $v_1(x, \lambda)$) croît (resp. décroît) exponentiellement lorsque $x \to -\infty$ et si λ est une valeur propre, alors $b(\lambda) = 0$. Ceci est l'équation aux valeurs propres.

Calculons $b(\lambda)$ en nous servant de la représentation asymptotique des matrices de passage. Introduisons encore deux systèmes fondamentaux élémentaires de solutions $(u_{j'}, v_{j'})$, $j = 1, 2$, associés aux triplets $(l_{j'}, x_j, D_{j'})$, où $D_{j'} = D_j$. Les systèmes fondamentaux de solutions associés aux lignes de Stokes issues du point de retour x_1 sont compatibles (§ 3, n° 3.4). Idem pour x_2.

On a (§ 3, n°s 3.1, 3.4)

$$\Omega_{20} = e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\alpha_{20}} \\ 1 & i\alpha_{02'} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{41} = e^{-i\pi/6} \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\alpha_{41}} \\ 1 & i\alpha_{11'} \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{04} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\lambda\xi_0} \\ e^{i\lambda\xi_0} & 0 \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\Omega_{21} = e^{-i\pi/3} \begin{bmatrix} 0 & -\beta^{-1}\alpha_{02'}\alpha_{41}^{-1} \\ \beta^{-1} & i(\beta^{-1}\alpha_{02'} + \beta\alpha_{11'}\alpha_{20}^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \beta = e^{i\lambda\xi_0}. \tag{18}$$

L'identité $\alpha_{02'}\alpha_{2'2}\alpha_{20} = 1$ aidant, on obtient l'équation aux valeurs propres

$$e^{2i\lambda\xi_0}\alpha_{2'2}\alpha_{11'} = 1.$$

Comme (§ 3)

$$\alpha_{jk} = \int_{l_{jk}} \alpha_k(z)\, dz,$$

où les contours $l_{11'}$ et $l_{2'2}$ sont indiqués sur la figure 15 (les extrémités de ces contours s'éloignent à l'infini respectivement dans les domaines D_1 et D_2), on a le développement asymptotique

$$(\alpha_{11'}\alpha_{2'2})^{-1} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \oint_C \alpha_k(z)\,dz\right\},$$

où la détermination de $\sqrt{q(x)}$ est choisie conformément à (9). Pour les valeurs propres, on obtient de nouveau l'équation (10).

3. Problème à plusieurs points de retour sur l'axe tout entier.

3.1. *Exemple.* Soit

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2n} (x - x_j), \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}.$$

L'équation (1) possède $2n$ points de retour réels simples x_j et n lignes de Stokes finies $\tilde{l}_j = [x_{2j-1}, x_{2j}]$, situés sur l'axe réel. Du point de retour x_j sont encore issues deux lignes de Stokes infinies l_j et l_j^*, où l_j est contenue dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$. Les lignes de Stokes partagent le plan de z complexe en $2n+2$ domaines de type demi-plan et $n-1$ domaines de type bande.

Les domaines de type *demi-plan* sont: a) D^-, $\partial D^- = l_1 \cup l_1^*$; b) D_j, $\partial D_j \supset l_{2j-1} \cup \tilde{l}_j \cup l_{2j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$; c) D^+, $\partial D^+ = l_{2n} \cup l_{2n}^*$; d) D_j^*, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Les domaines de type *bande* sont: G_j, $\partial G_j = l_{2j} \cup l_{2j}^* \cup l_{2j+1} \cup \cup l_{2j+1}^*$. (Le cas $n=2$ est représenté sur la figure 3. En particulier, D^+ contient le demi-axe $x > x_{2n}$, D^-, le demi-axe $x < x_1$.)

L'équation (1) admet une solution $y_2(x, \lambda)$ (cf. (6)) dont les propriétés sont mentionnées dans le n° 2.1. Prolongeons la représentation asymptotique de cette solution au demi-axe $x < x_1$. Introduisons les domaines canoniques

$$D_1 = D^- \cup l_1 \cup l_1^* \cup D_1 \cup D_1^*,$$
$$D_{2n} = D^+ \cup l_{2n} \cup l_{2n}^* \cup D_n \cup D_n^*,$$

de sorte que $D_1 \supset]-\infty, x_1[$, $D_{2n} \supset]x_{2n}, +\infty[$ et ces domaines sont symétriques par rapport à l'axe réel. Posons

$$D_{2n-1} = D_n \cup \tilde{l}_n \cup D_n^* = D_{2n-1}^*$$

et construisons de la même façon les domaines canoniques $D_{2n-3}, \ldots, D_3$. Supposons par ailleurs que

$$D_{2n-3} = D_n \cup G_{n-1} \cup D_{n-1} \cup l_{2n-1} \cup l_{2n-2}.$$

Introduisons les systèmes fondamentaux élémentaires (u_j, v_j), (u_j^*, v_j^*) et $(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$ associés respectivement aux triplets (l_j, x_j, D_j), (l_j^*, x_j, D_j^*) et $(x_{2j}, \tilde{l}_j, D_{2j-1})$. On a (nº 2.5)

$$y_2(z, \lambda) = e^{-i\pi/12} v_{2n}(z, \lambda) = e^{-i\pi/12}(au_1 + bv_1).$$

Les valeurs propres sont déterminées à partir de l'équation $b(\lambda) = 0$.

On a

$$\Omega_{2n,1} = \Omega_{21} \dots \Omega_{2n-1,\,2n-2}\Omega_{2n,\,2n-1}.$$

Les matrices $\Omega_{2j,\,2j-1}$ sont de la forme (18), où

$$\xi \to \xi_j = \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} |\sqrt{q(x)}|\, dx, \quad \Omega_{2j-1,\,2j-2} = e^{-i\pi/2 + \lambda\eta_j}\begin{bmatrix} e^{-2\lambda\eta_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\eta_j = \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} \sqrt{q(x)}\, dx > 0$$

(cf. § 3, (15)). Donc

$$b(\lambda) = c(\lambda)\,[(\Omega_{2n,\,2n-1})_{22}(\Omega_{2n-2,\,2n-3})_{22} \dots (\Omega_{21})_{22} + O(e^{-2\lambda\eta_0})],$$

$$\lambda \to +\infty,$$

$$\eta_0 = \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \eta_j,$$

où $c(\lambda) \neq 0$. En se servant de (18) et en se limitant aux termes principaux, on obtient l'équation aux valeurs propres:

$$\prod_{j=1}^{n} [\cos(2\lambda\xi_j) + O(\lambda^{-1})] = O(e^{-2\lambda\eta_0}).$$

Il existe donc n séquences $\{\lambda_n^{(k)}\}$ de valeurs propres

$$\lambda_n^{(k)} = (n + 1/2)\,\pi\xi_k^{-1} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{19}$$

où $k = 1, 2, \dots, n$. Chacune de ces séquences admet un développement asymptotique de la forme (5), où $C = C_j$ est un contour fermé englobant l'intervalle $[x_{2j-1}, x_{2j}]$. Il n'est pas exclu que certaines de ces séquences aient le même développement asymptotique.

3.2. *Cas général.* Supposons que le polynôme $q(x)$ possède des zéros réels $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$ qui sont tous simples. On a alors la formule (19). La démonstration est la même qu'au nº 3.1 : la seule différence est dans le choix des domaines canoniques. Plus exactement, pour D^- on prend le domaine décrit au § 3, nº 3.5, 6 ; on choisit D^+ de façon analogue. Pour G_j on prend non pas un domaine de type bande, mais un domaine dont le bord contient les lignes de Stokes

l_{2j}, l_{2j}^*, l_{2j+1}, l_{2j+1}^* et qui s'applique sur la bande $a < \operatorname{Re} S < b$ munie d'un nombre fini de coupures verticales (§ 3, nº 3.5, 8). Les domaines D_j de type demi-plan tels que $\partial D_j \supset \tilde{l}_j$ se construisent comme dans le nº 2.5.

Les développements asymptotiques (19) sont valables dans le cas où la fonction $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ est holomorphe dans le voisinage complexe de l'intervalle $[x_1, x_{2n}]$ et où convergent les intégrales

$$\int_{-\infty} |\alpha_k(t)|\,dt, \quad \int^{+\infty} |\alpha_k(t)|\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(cf. nº 2.1). Les remarques faites au nº 2.1 restent en vigueur.

4. **$q(x)$ est une fonction paire.** Dans ce cas toute fonction propre est soit paire, soit impaire. Supposons que $q(x)$ possède très exactement quatre points de retour réels $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ tous simples ($x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$) et que c'est un polynôme pour simplifier. Le spectre est alors constitué de deux séquences de valeurs propres $\{\lambda_n^+\}$, $\{\lambda_n^-\}$. Leurs développements asymptotiques en puissances de n^{-1} sont entièrement confondus et sont de la forme (11), où le contour C englobe l'intervalle $[x_3, x_4]$, de sorte que

$$\lambda_n^+ - \lambda_n^- = O(n^{-\infty}), \quad n \to \infty.$$

Il s'avère que la différence $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ est exponentiellement petite lorsque $n \to \infty$: on constate une désagrégation exponentiellement petite du spectre. Désignons

$$\xi_0 = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}|\,dx, \quad \eta_0 = \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{q(x)}\,dx > 0.$$

Le terme principal de la représentation asymptotique du spectre est

$$\lambda_n^\pm = (n + 1/2)\,\pi\xi_0^{-1} + O(n^{-1}).$$

On a la formule de Landau-Lifchitz

$$|\lambda_n^+ - \lambda_n^-| = \xi_0^{-1} \exp\{-\eta_0 \lambda_n^\pm\} [1 + O(n^{-1})]. \tag{20}$$

Cette formule qui est prouvée dans [57] se base sur le fait suivant. Si $q(z)$ est une fonction paire, les points de retour et les lignes de Stokes sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées. Soit $(u(z), v(z))$ un système fondamental élémentaire de solutions associé au triplet (l, z_0, D). Alors $(u(-z), v(-z))$ est un système fondamental élémentaire associé au triplet $(-l, -z_0, -D)$. Considérons l'exemple : $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$; la démonstration de la formule (20) dans le cas général ne diffère que par des détails techniques insignifiants. Les lignes de Stokes sont

représentées sur la figure 3. Supposons que $y_2(x, \lambda)$ est une solution de la forme (6), que les domaines canoniques $D_4 \supset l_4$, $D_0 \supset l_0$ sont choisis comme dans le n° 2.5 et que les domaines canoniques $D_3 \supset l_3$ sont de la forme $D_3 = D_0^+ \cup l_3 \cup l_2 \cup (-D_0^+) \cup G$, où G est le domaine borné par les lignes de Stokes l_2, $l_{2'}$, l_3 et $l_{3'}$. Alors $D_3 = -D_3$.

Prolongeons le développement asymptotique de la solution y_2 de la ligne de Stokes l_4 à la ligne $l_{1'}$. Considérons les systèmes fondamentaux élémentaires $(u_j(z), v_j(z))$ associés aux triplets (l_j, x_j, D_j), $j = 4, 3, 2', 1'$ $(x_{j'} = x_j)$. Alors

$$\Omega_{41'} = \Omega_{2'1'}\Omega_{32'}\Omega_{43}.$$

On a $(u_{j'}(z), v_{j'}(z)) = (u_k(-z), v_k(-z))$ si $j = 1, k = 4$; $j = 2, k = 3$. Donc

$$\Omega_{2'1'} = \Omega_{43}^{-1}.$$

On a

$$\Omega_{43} = e^{-i\pi/3}\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \Omega_{32'} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\lambda\eta_0} \\ e^{\lambda\eta_0} & 0 \end{bmatrix},$$

où a, b et c sont de la même forme que (18). Comme $y_2(x, \lambda) = e^{-i\pi/12} v_1(x, \lambda)$ et que la solution $u_{1'}(x, \lambda)$ croît exponentiellement lorsque $x \to -\infty$, les valeurs propres se déterminent à partir de l'équation $(\Omega_{41'})_{12} = 0$ qui se ramène à la forme $c^2 = a^2 e^{-2\lambda\eta_0}$. Donc

$$c(\lambda) = \pm a(\lambda) e^{-\lambda\eta_0}. \tag{21}$$

Désignons par λ_n^+ (resp. λ_n^-) la séquence de racines correspondant au signe plus (resp. moins). Comme

$$a(\lambda_n^\pm) = i(-1)^{n+1}[1 + O(n^{-1})], \quad c'(\lambda_n^\pm) = 2i\lambda_n^\pm(-1)^{n+1},$$

on déduit (20) de (21).

Le cas où $q(x)$ est paire et admet huit zéros réels est traité dans [57].

5. **Problème sur le demi-axe.** Considérons le problème aux valeurs propres sur le demi-axe $x > 0$ pour l'équation (1) avec les conditions aux limites

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0.$$

Limitons-nous au cas élémentaire où $q(x)$ est un polynôme possédant pour $x \geqslant 0$ un seul point de retour simple $x_0 > 0$. Comme dans le n° 2.1, la fonction propre $y(x, \lambda) = \text{const} \cdot y_2(x, \lambda)$ et les valeurs propres se déterminent à partir de l'équation $y_2(0, \lambda) = 0$. Supposons que x_1 est fixe, $0 < x_1 < x_0$; pour $0 \leqslant x \leqslant x_1$ la représentation

asymptotique de la solution y_2 est alors de la forme (17), où x_2 doit être remplacé par x_0. On a donc un développement asymptotique identique à (10):

$$\lambda_n \xi_0 = n\pi + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \lambda_n^{-k}, \quad n \to \infty,$$

$$\xi_0 = \int_0^{x_0} |\sqrt{q(x)}|\, dx, \quad \beta_k = \frac{i}{2}(-1)^k \oint_C \alpha_k(z)\, dz,$$

où C est un contour fermé simple d'origine et d'extrémité au point $z = 0$ englobant l'intervalle $0 < x \leqslant x_0$ et orienté dans le sens positif. La détermination de $\sqrt{q(z)}$, $z \in C$, est choisie conformément à (9).

La représentation asymptotique d'un spectre discret se calcule de façon analogue sous une condition à la limite (3) pour tout nombre fini de points de retour sur le demi-axe $x > 0$.

§ 6. Représentation asymptotique du spectre discret de l'opérateur $-y'' + \lambda^2 q(x) y$. Problèmes non auto-adjoints

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \tag{1}$$

où $q(x)$ est une fonction à valeurs complexes, et le problème aux valeurs propres sur l'axe tout entier ou le demi-axe $[0, +\infty[$. La position de ces problèmes est la même qu'au § 5. On traite le cas où le spectre est discret et on étudie la représentation asymptotique des valeurs propres $\{\lambda_n\}$ lorsque $|\lambda_n| \to \infty$. Ceci étant, on admet que la fonction $q(z)$ est analytique au voisinage de l'axe réel ou du demi-axe réel.

Ce problème n'est pas auto-adjoint, puisque la fonction $q(x)$ prend des valeurs complexes. Signalons qu'on ne connaît aucun résultat sur la représentation asymptotique du spectre de l'équation (1) dans le cas où $q(x)$ est une fonction à valeurs complexes.

Considérons par exemple le problème aux valeurs propres

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sur l'intervalle $I = [0, 1]$ pour l'équation (1). Soient $q(x) \in C^\infty(I)$, $\operatorname{Arg} q(x) \not\equiv \text{const}$. Désignons par $y(x, \lambda)$ la solution de l'équation (1) qui satisfait les conditions de Cauchy $y(0, \lambda) = 0$, $y'(0, \lambda) = 1$; les valeurs propres λ_n sont alors les zéros de l'équation $y(1, \lambda) = 0$. La fonction $y(1, \lambda)$ est entière, du premier ordre de croissance et on

peut montrer qu'elle admet une infinité de zéros $\{\lambda_n\}$. Supposons que $q(x)$ est une fonction à valeurs réelles ; les nombres λ_n^2 sont alors réels. On peut dans ce cas déterminer leurs représentations asymptotiques en conjecturant que la fonction $q(x)$ admet un nombre fini de zéros sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $\operatorname{Arg} q(x) \not\equiv$ const, la représentation asymptotique des valeurs propres λ_n n'est pas connue. On ne sait même pas si elles se regroupent au voisinage d'un nombre fini de rayons du plan de λ complexe pour $|\lambda_n| \gg 1$. Il est très probable que ce ne soit pas le cas et que la formule asymptotique n'existe pas du tout. Cette hypothèse est dans une certaine mesure confirmée par ce paragraphe. Il se trouve que la disposition des valeurs propres d'indice élevé sur le plan de λ complexe et leur représentation asymptotique dépendent de la disposition des lignes de Stokes par rapport à l'axe réel ; pour les polynômes $q(x)$ ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

2. Problème sur l'axe tout entier. Soit $q(z)$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$:

$$q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{2}$$

Au § 5 on a signalé que la représentation asymptotique du spectre d'un problème auto-adjoint était liée à l'existence d'une ligne de Stokes finie. Si le polynôme $q(z)$ n'est pas de la forme $(az + b)^n$, on peut exhiber un nombre fini de valeurs de $\operatorname{Arg}\lambda = \psi_k$ pour lesquelles existent des lignes de Stokes finies. Mais pour qu'une telle ligne de Stokes engendre une séquence infinie de valeurs propres concentrée au voisinage du rayon $\operatorname{Arg}\lambda = \psi_k$, il faut que soient remplies certaines conditions portant sur la topologie des lignes de Stokes.

2.1. *Complexes de Stokes reliant* $+\infty$ *et* $-\infty$. La définition d'un complexe de Stokes est donnée au § 1. Posons $\operatorname{Arg}\lambda = \psi$, $\operatorname{Arg} a_0 = \varphi_0$ et supposons que $\exp\{i(2\psi + \varphi_0)\} \in]-\infty, 0[$ si n est pair et $\notin]-\infty, \infty[$ si n est impair. Il existe alors des domaines $D^-(\lambda)$ et $D^+(\lambda)$ de type demi-plan tels que $D^-(\lambda)$ contient un demi-axe $]-\infty, a]$ et $D^+(\lambda)$, un demi-axe $[b, +\infty[$.

Par définition, un complexe de Stokes $K(\lambda)$ *englobe* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si l'un des domaines en lesquels il subdivise le plan de z complexe contient $D^+(\lambda)$ (resp. $D^-(\lambda)$). Le complexe de Stokes $K(\lambda)$ *relie* $+\infty$ à $-\infty$ s'il englobe $+\infty$ et $-\infty$ (fig. 20). Posons les conditions:

1) tous les zéros du polynôme $q(z)$ sont simples ;

2) pour chaque $\operatorname{Arg}\lambda$ fixe, l'équation (1) admet au plus une ligne de Stokes finie.

Il est immédiat de voir que ce cas est générique.

La fonction propre satisfait les conditions aux limites

$$y(-\infty, \lambda) = 0, \quad y(+\infty, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Fixons Arg $\lambda = \psi_0$ et supposons que $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\}$ est positive. Pour chaque $\lambda = \rho e^{i\psi_0}$, $\rho > 0$, l'équation (1) admet alors une solution telle que

$$y_2(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_0, x)\}, \quad x \to +\infty, \tag{4}$$

où $x_0 \gg 1$, Re $[\lambda S(x_0, x)] > 0$ pour $x > x_0$, de sorte que $y_2(+\infty, \lambda) = 0$. La deuxième solution linéairement indépendante croît exponentiellement pour $x \to +\infty$, de sorte que les valeurs propres se

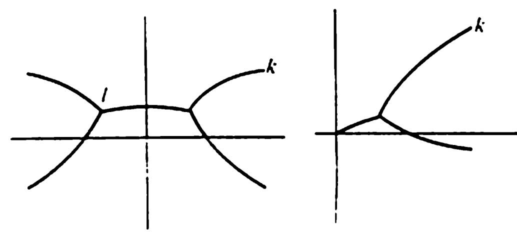


Fig 20

déterminent à partir de l'équation $y_2(-\infty, \lambda) = 0$. Soit S_δ le secteur $|\text{Arg}\, \lambda - \psi_0| \leqslant \delta \ll 1$; la représentation asymptotique (4) est alors valable lorsque $x \to +\infty$ et pour $\lambda \in S_\delta$ fixe, $\lambda \neq 0$. Cette représentation est double : elle est valable aussi pour $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\delta$ uniformément en $x \geqslant x_0$.

Supposons que ψ_0 est telle qu'il n'existe pas de complexe de Stokes reliant $+\infty$ à $-\infty$. Le secteur S_δ ne peut alors contenir qu'un nombre fini de points du spectre pour $\delta \ll 1$. Prouvons ceci dans le cas où il n'existe pas de lignes de Stokes finies. La solution $y_2(z, \lambda)$, $\lambda \in S_\delta$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 \gg 1$, décroît alors exponentiellement lorsque $|z| \to \infty$ dans le domaine $D^+(\lambda)$ et croît exponentiellement dans tous les autres domaines de type demi-plan, y compris dans le domaine $D^-(\lambda)$ (§ 3). Le cas général est traité dans [57].

Soient $z_\pm$ des points de retour situés sur $\partial D^\pm$. Posons

$$\xi_0 = \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{q(z)}\, dz;$$

le contour d'intégration ne passe pas par les autres points de retour. Il existe alors une seule valeur Arg $\lambda = \psi_0$ telle que Re $(\xi_0 e^{i\psi_0}) = 0$; ceci étant, il existe une ligne de Stokes l finie reliant les points z_- et z_+. Supposons que $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\}$ est positive pour n pair et pas réelle pour n impair. Le complexe de Stokes contenant la ligne l relie $+\infty$ à $-\infty$.

10—01011

Le problème (1), (3) admet une séquence infinie de valeurs propres $\{\lambda_n\}$ pour laquelle est valable le développement asymptotique

$$\lambda_n \oint_C \sqrt{q(z)}\,dz + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_n)^k \oint_C \alpha_k(z)\,dz = \pi i\,(2n+1), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

où C est un contour fermé simple englobant la ligne l. Il est évident qu'existe la séquence $\{-\lambda_n\}$. En outre, le problème (1), (3) peut admettre un nombre fini de valeurs propres. La démonstration peut être effectuée par la même méthode qu'au § 2, n°s 2.1, 2.5.

Le terme principal de la représentation asymptotique est de la forme

$$\lambda_n = \pi i\,(2n+1) \left[\oint_C \sqrt{q(z)}\,dz\right]^{-1} + O(n^{-1}).$$

On remarquera que $\oint_C \sqrt{q(z)}\,dz$ est l'une des périodes de l'intégrale abélienne $\int \sqrt{q(z)}\,dz$.

Comme au § 5, on peut déterminer la représentation asymptotique des fonctions propres et obtenir le développement asymptotique de λ_n en puissances de n^{-1}. La fonction propre $y(x, \lambda_n)$ possède n zéros situés au voisinage de la ligne l.

Ces résultats peuvent être généralisés au cas où il existe $k > 1$ complexes de Stokes reliant $+\infty$ à $-\infty$, c'est-à-dire qu'ils sont disposés comme les complexes de Stokes du cas étudié dans le § 5, n° 5.

2.2. *Problème sur le demi-axe.* Considérons le problème aux valeurs propres pour l'équation (1) sur le demi-axe $[0, +\infty[$ avec une condition à la limite en 0:

$$ay(0, \lambda) + by'(0, \lambda) = 0, \tag{6}$$

ou $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $q(z)$ un polynôme de la forme (2), où $n \geqslant 1$. Si $\exp\{i(2\psi_0 + \varphi_0)\} \notin\,]-\infty, 0]$, il existe un domaine $D^+(\lambda)$ de type demi-plan contenant un demi-axe de la forme $]x_0, +\infty[$, $x_0 > 0$. Par définition, le complexe de Stokes $D^+(\lambda)$ relie 0 à $+\infty$ si:

1) il existe un domaine $D(\lambda) \supset D^+(\lambda)$ tel que $\partial D(\lambda) \subset K(\lambda)$;

2) il existe une ligne de Stokes $l(\lambda) \in \partial D(\lambda)$ passant par le point $z = 0$.

La variante la plus simple est représentée sur la figure 20.

Supposons que $q(z)$ satisfait les conditions 1), 2) du n° 2.1. Comme au n° 2.1, on peut montrer que si pour $\operatorname{Arg}\lambda = \psi_0$ il n'existe pas de complexe de Stokes $K(\lambda)$ reliant 0 à ∞, le secteur S_δ: $|\operatorname{Arg}\lambda - \psi_0| \leqslant \delta \ll 1$ ne peut contenir qu'un nombre fini de valeurs

propres. Supposons qu'un tel complexe de Stokes existe pour $\operatorname{Arg} \lambda = \psi_0$; limitons-nous à la condition à la limite $y(0, \lambda) = 0$. Il existe alors une séquence infinie de valeurs propres $\{\lambda_n\}$ dont la représentation asymptotique est donnée par la formule (22) du § 5, où le contour C englobe non pas l'intervalle $[0, x_0[$, mais la ligne l.

Les résultats exhibés ci-dessus s'étendent au cas où la fonction $q(z)$ est holomorphe au voisinage de l'axe réel ou du demi-axe $[0, +\infty[$.

3. Equation de Sturm-Liouville. Considérons l'équation

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y, \tag{7}$$

où $q(z)$ est un polynôme de la forme (2) à coefficients complexes. Etudions la représentation asymptotique des valeurs propres du problème sur l'axe tout entier et sur un demi-axe. Soit $a_0 = \rho_0 e^{i\theta}$, $\rho_0 > 0$; on admettra que sont satisfaites les conditions: 1) $|\theta| < \pi$; 2) $\theta \neq 0$ si m est impair pour le problème sur le demi-axe. Le spectre du problème sur l'axe tout entier et sur le demi-axe est alors discret.

Le changement de variable

$$z = \varepsilon^{-1}\zeta, \quad \varepsilon = |\lambda|^{-1/m}$$

ramène l'équation (7) à l'équation analogue à (1):

$$y'' - \mu^2 Q(\zeta, \varepsilon)\, y = 0, \tag{8}$$

$$\mu = |\lambda|^{1/2+1/m}, \quad Q(\zeta, \varepsilon) = a_0\zeta^m - e^{i\varphi} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \varepsilon^k \zeta^{m-k},$$

où $\varphi = \operatorname{Arg} \lambda$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Il est clair que pour $|\varepsilon|$ petit, la structure des points de retour de l'équation (8) est environ la même que pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire comme pour l'équation

$$w'' - \mu^2 (a_0\zeta^m - e^{i\varphi})\, w = 0. \tag{9}$$

3.1. *Topologie des lignes de Stokes de l'équation* (9). Les points de retour sont

$$\zeta_k(\varphi) = \rho_0^{-1/m} e^{i\psi_k}, \quad \psi_k = \frac{\varphi - \theta + 2k\pi}{m}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 ;$$

ils sont tous simples et situés sur le cercle $|\zeta| = \rho_0^{-1/m}$. Notons

$$S(a, b) = \int_a^b \sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi}}\, dt.$$

Soient C^0 le plan de ζ complexe muni de coupures le long des rayons $\gamma_k : \zeta = \rho e^{i\psi_k}$, $\rho_0^{-1/m} \leqslant \rho < \infty$ issus des points de retour, Σ_k le secteur $\psi_{k-1} < \operatorname{Arg} \zeta < \psi_k$. On numérotera les points de retour, les

rayons, etc., modulo m. La détermination de la fonction $S = S(0, z)$ contenue dans le domaine C^0 sera normalisée par la condition

$$\sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi}}\,|_{t=0} = ie^{i\varphi/2}.$$

La fonction $S(0, z)$ s'exprime au moyen de l'intégrale de Christoffel-Schwarz, d'où il suit que le secteur Σ_k est envoyé bijectivement par la fonction S sur un domaine $\tilde{\Sigma}_k$ du plan de S complexe. La frontière de ce domaine est une ligne polygonale composée de segments $\tilde{\Gamma}_j = [0, P_j]$ et de rayons $\tilde{\Gamma}_{j'} = [P_j, \infty[$, $j = k-1, k$; $\tilde{\Gamma}_j$ et $\tilde{\Gamma}_{j'}$ font un angle de $3\pi/2$ au point P_j (l'angle est pris à l'intérieur de $\tilde{\Sigma}_k$). Ici P_j est l'image du point de retour $\zeta_j(\varphi)$:

$$P_j = c_0 \rho_0^{-1/m} e^{i\varphi/2} \zeta_k(\varphi), \quad c_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^m}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} \frac{\Gamma(1/m)}{\Gamma(3/2+1/m)}.$$

Fixons φ et montrons que si Γ_k n'est pas une ligne de Stokes, alors il est contenu dans un domaine D de type demi-plan et ∂D contient les lignes de Stokes issues du point de retour ζ_k.

Soient Γ_k^+ et Γ_k^- les bords de la coupure Γ_k appartenant respectivement aux secteurs Σ_{k+1} et Σ_k.

Supposons que la droite l: Re S = Re P_k est contenue dans $\tilde{\Sigma}_k$; alors $\tilde{\Sigma}_k$ renferme un demi-plan $\tilde{D}$ de la forme Re $S >$ Re P_k ou Re $S <$ Re P_k. Sa contre-image est le domaine D cherché et celle de la droite l est constituée de deux lignes de Stokes formant ∂D.

Supposons que $\tilde{\Sigma}_k$ ne contient pas l; il contient alors l'un des rayons verticaux d'origine P_k, Re S = Re P_k sur un rayon que nous désignerons par l'. La contre-image de l' est une ligne de Stokes L'.

Soit D un domaine borné par des lignes de Stokes et par L'. Le secteur Σ_{k+1} contient entièrement soit une ligne de Stokes L^+ d'origine ζ_k, soit deux lignes de Stokes. Désignons par D^+ le domaine limité par Γ_k^+ et L^+; s'il existe deux lignes de Stokes, prenons pour L^+ celle d'entre elles pour laquelle D^+ ne contient pas de lignes de Stokes. Le domaine $D = D^+ \cup D^- \cup \Gamma_k$ contient le rayon Γ_k et pas de points de retour; D est le domaine cherché.

3.2. *Complexes de Stokes.* De la condition 1) il suit qu'il existe un domaine $D^+(\varphi)$ de type demi-plan qui contient un demi-axe de la forme $[a, +\infty[$. Les rayons frontières du secteur $S_+ : \psi_- < \operatorname{Arg} \psi < \psi_+$, $\psi_\pm = (\pm\pi - \theta)/(m+2)$, sont asymptotes des lignes de Stokes bornant le domaine $D^+(\varphi)$. Montrons que le point de retour $\zeta_0(\varphi)$ est situé sur $\partial D^+(\varphi)$ pour tout φ.

Supposons que $\psi_- < \psi_0 < \psi$; le rayon $\Gamma_0(\varphi)$ est alors contenu dans le secteur S_+. En vertu du n° 3.1, ce rayon est contenu dans un domaine de type demi-plan qui doit nécessairement coïncider ici avec $D^+(\varphi)$. Ce qui prouve cette assertion pour $|\alpha| < \pi$, $\alpha = [(m + 2)\varphi - 2\theta]/m$. Supposons que $\alpha \in [\pi, \pi + (2\pi/m)]$, alors $S_+ \subset \Sigma_0$ et le secteur S_+ ne contient pas de point de retour. Considérons l'image $\tilde{\Sigma}_0$ du secteur Σ. On a

$$\operatorname{Arg} P_0 = \pi/2 + \alpha \geqslant \pi, \quad \operatorname{Arg} P_{-1} = \operatorname{Arg} P_0 - 2\pi/m,$$

de sorte que $\operatorname{Re} P_0 \leqslant \operatorname{Re} P_{-1} < 0$ et $\tilde{\Sigma}_0$ contient donc le demi-plan Π: $\operatorname{Re} S < \operatorname{Re} P_0$. Comme $\operatorname{Arg} S(0, x) \to \pi + \theta/2$ lorsque $x \to +\infty$, il vient $\operatorname{Re} S(0, x) \to -\infty$ et l'image du demi-axe $[0, +\infty[$ pour $a \gg 1$ est contenue dans le domaine Π. Donc la contre-image de Π est confondue avec le domaine $D^+(\varphi)$.

D'après les conditions 1) et 2), il existe un domaine $D^-(\varphi)$ de type demi-plan contenant un demi-axe de la forme $]-\infty, -a]$. Si m est pair, $\zeta_{m/2}(\varphi) \in \partial D^-(\varphi)$; si m est impair, $\zeta_{(m+1)/2}(\varphi) \in \partial D^-(\varphi)$ pour $0 < \theta < \pi$ et $\zeta_{(m-1)/2}(\varphi) \in D^-(\varphi)$ pour $-\pi < \theta < 0$. Ceci résulte des raisonnements ci-dessus.

Supposons que m est pair; le complexe de Stokes reliant $+\infty$ à $-\infty$ doit alors nécessairement contenir les points de retour $\zeta_0(\varphi)$ et $\zeta_{m/2}(\varphi)$. Ces points doivent être situés sur une ligne de Stokes finie et, en particulier, l'intégrale $S(\zeta_0(\varphi), \zeta_{m/2}(\varphi))$ doit être imaginaire pure. D'où il s'ensuit que les points $+\infty$ et $-\infty$ sont reliés si et seulement si

$$\varphi = 2\theta/(m + 2). \tag{10}$$

Si m est impair, les points $+\infty$ et $-\infty$ sont reliés si et seulement si

$$\varphi = (2\theta - \pi)/(m + 2), \quad 0 < \theta < \pi; \quad \varphi = (2\theta + \pi)/(m + 2), \quad -\pi < \theta < 0. \tag{11}$$

Les points 0 et $+\infty$ sont reliés si et seulement si φ est de la forme (10), que m soit pair ou impair.

3.3. *Représentation asymptotique des valeurs propres.* Les points de retour de l'équation (7) sont de la forme

$$\zeta_k(\varphi, \varepsilon) = \zeta_k(\varphi)\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{jk}(\varphi)\varepsilon^j\right],$$

où la série converge pour les petits $|\varepsilon|$. Il existe un complexe de Stokes reliant $+\infty$ à $-\infty$ (ou 0 à $+\infty$) pour $\varphi = \varphi_0(\varepsilon)$, où $\varphi_0(\varepsilon)$ est une fonction régulière pour les petits $\varepsilon \geqslant 0$, $\varphi_0(0) = \varphi_0$, et φ_0 est de la forme (10) ou (11). La représentation asymptotique des valeurs propres du problème sur l'axe tout entier est donnée par la formu-

le (5), où il convient de remplacer λ par μ et q par $Q(\zeta, \varepsilon)$. Le contour C englobe la ligne de Stokes reliant les points $\zeta_0(\varphi_0)$ et $\zeta_k(\varphi_0)$, où $k = m/2$ pour m pair et $k = (m+1)/2$ pour m impair, $0 < \theta < \pi$, $k = (m-1)/2$ pour m impair, $-\pi < \theta < 0$. On a

$$\left| \oint_C \sqrt{a_0 t^m - e^{i\varphi_0}}\, dt \right| = |\operatorname{Im}(P_0 - P_k)|,$$

et la représentation asymptotique des valeurs propres est de la forme

$$\lambda_n = A_m c_m e^{i\varphi_0} n^{2m/(m+2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k n^{-2k/(m+2)} \right],$$

où φ_0 est de la forme (10) ou (11),

$$A = |a_0|^{1/(m+2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}\, 2m\Gamma(3/2 + 1/m)}{\Gamma(1/m)\, c_m} \right]^{(m+2)/(2m)}$$

et $c_m = 1$ pour m pair, $c_m = \cos \pi/(2m)$ pour m impair.

§ 7. Problème aux valeurs propres à points singuliers réguliers

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$(1 - z^2) w'' + p(z) w' + [\lambda q(z) + r(z)] w = 0, \tag{1}$$

où les fonctions $p(z)$, $q(z)$ et $r(z)$ sont holomorphes dans un domaine simplement connexe D contenant l'intervalle $I = [-1, 1]$. L'équation (1) admet deux points singuliers $z = 1$ et $z = -1$, tous deux réguliers d'exposants caractéristiques $(0, \rho_+)$, $(0, \rho_-)$, où $\rho_\pm = 1 \pm p(\pm 1)/2$. Le point $z = 1$ ne sera pas singulier si et seulement si $p(1) = q(1) = r(1) = 0$; ce cas et le cas analogue pour $z = -1$ seront exclus.

La classe des équations de la forme (1) comprend l'équation de Legendre, l'équation hypergéométrique, l'équation de Mathieu, l'équation pour fonctions sphéroïdales angulaires allongées et pour fonctions sphéroïdales coulombiennes angulaires d'indice $m = 0$, etc. Les nombres $\rho_\pm$ sont réels pour les équations énumérées.

Soit U un petit voisinage du point $z = 1$. Il existe alors dans U un système fondamental de solutions $(w_1^+(z, \lambda), w_2^+(z, \lambda))$ de la forme suivante (chap. I, § 2):

1) Le nombre ρ_+ n'est pas entier. La solution w_1^+ est holomorphe dans U,

$$w_2^+(z, \lambda) = (1 - z)^{\rho_+} \tilde{w}_2^+(z, \lambda), \tag{2}$$

la fonction $\tilde{w}_2^+$ est holomorphe dans U. Introduisons la normalisation $w_1^+(1, \lambda) = \tilde{w}_2^+(1, \lambda) = 1$; les fonctions $w_1^+(z, \lambda)$ et $\tilde{w}_2^+(z, \lambda)$ sont holomorphes par rapport à l'ensemble des variables (z, λ) pour $z \in U$, $\lambda \in C$.

2) Le nombre $\rho_+ < 0$ est entier. La solution w_1^+ est comme dans 1),

$$w_2^+(z, \lambda) = \theta_+(\lambda)\, w_1^+(z, \lambda) \ln(1 - z) + (1 - z)^{\rho_+}\, \tilde{w}_2^+(z, \lambda), \tag{3}$$

la fonction $\tilde{w}_2^+$ est holomorphe dans U et n'est pas égale à 0 pour $z = 1$. Le coefficient $\theta_+(\lambda)$ est un polynôme de λ.

3) Le nombre $\rho_+ \geqslant 0$ est entier. La solution w_1^+ est de la forme (2) et est holomorphe dans U,

$$\tilde{w}_2^+(z, \lambda) = \tilde{w}_3^+(z, \lambda) + \theta_+(\lambda)\, w_1^+(z, \lambda) \ln(1 - z), \tag{4}$$

où la fonction $\tilde{w}_3^+$ est holomorphe dans U, $\theta_+(\lambda)$ est un polynôme de λ.

Dans n'importe lequel de ces cas l'équation (1) admet une solution holomorphe en $z = 1$. Il existe un système fondamental analogue $(w_1^-(z, \lambda), w_2^-(z, \lambda))$ au voisinage du point $z = -1$.

On dira qu'un nombre λ est une *valeur propre* de l'équation (1) (sur l'intervalle $]-1, 1[$) s'il existe une solution $w(z, \lambda) \not\equiv 0$ holomorphe aux points $z = 1$ et $z = -1$. Cette solution sera appelée *fonction propre* ; de la théorie analytique des équations différentielles il suit qu'une fonction propre est holomorphe dans le domaine D. Désignons par Σ l'ensemble de toutes les valeurs propres.

Cette position du problème aux valeurs propres diffère de la position classique dans laquelle les conditions aux limites sont données aux points $z = 1$ et $z = -1$. Par exemple, pour l'équation de Legendre

$$(1 - z^2)\, w'' - 2zw' + \lambda w = 0$$

les conditions aux limites sont

$$|\, w(-1)\, | < \infty, \quad |\, w(1)\, | < \infty.$$

Pour cette équation $\rho_- = \rho_+ = 0$ (variante 3)), de sorte que l'une des solutions est holomorphe au point $z = 1$, l'autre possède une singularité logarithmique (idem pour le point $z = -1$). Dans le cas général, les conditions aux limites pour le problème aux valeurs propres peuvent être de la forme suivante :

$$|\, w^{(n_-)}(-1) | < \infty, \quad |\, w^{(n_+)}(1)\, | < \infty,$$

où les nombres $n_\pm$ peuvent être exprimés en fonction de $\rho_\pm$.

Le spectre Σ coïncide avec l'ensemble des zéros d'une fonction entière d'ordre de croissance $\leqslant 1/2$. Donc

$$\Sigma\, |\, \lambda_n\, |^{-1/2+\varepsilon} < \infty,$$

où la somme est étendue à tous les $\lambda_n \in \Sigma \setminus \{0\}$, et $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Il est visiblement impossible d'obtenir une information plus précise sur le comportement des valeurs propres λ_n, $n \to \infty$, dans le cas général. Dans ce paragraphe on a trouvé la représentation asymptotique de λ_n sous la condition que $q(x) > 0$, $x \in I$. Cette condition est réalisée pour toutes les classes d'équations énumérées ci-dessus.

2. Faux spectre. Si $\lambda \in \Sigma$, l'équation (1) admet une solution univalente dans le domaine D : une fonction propre (il n'est question que des solutions non triviales). Cette solution est univalente visiblement dans le domaine D muni d'une coupure le long de l'intervalle I, c'est-à-dire dans $D \setminus I$. Posons le problème suivant. Supposons que pour un certain λ l'équation (1) admet une solution univalente dans $D \setminus I$. λ sera-t-il valeur propre de l'équation (1)? Trois cas peuvent se présenter:

I. Les nombres ρ_- et ρ_+ ne sont pas entiers. Dans ce cas ou bien $\lambda \in \Sigma$, ou bien les solutions w_2^- et w_2^+ sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire que

$$w_2^+(z, \lambda) \equiv C(\lambda)\, w_2^-(z, \lambda).$$

II. Le nombre ρ_- est entier, ρ_+ ne l'est pas. Dans ce cas ou bien $\lambda \in \Sigma$, ou bien les solutions w_2^+ et w_1^- sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire que

$$w_2^+(z, \lambda) \equiv C(\lambda)\, w_1^-(z, \lambda).$$

III. ρ_- et ρ_+ sont entiers. Dans ce cas $\lambda \in \Sigma$.

Désignons par $\tilde{\Sigma}$ l'ensemble de tous les $\lambda \notin \Sigma$ pour lesquels l'équation (1) admet une solution univalente dans le domaine $D \setminus I$. Appelons l'ensemble $\tilde{\Sigma}$ *faux spectre*. De I-III il s'ensuit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda \in \Sigma \cup \tilde{\Sigma}$ est que l'un des quatre couples de solutions canoniques (w_1^+, w_1^-), (w_1^+, w_2^-), (w_2^+, w_1^-) et (w_2^+, w_2^-) soit linéairement dépendant.

Si $\lambda \in \Sigma \cup \tilde{\Sigma}$, le groupe de monodromie G de l'équation (1) peut être entièrement décrit dans le domaine D. En particulier, ce groupe est résoluble et dans le cas III il est nilpotent.

3. Représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) dans le domaine $D \setminus I$. Introduisons les notations

$$\lambda = \mu^2, \quad S(a, z) = \int_a^z \sqrt{\frac{q(t)}{1-t^2}}\, dt,$$

$$f(a, z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^z \frac{p(t)}{1-t^2}\, dt\right\},$$

$$w_{1,2}^0(z, \mu; a) = \left(\frac{1-z^2}{q(z)}\right)^{-1/4} f(a, z) \exp\{\pm i\mu S(a, z)\}.$$

Lorsque $\mu \to \infty$ l'équation (1) admet une solution asymptotique formelle de la forme

$$w_{1,2}(z, \mu) = w^0_{1,2}(z, \mu; a) \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\pm \mu)^{-k} \int_a^z y_k(t)\, dt\right\}, \qquad (5)$$

où le signe + (resp. —) est pris pour la solution w_1 (resp. w_2). Les fonctions $y_k(z)$ se déterminent à partir des relations récurrentielles

$$y_{k+1}(z) = \frac{i}{2\sqrt{\tilde{q}(z)}}\left[y_k'(z) + \tilde{p}(z)\, y_k(z) + \sum_{j=0}^{k} y_j(z)\, y_{k-j}(z)\right],$$

$$y_0(z) = -\frac{\tilde{q}'(z)}{4\tilde{q}(z)} - \frac{\tilde{p}(z)}{2}, \qquad (6)$$

$$y_1(z) = \frac{i}{2\sqrt{\tilde{q}(z)}}\left[y_0'(z) + \tilde{r}(z) + \left(\frac{\tilde{q}'(z)}{4\tilde{q}(z)}\right)^2 - \frac{\tilde{p}^2(z)}{4}\right],$$

où

$$\tilde{q}(z) = q(z)(1-z^2)^{-1}, \quad \tilde{p}(z) = p(z)(1-z^2)^{-1}, \quad \tilde{r}(z) = r(z)(1-z^2)^{-1}.$$

Dans la suite on admettra que

$$q(x) > 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (7)$$

Vu que la représentation asymptotique des solutions ne nous intéresse qu'au voisinage de l'intervalle I, on peut admettre que $q(z) \neq 0$ dans le domaine D. Soit Π le demi-axe Re $\mu > 0$, $|\operatorname{Im} \mu| < A$, où $A > 0$ est fixe. On étudiera la représentation asymptotique des solutions pour $\mu \in \Pi$, $\mu \to \infty$.

3.1. *Lignes de Stokes.* Soit $\lambda > 0$; l'intervalle $I = [-1, 1]$ est alors une ligne de Stokes. Les lignes de niveau Re $S(a, z) =$ const proches de I sont des courbes analytiques fermées simples englobant l'intervalle I. La fonction $\sqrt{\tilde{q}(z)}$ se décompose dans le domaine $D \diagdown I$ en deux déterminations holomorphes. Prenons la détermination de la racine qui est strictement négative sur le bord supérieur de la coupure I:

$$\sqrt{\tilde{q}(x+i0)} < 0, \quad -1 < x < 1; \qquad (8)$$

alors

$$\sqrt{\tilde{q}(x-i0)} > 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$\sqrt{\tilde{q}(x)} = -i\,|\sqrt{\tilde{q}(x)}|, \quad x > 1.$$

Pour un tel choix de la détermination de la racine, on a

$$\operatorname{Re}\,[iS\,(1,\, z)] < 0, \quad z \in D \setminus I, \tag{9}$$

où l'intégrale est étendue à un chemin contenu dans $D \setminus I$. La ligne de niveau $\operatorname{Im} S\,(1, z) = a$, pour $a > 0$ petit, est une courbe fermée simple englobant l'intervalle I. Remplaçons le domaine D par le domaine $\operatorname{Im} S\,(1, z) < a$ et désignons le domaine obtenu encore par D.

Le domaine $D \setminus I$ est de type couronne. La fonction $S = S\,(1, z)$ est infinivalente dans ce domaine. Désignons par $\tilde{D}$ la surface de Riemann de la fonction S considérée dans $D \setminus I$ ($\tilde{D}$ est le revêtement universel de $D \setminus I$) ; la fonction $S\,(1, z)$ est alors à un feuillet dans le domaine $\tilde{D}$ et l'envoie dans la bande G: $0 < \operatorname{Im} S < a$. Ceci étant, la partie de ∂G sur laquelle $\operatorname{Im} S = 0$ est composée d'une infinité de segments identiques $l_0, l_1, l_{-1}, l_2, l_{-2}, \ldots$, où l_0, l'image du bord supérieur de la coupure I, est de la forme $[0, ib]$, $b > 0$.

3.2. *La solution* w_1. Les solutions de l'équation (1) sont généralement des fonctions infinivalentes dans le domaine $D \setminus I$ et leurs surfaces de Riemann sont confondues avec $\tilde{D}$. Il est donc nécessaire de définir soigneusement la notion de solution. Fixons un point $a \in \partial D$, $a > 1$, et donnons-nous un germe $w\,(z, \mu)$ d'une solution en ce point. Le prolongement analytique de ce germe suivant tous les chemins d'origine a nous conduit à une fonction multivalente dont chaque germe est solution de l'équation (1). Désignons aussi cette fonction par $w\,(z, \mu)$. Retranchons de la bande G les ε-voisinages des images de tous les points de retour et désignons par $\tilde{D}_\varepsilon^1$ la contre-image du domaine obtenu. Pour $\mu \in \Pi$, $\operatorname{Re} \mu \geqslant a_0 \gg 1$ et pour tout $N \geqslant 1$, l'équation (1) admet une solution de la forme

$$w_1^N(z, \mu) = w_1^0(z, \mu\,;\, a) \exp\left\{\sum_{j=0}^{N} \mu^{-j} \int_a^z y_j(t)\, dt\right\} [1 + O\,(\mu^{-N-1})], \tag{10}$$

où l'estimation du résidu est uniforme en z appartenant à tout compact $K \subset \tilde{D}_\varepsilon^1$. La solution w_1^N est holomorphe par rapport à $\mu \in \Pi$, $\operatorname{Re} \mu \geqslant a_0 > 0$ pour tout $z \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ fixe. Le développement asymptotique (10) peut être dérivé un nombre arbitraire de fois par rapport à z et à μ. Dans la suite on conviendra d'écrire w_1 pour w_1^N.

Au voisinage de a choisissons la détermination de $\sqrt[4]{\tilde{q}\,(z)}$ telle que

$$\sqrt[4]{\tilde{q}\,(a)} = e^{i\pi/4} \left| \sqrt[4]{\tilde{q}\,(a)} \right|.$$

Remplaçons ensuite la fonction w_1^0 $(z, \mu; a)$ par la fonction

$$w_1^0(z, \mu) = [\tilde{q}(z)]^{-1/4} f(a, z) \exp\{i\mu S(1, z)\},$$

ce qui revient à multiplier la solution w_1 par une constante.

L'existence du développement asymptotique (10) résulte de ce que tout point $z \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ peut être relié à a par un chemin canonique γ. Pour γ on peut prendre la contre-image du segment situé dans G_ε et reliant les images des points mentionnés. Le germe initial de la solution w_1 pour $z = a$ est égal à $w_1(a, \mu) = 1 + O(\mu^{-N-1})$.

Supposons que $-1 < x < 1$, la courbe $\alpha^+(x)$ relie les points a et x et $\operatorname{Im} z > 0$ sur cette courbe. Désignons par $w_1(x + i0, \mu)$ la valeur obtenue en prolongeant w_1 analytiquement le long de $\alpha^+(x)$. Si $\alpha^-(x)$ est la courbe symétrique de $\alpha^+(x)$ par rapport à l'axe réel, nous désignerons par $w_1(x - i0, \mu)$ la valeur obtenue en prolongeant w_1 analytiquement le long de $\alpha^-(x)$. De (10) il s'ensuit que pour $-1 + \delta \leqslant x \leqslant 1 - \delta$, où $0 < \delta < 1$, on a

$$\begin{gathered} w_1(x + i0, \mu) = -i\,|\tilde{q}(x)|^{-1/4}\,[1 + O(\mu^{-1})] \times \\ \times \exp\left\{-i\mu \int_1^x \left|\sqrt{\tilde{q}(t)}\right| dt - \frac{1}{2}\int_{\alpha^+} \tilde{p}(t)\,dt\right\}, \\ w_1(x - i0, \mu) = |\tilde{q}(x)|^{-1/4}\,[1 + O(\mu^{-1})] \times \\ \times \exp\left\{i\mu \int_1^x \left|\sqrt{\tilde{q}(t)}\right| dt - \frac{1}{2}\int_{\alpha^-} \tilde{p}(t)\,dt\right\}. \end{gathered} \tag{11}$$

On remarquera que la solution w_1 décroît exponentiellement lorsque $\mu \to \infty$, $\mu \in \Pi$, en tout point $z \in \tilde{D}$, ce qui découle de (9).

3.3. *La solution w_2.* Fixons un point b de la lèvre supérieure de la coupure I et soit $B = S(1, b)$, où l'intégrale est prise le long du chemin $-\alpha^+(b)$. Désignons par G_ε^2 l'ensemble de tous les points $S \in G_\varepsilon^1$ reliables au point B par une courbe le long de laquelle $\operatorname{Re}(iS)$ est décroissante, et par $\tilde{D}_\varepsilon^2$ sa contre-image. La projection de l'ensemble $\tilde{D}_\varepsilon^2$ sur le plan Z s'obtient en retranchant de l'adhérence du domaine $D \setminus I$ les voisinages des points $z = -1$, $z = 1$ et de la lèvre inférieure de la coupure I.

Pour $\mu \in \Pi$, $\operatorname{Re} \mu \geqslant a_0 \gg 1$ et pour tout $N \geqslant 1$, l'équation (1) admet une solution w_2^N de la forme

$$w_2^N(z, \mu) = w_2^0(z, \mu; a) \exp\left\{\sum_{j=1}^N (-\mu)^{-j} \int_a^z y_j(t)\,dt\right\} [1 + O(\mu^{-N-1})], \tag{12}$$

l'estimation du résidu est uniforme en z appartenant à un compact quelconque $K \subset \tilde{D}_\varepsilon^2$. Les autres propriétés de la solution w_2^N sont les mêmes que pour la solution w_1^N. On écrira w_2 pour w_2^N et comme plus haut on remplacera la fonction $w_0^2(z, \mu; a)$ par la fonction

$$w_2^0(z, \mu) = [\tilde{q}(z)]^{-1/4} f(a, z) \exp\{-i\mu S(1, z)\}.$$

On remarquera que la solution w_2 croît exponentiellement pour $\mu \to \infty, \mu \in \Pi$, en chaque point $z \in \tilde{D}_\varepsilon^2 \setminus I$ en vertu de (9). Les solutions w_1 et w_2 forment un système fondamental de l'équation (1). En choisissant $\tilde{q}^{-1/4}(a)$ comme au n° 3.2, on obtient

$$w_2(x+i0, \mu) = -i\, |\tilde{q}(x)|^{-1/4} [1+O(\mu^{-1})] \times \\ \times \exp\left\{i\mu \int_1^x \left|\sqrt{\tilde{q}(t)}\right| dt - \frac{1}{2}\int_{\alpha^+} \tilde{p}(t)\, dt\right\}. \quad (13)$$

Cependant la formule (12) ne permet pas de calculer la valeur $w_2(x-i0, \mu)$.

3.4. *Matrices de passage*. Trouvons la représentation asymptotique de la solution w_2 sur la lèvre inférieure de la coupure, c'est-à-dire la valeur $w_2(x-i0, \mu)$. Fixons un point $x \in\,]-1, 1[$ et soient $\alpha^\pm = \alpha^\pm(x)$ les chemins décrits au n° 3.2, $\gamma^+ = \alpha^+(\alpha^-)^{-1}$, de sorte que γ^+ est une courbe fermée simple contournant le point $z=1$ dans le sens positif. Posons $w = (w_1, w_2)^T$; alors

$$w(x-i0, \mu) \equiv T_1(\mu)\, w(x+i0, \mu).$$

Introduisons les notations

$$a_\pm = \exp\{2\pi i \rho_\pm\}, \qquad A = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k}\alpha_k\right\}, \quad (14)$$

$$\alpha_{2k} = -\oint_{\gamma^+} y_{2k}(t)\, dt, \quad \alpha_{2k+1} = \left(\int_{\alpha^-} + \int_{\alpha^+}\right) y_{2k+1}(t)\, dt.$$

Pour $\mu \in \Pi$, $\mu \to \infty$, on a

$$t_{11}^1(\mu) = O(\mu^{-\infty}), \qquad t_{12}^1(\mu) = A, \quad (15)$$
$$t_{21}^1(\mu) = -A^{-1}a_+^{-1} + O(\mu^{-\infty}), \quad t_{22}^1(\mu) = 1 + a_+^{-1} + O(\mu^{-\infty}).$$

En effet,

$$w_1(x-i0, \mu) = t_{11}^1 w_1(x+i0, \mu) + t_{12}^1 w_2(x+i0, \mu),$$
$$w_1'(x-i0. \mu) = t_{11}^1 w_1'(x+i0, \mu) + t_{12}^1 w_2'(x+i0, \mu).$$

Comme $\sqrt{\tilde{q}(x-i0)} = -\sqrt{\tilde{q}(x+i0)}$, il vient $S(1, x-i0) = -S(1, x+i0)$ et par suite

$$\frac{w_1'(x-i0, \mu)}{w_1(x-i0, \mu)} = \frac{w_2'(x+i0, \mu)}{w_2(x+i0, \mu)} + O(\mu^{-\infty}),$$

d'où il suit que $t_{11}^1(\mu) = O(\mu^{-\infty})$.

En remplaçant les solutions $w_1(x - i0, \mu)$ et $w_2(x + i0, \mu)$ par leurs représentations asymptotiques (10) et (12), on obtient après simplification par $e^{i\mu S}$ l'identité

$$t_{12}^1(\mu) = \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (\mu)^{-k} \int_{\alpha^-} y_k(t)\,dt - (-\mu)^{-k} \int_{\alpha^+} y_k(t)\,dt\right\}$$

à un terme d'ordre $O(\mu^{-\infty})$ près. Les fonctions $y_{2k}(z)$ sont univalentes au voisinage du point $z = 1$ en lequel elles admettent un pôle, de sorte que

$$\int_{\alpha^-} y_{2k}(t)\,dt - \int_{\alpha^+} y_{2k}(t)\,dt = -\oint_{\gamma^+} y_{2k}(t)\,dt.$$

Par ailleurs $y_{2k+1}(z) = \sqrt{\tilde{q}(z)}\,\tilde{y}_{2k+1}(z)$, où $\tilde{y}_{2k+1}(z)$ est une fonction univalente dans un voisinage du point $z = 1$. Donc α_{2k+1} est indépendant du choix du point $x \in]-1, 1[$. Ce qui prouve la formule (14) pour l'élément t_{12}^1. On a

$$w^+(x-i0, \mu) = \tilde{T}_1(\mu)\, w^+(x+i0, \mu),$$

où w^+ est un système fondamental canonique de solutions (nº 1). Les valeurs propres de la matrice $\tilde{T}_1(\mu)$ sont égales à 1 et a_+^{-1}, les valeurs propres de la matrice $T_1(\mu)$ sont les mêmes, puisque ces matrices sont semblables. Le théorème de Viète nous donne le développement asymptotique des éléments t_{21}^1 et t_{22}^1. Les formules (14) et (15) permettent de trouver la représentation asymptotique de la solution.

Remarque. Les formules (14) et (15) relatives à la matrice de passage $T_1(\mu)$ sont valables pour le cas général. Supposons que les fonctions $p(z)$, $q(z)$ et $r(z)$ sont holomorphes en $z = 1$, $q(1) \neq 0$ et U est un petit voisinage de ce point. Pour $\lambda > 0$, du point $z = 1$ est issue une ligne de Stokes l définie par l'équation $\operatorname{Re}\left(i \int_1^z \sqrt{\tilde{q}(t)}dt\right) = 0$. Pour fixer les idées on admettra que $\operatorname{Re}(z - 1) < 0$ pour $z \in l \cap U$, $z \neq 1$, et on choisira la détermination de $\sqrt{q(z)}$ qui est telle que $\operatorname{Re}[iS(1, z)] < 0$ dans $U \setminus l$. Alors il existe dans $U \setminus l$ un système fondamental de solutions $(w_1(z, \lambda), w_2(z, \lambda))$ pour lequel sont valables les développements asymptotiques (10),

(12). Dans ce cas le rôle de I est tenu par la ligne l, et par $z + i0$ et $z - i0$ on entend des points situés sur les lèvres supérieure et inférieure de la coupure l. Les formules asymptotiques pour la matrice de passage $T_1(\mu)$ restent en vigueur.

Fixons le point $x + i0$, $-1 < x < 1$, situé sur la lèvre supérieure de la coupure I et prolongeons analytiquement le système fondamental de solutions $w(x + i0, \mu)$ le long de la courbe simple γ^- d'origine $x + i0$ et d'extrémité $x - i0$, qui contourne le point $z = -1$. On obtient alors le système fondamental $w^1(x - i0, \mu) \neq w(x - i0, \mu)$. On a

$$w(x + i0, \mu) = T_2(\mu)\, w^1(x - i0, \mu).$$

On démontre comme plus haut la validité des formules asymptotiques

$$\begin{aligned} t^2_{11}(\mu) &= 1 + a_-^{-1}, & t^2_{22}(\mu) &= 0, \\ t^2_{12}(\mu) &= -ABa_-^{-1}, & t^2_{21}(\mu) &= -(AB)^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

pour $\mu \to \infty$, $\mu \in \Pi$ aux termes d'ordre $O(\mu^{-\infty})$ près. Les expressions de a_- et de A figurent dans (14),

$$B = \exp\left\{ i\mu \oint_\gamma \sqrt{\tilde{q}(t)}\, dt + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \oint_\gamma y_k(t)\, dt \right\}, \tag{17}$$

où γ est un contour fermé simple, contournant l'intervalle I dans le sens positif. Le terme principal du développement asymptotique est

$$B = \exp\left\{ -2i\mu \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{\frac{q(t)}{1-t^2}} \right| dt + \pi i(\rho_+ + \rho_- - 1) \right\} [1 + O(\mu^{-1})],$$

où la racine est arithmétique.

4. Représentation asymptotique du spectre. Supposons que $\lambda \in \Sigma$ et soit $w(z, \lambda)$ une fonction propre; dans un petit voisinage du point $z = a$, $a \in D$, $a > 1$, on a

$$w(z, \lambda) = c(\lambda)\, w^T(z, \lambda),$$

où $c(\lambda) = (c_1(\lambda), c_2(\lambda))$, $w(z, \lambda)$ est le système fondamental de solutions $(w_1(z, \lambda), w_2(z, \lambda))$. Pour que λ soit un point du spectre, il est nécessaire et suffisant que la solution w soit univalente aux voisinages des points singuliers $z = 1$ et $z = -1$, de sorte que

$$c(\mu)\, T_1(\mu) = c(\mu), \quad c(\mu)\, T_2(\mu) = c(\mu).$$

La première de ces équations nous donne c à un facteur multiplicatif constant près:

$$c = (a_+^{-1}, -A), \tag{18}$$

la deuxième nous donne $B = a_- a_+$. L'équation (1) possède donc une séquence infinie de valeurs propres $\lambda_n = \mu_n^2$ admettant le développement asymptotique

$$\mu_n \oint_\gamma \sqrt{\tilde{q}(z)}\, dz - i \sum_{k=0}^{\infty} \mu_n^{-k} \oint_\gamma y_k(z)\, dz = 2\pi n + 2\pi(\rho_+ + \rho_-), \quad n \to \infty.$$

Le contour γ est le même que dans la formule (16), la détermination de $\sqrt{\tilde{q}(z)}$ dans le domaine $D \setminus I$ est choisie conformément à (8). On a

$$\oint_\gamma \sqrt{\tilde{q}(z)}\, dz = -2 \int_{-1}^{1} \left|\sqrt{\tilde{q}(x)}\right| dx,$$

$$\oint_\gamma y_0(z)\, dz = \pi i \left(\frac{p(1) - p(-1)}{2} - 1\right),$$

de sorte que le terme principal de la représentation asymptotique est de la forme

$$\mu_n = \pi \left[n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(p(-1) - p(1))\right] \times$$
$$\times \left[\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{q(x)}{1 - x^2}}\, dx\right]^{-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \qquad (19)$$

Cette formule a été établie dans [54] sous la condition que $p(-1) > 0$, $p(1) < 0$, mais sans hypothèse sur l'analyticité des fonctions p, q et r. Si p, q et r sont réelles, la n-ième fonction propre admet exactement n zéros sur l'intervalle $]-1, 1[$ et la formule (19) donne la représentation asymptotique de la n-ième valeur propre. Comme au § 5, n° 2, on peut obtenir un développement asymptotique de la forme

$$\mu_n = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k n^{-k}, \quad n \to \infty.$$

De la formule (19), il s'ensuit que si la fonction $p(x)$ est à valeurs complexes, les valeurs propres λ_n, $n \gg 1$, sont situées à l'intérieur d'une parabole dans le plan de λ complexe qui contient le demi-axe $]0, +\infty[$. De (18) il vient

$$w_n(x) = a_+^{-1} w_1(x, \lambda_n) - A w_2(x, \lambda_n),$$

ce qui permet de trouver le développement asymptotique de la fonction propre $w_n(x)$ sur tout intervalle de la forme $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1$. Pour trouver la représentation asymptotique d'une fonction propre au voisinage des points $z = \pm 1$, on peut appliquer les résultats du chap. IV, § 4.

5. Représentation asymptotique d'un faux spectre. Pour qu'un nombre λ appartienne à l'ensemble $\Sigma \cup \tilde{\Sigma}$, il est nécessaire et suffisant que

$$c(\mu)\, T_1(\mu)\, T_2(\mu) = c(\mu),$$

c'est-à-dire que la matrice $T_1(\mu)\, T_2(\mu)$ doit avoir une valeur propre égale à l'unité. Des formules (15) et (16) il s'ensuit que soit $B = a_- a_+$ et alors $\lambda \in \Sigma$, soit $B = 1$ et alors $\lambda \in \tilde{\Sigma}$ si $a_- a_+ \neq 1$. Si $a_- \neq 1$, $a_+ \neq 1$, $a_- a_+ = 1$, il est impossible de discerner un spectre d'un faux spectre. De l'équation $B = 1$ et de la formule (16) on déduit la représentation asymptotique des points $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\mu}_n^2$ du faux spectre. Le terme principal de cette représentation est égal à

$$\tilde{\mu}_n = \left[\pi n + \frac{\pi}{2}\left(\frac{p(1) - \bar{p}(-1)}{2} - 1\right)\right] \times$$
$$\times \left[\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{q(x)}{1-x^2}}\right]^{-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

§ 8. Approximation quasi classique dans les problèmes de diffusion

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x)\, y = 0, \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, $q(x)$ une fonction à valeurs réelles. A cette forme se ramène l'*équation de Schrödinger*

$$-\frac{h^2}{2m}\psi'' + [U(x) - E]\,\psi = 0,$$

qui décrit le mouvement en dimension un d'une particule de mécanique quantique de masse m douée d'une énergie E dans un champ potentiel d'énergie $U(x)$. On admet l'existence des limites

$$\lim_{x \to \pm\infty} q(x) = q_\pm \neq 0. \tag{2}$$

En mécanique quantique on étudie les problèmes suivants:

1. *Problème de réflexion sur une barrière de potentiel de largeur infinie.* Dans ce cas

$$q_- < 0, \quad q_+ > 0,$$

il est possible que $q_+ = +\infty$ (le cas $q_- > 0$, $q_+ < 0$ ne sera pas discuté). Supposons que l'intégrale

$$\int_{-\infty} \left| |\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}| \right| dx < \infty \tag{3}$$

converge ; pour tout $\lambda > 0$ fixe, l'équation (1) admet alors un système fondamental de solutions (y_1^-, y_2^-) tel que

$$y_{1,2}^- \sim |q_-|^{-1/4} e^{\pm ik_- x}, \quad x \to -\infty, \quad k_- = \lambda\, |\sqrt{q_-}|. \tag{4}$$

La solution y_1^- (resp. y_2^-) décrit une onde partante vers la droite (resp. la gauche). S'il existe une onde y_1^- partante vers la droite, elle se réfléchit sur la barrière, c'est-à-dire que la solution est de la forme

$$y(x, \lambda) = y_1^-(x, \lambda) + a(\lambda)\, y_2^-(x, \lambda). \tag{5}$$

Pour $x \to +\infty$, la solution doit nécessairement s'annuler:

$$y(+\infty, \lambda) = 0. \tag{6}$$

La quantité $R = |a(\lambda)|^2$ s'appelle *coefficient de réflexion* sur la barrière et il est immédiat de vérifier que $R(\lambda) = 1$, de sorte que seule la phase de la fonction $a(\lambda)$ présente de l'intérêt.

Supposons que les limites $q_+ > 0$ et $q_- < 0$ sont finies, la condition (4) est satisfaite et l'intégrale

$$\int^{+\infty} \left| |\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_+}| \right| dx < \infty \tag{7}$$

converge. L'équation (1) admet alors un système fondamental (y_1^-, y_2^-) et un système fondamental (y_1^+, y_2^+) tel que pour $x \to +\infty$

$$y_1^+(x, \lambda) \sim |q_+|^{-1/4} e^{ik_+ x}, \quad y_2^+(x, \lambda) \sim |q_+|^{-1/4} e^{-ik_+ x}, \quad k_+ = \lambda\, |\sqrt{q_+}|. \tag{8}$$

La position du problème de diffusion dans ce cas est exhibée au § 11, chap. II. Ce problème admet deux variantes.

2. *Problèmes de traversée d'une barrière de potentiel.* Dans ce cas la fonction $q(x)$ présente des zéros.

3. *Problème de réflexion dans le cas où* $q(x) < 0$.

Dans ce paragraphe on détermine la représentation asymptotique d'une S-matrice pour $\lambda \to +\infty$ sous l'hypothèse que la fonction $q(z)$ est holomorphe au voisinage de l'axe réel.

Au chap. II, § 11, on a montré que l'équation (1) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{1,2}(x, \lambda) = q^{-1/4}(x) \exp\left\{ \pm\lambda S(a, x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\pm\lambda)^{-k} \int^{x} \alpha_k(t)\, dt \right\}, \tag{9}$$

où

$$S(a, x) = \int_a^x \sqrt{q(t)}\,dt, \quad \alpha_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \tag{10}$$

les fonctions $\alpha_k(x)$ étant données par la formule (3) du § 3, chap. II. Dans toute la suite on admettra la convergence des intégrales

$$\int^{+\infty} |\alpha_k(t)|\,dt, \qquad \int_{-\infty} |\alpha_k(t)|\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Pour déterminer le terme principal de la représentation asymptotique, il suffit de conjecturer la convergence de ces intégrales pour $k = 1$.

Pour établir les formules asymptotiques, on admet d'abord que $q(z)$ est une fonction entière et que sont convergentes les intégrales des fonctions $|\alpha_k(z)|$ étendues à tous les chemins canoniques γ qui sont nécessaires à la résolution du problème. Ces formules sont toutes valables sous des conditions moins astreignantes sur la fonction $q(x)$. En particulier, l'analyticité de la fonction n'est nécessaire qu'au nº 4.

2. Réflexion sur une barrière. La fonction $q(x)$ est $\geqslant 0$ pour $x \geqslant a \gg 1$; considérons les déterminations de $\sqrt{q(x)}$ et de $\sqrt[4]{q(x)}$ qui sont strictement positives pour $x \geqslant a$. Pour chaque $\lambda > 0$ l'équation (1) admet une solution $y_2(x, \lambda)$ justiciable du développement asymptotique (9) pour $x \to +\infty$. Cette solution satisfait la condition $y_2(+\infty, \lambda) = 0$ et est définie par sa représentation asymptotique à un facteur multiplicatif près. La représentation asymptotique (9) est double : elle est valable pour $x \geqslant a$, $\lambda \to +\infty$ uniformément en x. La fonction $q(x)$ est < 0 pour $x \leqslant -a$, où $a \gg 1$. Les branches des racines pour $x \leqslant -a$ seront choisies de telle sorte que

$$\sqrt{q(x)} = i\,|\sqrt{q(x)}|, \quad \sqrt[4]{q(x)} = e^{i\pi/4}\,|\sqrt[4]{q(x)}|.$$

Pour chaque $\lambda > 0$ fixe l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $(\tilde{y}_1(x, \lambda), \tilde{y}_2(x, \lambda))$ avec le développement asymptotique (9) (double) pour $x \to -\infty$. Dans la définition de ces trois solutions on n'a pas encore indiqué la limite inférieure d'intégration dans l'intégrale $S(a, x)$, mais cette limite sera la même pour les solutions $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$. Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= a_1(\lambda)\,\tilde{y}_1(x, \lambda) + a_2(\lambda)\,\tilde{y}_2(x, \lambda), \\ y_2'(x, \lambda) &= a_1(\lambda)\,\tilde{y}_2'(x, \lambda) + a_2(\lambda)\,\tilde{y}_2'(x, \lambda). \end{aligned} \tag{12}$$

La solution y_2 est réelle:

$$\tilde{y}_2(x, \lambda) \equiv \overline{iy_1(x, \lambda)},$$

d'où

$$a_1(\lambda) = \overline{ia_2(\lambda)}. \tag{13}$$

Les solutions $\tilde{y}_j$ sont proportionnelles aux solutions y_j^-, de sorte que la détermination de la représentation asymptotique du coefficient $a(\lambda)$ de (5) se ramène à celle de la représentation asymptotique d'un des coefficients $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$.

2.1. *Un seul point de retour*. Supposons que $q(x)$ présente un seul point de retour x_0 qui est simple; alors $q(x) > 0$ pour $x > x_0$ et $q(x) < 0$ pour $x < x_0$. Posons $a = x_0$ dans le développement asymptotique (9) pour les trois solutions. Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x, \lambda) &= e^{-i\pi/4} e^{i\lambda B_-(x_0)} y_1^-(x, \lambda), \\ \tilde{y}_2(x, \lambda) &= e^{-i\pi/4} e^{-i\lambda B_-(x_0)} y_2^-(x, \lambda), \end{aligned} \tag{14}$$

$$B_-(x_0) = -x_0 \, |\sqrt{q_-}| + \int_{x_0}^{-\infty} (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}|)\, dx,$$

ce qui résulte de la comparaison des représentations asymptotiques des solutions y_j^- et $\tilde{y}_j$ pour λ fixe, $x \to -\infty$.

Dans ce cas on peut déterminer la représentation asymptotique des coefficients $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$ sans utiliser les matrices de passage. Du point de retour x_0 sont issues trois lignes de Stokes: $l =]-\infty, x_0]$, l_0 et l_0^*, où $\operatorname{Im} z > 0$ sur l_0. Soit D une bande étroite contenant l'axe réel. Le développement asymptotique (9) est alors valable dans $D \setminus l$ pour la solution y_2, dans $D \setminus l_0^*$ pour la solution $\tilde{y}_1$ et dans $D \setminus l_0$ pour la solution $\tilde{y}_2$. Les identités (12) nous donnent

$$a_1(\lambda) = \frac{y_2}{\tilde{y}_1} \frac{(\tilde{y}_1'/\tilde{y}_2) - (y_2'/y_2)}{(\tilde{y}_2'/\tilde{y}_2) - (\tilde{y}_1'/\tilde{y}_1)}, \tag{15}$$

où les valeurs des solutions sont prises en tout point z_0. Supposons que z_0 est proche de la ligne de Stokes l_0, $\operatorname{Im} z_0 < 0$. En vertu du choix des branches de $\sqrt{q(z)}$ et de $\sqrt[4]{q(z)}$ dans le domaine $D \setminus l_0$, on a pour la solution y_2:

$$\sqrt{q(x-i0)} = -i\,|\sqrt{q(x)}|, \quad \sqrt[4]{q(x-i0)} = e^{-i\pi/4}\,|\sqrt[4]{q(x)}|$$

pour $x < x_0$. Donc les intégrants des intégrales figurant sous le signe de l'exponentielle dans le développement asymptotique des

solutions $\tilde{y}_1$ et y_2 sont des fonctions qui sont confondues pour $z = z_0$, de sorte que

$$\frac{y_2'(z_0, \lambda)}{y_2(z_0, \lambda)} = \frac{\tilde{y}_1'(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1(z_0, \lambda)} + O(\lambda^{-\infty}).$$

Donc on a, à un facteur additif d'ordre $O(\lambda^{-\infty})$ près,

$$a_1(\lambda) = \frac{y_2(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1(z_0, \lambda)} = i \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l_-} \alpha_k(z)\, dz\right\},$$

où le contour l_- relie $+\infty$ à $-\infty$ en contournant le point x_0 par en bas. De (13) il vient

$$a_2(\lambda) = i\overline{a_1(\bar{\lambda})} = -\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l_+} \alpha_k(z)\, dz\right\}.$$

où le contour l_+ relie $+\infty$ à $-\infty$ en contournant le point x_0 par en haut. La détermination de la fonction $\sqrt{q(z)}$ est choisie de telle sorte que $\sqrt{q(x)} > 0$ pour $x > x_0$. De (15) et des formules de $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$, on trouve que le coefficient $a(\lambda)$ de (5) est égal à

$$a(\lambda) = -i \exp\{-2i\lambda B_-(x_0)\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^{-k} \int_{l} \alpha_k(z)\, dz\right\}, \quad (16)$$

où le contour l contourne $]-\infty, x_0]$ dans le sens positif.

Les formules établies permettent de trouver le développement asymptotique de la solution y_0 sur le demi-axe $]-\infty, x_0 - \varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit mais ne dépend pas de λ. Le terme principal de la représentation asymptotique est de la forme

$$y_0(x, \lambda) = 2\,|q(x)|^{-1/4} \left[\cos\left(\lambda \int_{x_0}^{x} |\sqrt{q(t)}|\, dt - \frac{\pi}{4}\right) + O(\lambda^{-1})\right].$$

Cette représentation est uniforme en x.

2.2. *Plusieurs points de retour.* Supposons que la fonction $q(x)$ possède un nombre fini de points de retour, tous simples; leur nombre est alors impair. Soient $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2m}$ ces points de retour. Les segments $l_{0j} = [x_{2j-1}, x_{2j}]$ sont des lignes de Stokes. Par ailleurs, il existe une ligne de Stokes $l =]-\infty, x_0]$ et de chaque point de retour x_j sont issues encore deux lignes de Stokes, l_j, l_j^*, et $\operatorname{Im} z > 0$ pour $z \in l_j$. Choisissons les solutions $\tilde{y}_j$ comme

dans le n° 2.1 ; dans la formule (9) de la solution y_2 posons $a = x_{2m}$, de sorte que

$$y_2(x,\ \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{-\lambda S(x_{2m},\ x)\},\quad x \to +\infty.$$

Introduisons les systèmes fondamentaux élémentaires $(u_j,\ v_j)$, $(u_j^*,\ v_j^*)$, $(u_{0j},\ v_{0j})$, $(u_{1j},\ v_{1j})$ et $(u_{-1},\ v_{-1})$ associés respectivement aux triplets $(l_j,\ x_j,\ D_j)$, $(l_j^*,\ x_j,\ D_j^*)$, $(l_{0j},\ x_{2j},\ D_{0j})$, $(l_{0j},\ x_{2j-1},\ D_{0j})$ et $(l,\ x_0,\ D)$. Nous glisserons sur le choix des domaines canoniques D_j, D_j^* et des autres, car c'est le même qu'au § 5, n° 3.2. On a (§ 5, n° 2.5)

$$y_2(z,\ \lambda) = e^{-i\pi/12} v_{2m}(x,\ \lambda),$$

et du choix des solutions $\tilde{y}_j$ il résulte

$$\tilde{y}_1(z,\ \lambda) = e^{-i\pi/4} v_{-1}(z,\ \lambda),\quad \tilde{y}_2(z,\ \lambda) = e^{-i\pi/4} u_{-1}(z,\ \lambda).$$

Soit $\Omega = (\omega_{jk}(\lambda))$ la matrice de passage de $(u_{2m},\ v_{2m})$ à $(u_{-1},\ v_{-1})$; alors

$$y_2(x,\ \lambda) = e^{i\pi/6}[\omega_{22}(\lambda)\tilde{y}_1(x,\ \lambda) + \omega_{12}(\lambda)\tilde{y}_2(x,\ \lambda)],$$

de sorte que

$$a_1(\lambda) = e^{i\pi/6}\omega_{22}(\lambda),\quad a_2(\lambda) = e^{i\pi/6}\omega_{12}(\lambda). \tag{17}$$

Posons $\Omega_{2m,\,1}(\lambda) = (\tilde{\omega}_{jk}(\lambda))$ et désignons

$$\eta_j = \int_{x_{2j}}^{x_{2j+1}} \sqrt{q(x)}\,dx > 0. \tag{18}$$

Puisque

$$\Omega = \Omega_{0,\,-1}\Omega_{1,\,0}\Omega_{2m,\,1}$$

et que les matrices $\Omega_{0,\,-1}$, $\Omega_{1,\,0}$ sont définies par les formules (20), (15) du § 3, il vient

$$a_2(\lambda) = e^{i\pi/6} e^{i\lambda\eta_0} \alpha_{0,\,-1}^{-1}(\lambda)\,\tilde{\omega}_{22}(\lambda). \tag{19}$$

L'élément $\tilde{\omega}_{22}(\lambda)$ a été calculé au § 5, n° 3.1, de sorte qu'on obtient en définitive

$$a_2(\lambda) = 2^m \exp\left\{\lambda \sum_{j=0}^{m} \eta_j + i\frac{\pi}{6}(m-1)\right\}\left[\prod_{j=1}^{m} \cos\lambda\xi_j + O(\lambda^{-1})\right]. \tag{20}$$

La présence du facteur à croissance exponentielle contenant $\sum_{j=0}^{m} \eta_j$ est liée au seul fait que l'intégrale $S(a,\ x)$ est prise à partir du point

$a = x_0$ pour les solutions $\tilde{y}_j$ et à partir du point $a = x_{2m}$ pour la solution y_2.

Supposons que la solution y est de la forme (5) ; alors

$$y(x, \lambda) = \exp\left\{i\frac{\pi}{4} - i\lambda B_-\right\} a_1^{-1}(\lambda)\, y_2(x, \lambda). \tag{21}$$

Si l'équation (1) n'admet qu'un seul point de retour x_0, alors $|a_1(\lambda)| = 1 + O(\lambda^{-1})$ comme le montre le n° 2.1, et par suite à l'intérieur de la barrière de potentiel, c'est-à-dire pour x fixe, $x \geqslant x_0 + \varepsilon$, on a

$$|y(x, \lambda)| = |y_2(x, \lambda)|\,[1 + O(\lambda^{-1})]. \tag{22}$$

Dans le cas de plusieurs points de retour, il s'ensuit de (20) qu'il existe des séquences de valeurs résonnantes $\{\lambda_{jn}\}$, $j = 1, \ldots, m$, $n = 1, 2, \ldots$, de la forme

$$\lambda_{jn} = (n\pi + \pi/2)\,\xi_j^{-1} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty,$$

pour lesquelles $|a_1(\lambda_{jn})| = O(n^{-1})$ (on rappelle qu'il faut omettre le facteur à croissance exponentielle de (20)). Remarquons que les valeurs propres de l'équation (1) avec un potentiel $\tilde{q}(x)$ égal à $q(x)$ pour $x \in [x_{2j-1}, x_{2j}]$ et strictement positif en dehors de cet intervalle, admettent exactement la même représentation asymptotique. Nous glisserons sur l'explication quanto-mécanique de cet effet [19].

Pour les séquences $\{\lambda_{jn}\}$ on a les mêmes développements asymptotiques que pour les séquences de valeurs propres (§ 5, (11)). De (19) et de la formule de $\tilde{\omega}_{22}(\lambda)$ (§ 5, n° 3.1) il résulte

$$|a_1(\lambda_{jn})| = O(n^{-\infty}), \quad n \to \infty.$$

On peut établir un résultat plus précis pour $m = 1$ (n° 6).

3. Problème de traversée d'une barrière. Soient (y_1^-, y_2^-) et (y_1^+, y_2^+) les systèmes fondamentaux de solutions introduits au n° 1. Considérons le problème de traversée d'une barrière par une onde plane y_1^- se déplaçant de la gauche vers la droite. Dans ce cas la solution est de la forme

$$\begin{aligned} y &= y_1^- + R_+(\lambda)\, y_2^-, \quad x < 0, \quad |x| \gg 1, \\ y &= T_+(\lambda)\, y_1^+, \qquad x \gg 1, \end{aligned} \tag{23}$$

c'est-à-dire qu'à gauche de la barrière on a une onde incidente y_1^- et une onde réfléchie $R_+(\lambda)\, y_2^-$ et à droite, une onde transmise $T_+(\lambda)\, y_1^+$.

Les quantités $|R_+(\lambda)|^2$ et $|T_+(\lambda)|^2$ s'appellent respectivement *coefficients de réflexion* et *de transmission*. Pour tout $\lambda > 0$, on a l'identité

$$|T_+(\lambda)|^2 + |R_+(\lambda)|^2 = 1, \tag{24}$$

qui est une conséquence de l'unitarité de la S-matrice (chap. II, § 11). On pose de façon analogue le problème pour une onde se déplaçant de la droite vers la gauche:

$$y = y_2^+ + R_-(\lambda)\, y_1^+, \quad x \gg 1,$$
$$y = T_-(\lambda)\, y_2^-, \qquad x < 0, \quad |x| \gg 1.$$

Supposons que tous les points de retour réels sont simples; ils sont alors en nombre pair: $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2m-1}$. Désignons les solutions $\tilde{y}_{1,2}$ introduites au n° 2 par $\tilde{y}_{1,2}^-$ et introduisons les solutions $\tilde{y}_{1,2}^+$ justiciables du développement asymptotique (9) pour $\lambda > 0$ fixe, $x \to +\infty$. Posons $a = x_{2m-1}$ dans la formule (9), c'est-à-dire que

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) \sim q^{-1/4}(x) \exp\{\pm \lambda S(x_{2m-1}, x)\}, \quad x \to +\infty.$$

Pour $x > x_{2m-1}$ choisissons les déterminations suivantes des racines:

$$\sqrt{q(x)} = i\,|\sqrt{q(x)}|, \quad \sqrt[4]{q(x)} = e^{i\pi/4}\,|\sqrt[4]{q(x)}|;$$

pour tout $\lambda > 0$, on a alors

$$\tilde{y}_{1,2}^+(x, \lambda) = e^{-i\pi/4} e^{\pm i\lambda B_+} y_{1,2}^+(x, \lambda), \tag{25}$$

$$B_+ = -x_{2m-1}\,|\sqrt{q_+}| + \int_{x_{2m-1}}^{+\infty} (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_+}|)\, dx.$$

Pour chaque $\lambda > 0$ fixe on a

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) \equiv a_1(\lambda)\, \tilde{y}_1^-(x, \lambda) + a_2(\lambda)\, \tilde{y}_2^+(x, \lambda). \tag{26}$$

Des identités (14), (25) et de (23) il résulte

$$R_+(\lambda) = \frac{a_2(\lambda)}{a_1(\lambda)} e^{-2i\lambda B_-}, \quad T_+(\lambda) = \frac{1}{a_1(\lambda)} e^{i\lambda(B_+ - B_-)}, \tag{27}$$

de sorte que le problème se ramène au calcul de la représentation asymptotique des coefficients $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$.

3.1. *Deux points de retour.* Dans ce cas on peut déterminer la représentation asymptotique des coefficients de réflexion et de transmission sans recourir aux matrices de passage comme au n° 2.1. Du point de retour x_0 sont issues les lignes de Stokes $l_{-1} =]-\infty, x_0]$, l_0, l_0^*, du point x_1, les lignes $l_4 = [x_1, +\infty[$, l_1, l_1^*, où $\operatorname{Im} z > 0$ pour $z \in l_0$, $z \in l_1$. Soit D une étroite bande contenant l'axe réel. Prolongeons la représentation asymptotique de la solution $\tilde{y}_1^+(x, \lambda)$ du demi-axe $x > x_1$ au demi-axe $x < x_0$. Le développement asymptotique (9) est valable pour les solutions $\tilde{y}_1^+$, $\tilde{y}_1^-$ et $\tilde{y}_2^-$ respectivement dans les domaines $D \setminus (l_1^* \cup l_{-1})$, $D \setminus (l_0^* \cup l_4)$ et $D \setminus (l_0 \cup l_4)$.

Définissons le coefficient $a_{11}(\lambda)$ à partir de la relation (15) dans laquelle il faut remplacer $\tilde{y}_j$ par $\tilde{y}_j^-$ et y_2 par $\tilde{y}_2^+$. Comme au n° 2.1, on obtient

$$a_1(\lambda) = \frac{\tilde{y}_1^+(z_0, \lambda)}{\tilde{y}_1^-(z_0, \lambda)} + O(\lambda^{-\infty}),$$

où Im $z_0 < 0$ et le point z_0 est situé au voisinage de la ligne de Stokes l_{-1} (fig. 21). En appliquant le développement asymptotique (9), on obtient

$$a_1(\lambda) = \exp\{\lambda(S_+(x_1, z_0) - S_-(x_0, z_0))\}[q_+(z_0)]^{-1/4} \times$$
$$\times [q_-(z_0)]^{1/4} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \left| \int_{l_+} \alpha_k(t)\,dt - \int_{l_-} \alpha_k(t)\,dt \right| \right\},$$

où le signe + (resp. —) correspond à la branche associée à la solution $\tilde{y}_1^+$ (resp. $\tilde{y}_1^-$). D'après le choix des branches

$$S_+(x_1, z_0) - S_-(x_0, z_0) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{q(t)}\,dt > 0.$$

La ligne l_+ vient de $+\infty$ au point z_0 en contournant le point x_1 par en haut et le point x_0 par en bas, puisque le développement asympto-

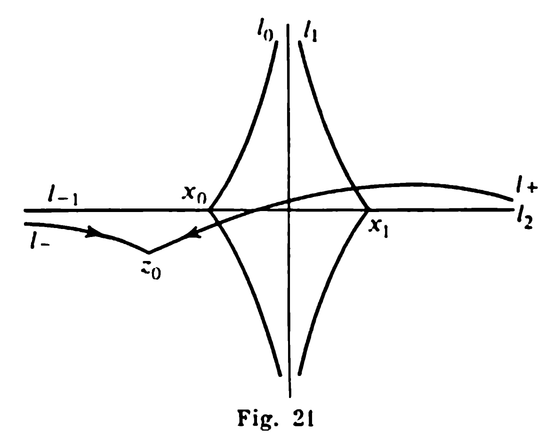


Fig. 21

tique de la solution $\tilde{y}_1^+$ est valable dans $D \setminus (l_1^+ \cup l_{-1})$, la ligne l_- vient de $-\infty$ au point z_0 en restant sous l'axe réel. Donc les branches de $q_\pm^{1/4}(z_0)$ sont confondues et l'on obtient en définitive

$$a_1(\lambda) = \exp\{\lambda S(x_0, x_1)\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} \int_{l_1} \alpha_k(z)\,dz\right\}, \qquad (28)$$

où l_1 relie $+\infty$ à $-\infty$ en contournant le point x_1 par en haut et le point x_0 par en bas.

De façon analogue, en considérant le point $\bar{z}_0$ à la place de z_0, on obtient

$$a_2(\lambda) = -i\exp\{\lambda S(x_0, x_1)\}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\int_{l_2}\alpha_k(z)\,dz\right\}, \qquad (29)$$

où le chemin l_2 relie $+\infty$ à $-\infty$ en contournant les deux points de retour x_0 et x_1 par en haut. Les déterminations de $\sqrt{q(z)}$ sont choisies sur les contours l_1 et l_2 comme dans le cas de la solution y_1^+.

La représentation asymptotique du coefficient $R_+(\lambda)$ résulte de (27) et (28), celle du coefficient $T_+(\lambda)$ est de la forme

$$T_+(\lambda) = -ie^{-2i\lambda B_-}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\int_{l}\alpha_k(z)\,dz\right\},$$

où le chemin l contourne le demi-axe $]-\infty, x_0]$ par en bas. En particulier, pour $\lambda\to+\infty$

$$|R_+(\lambda)|^2 \sim \exp\{-2\lambda S(x_0, x_1)\},$$
$$|T_+(\lambda)|^2 = 1 + O(\exp\{-2\lambda S(x_0, x_1)\}),$$

de sorte que le coefficient de réflexion sur la barrière est exponentiellement petit.

3.2. *Plusieurs points de retour*. Pour déterminer la représentation asymptotique des coefficients $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$, prolongeons celle de la solution $\tilde{y}_1^+(x, \lambda)$ du demi-axe $x > x_{2m+1}$ au demi-axe $x < x_0$. Dans ce cas, aux lignes de Stokes envisagées au n° 2.2 viennent s'ajouter les lignes de Stokes l_{2m+1} et l_{2m+1}^* ($\mathrm{Im}\, z > 0$ sur l_{2m+1}) et la ligne de Stokes $l_{2m+2} = [x_{2m+1}, +\infty[$. En plus des systèmes fondamentaux élémentaires du n° 2.2, introduisons les systèmes (u_{2m+1}, v_{2m+1}) et (u_{2m+2}, v_{2m+2}). On a

$$\tilde{y}_1^+(x, \lambda) = e^{-i\pi/4}u_{2m+2}(x, \lambda);$$

les solutions $\tilde{y}_{1,2}^-$ sont exprimées dans le n° 2.2 en fonction du système fondamental (u_{-1}, v_{-1}). On a

$$\Omega_{2m+2,\,2m} = \Omega_{2m+2,\,2m+1}\Omega_{2m+1,\,2m},$$

où la représentation asymptotique des deux dernières matrices est de la forme (15), (20) du § 3. Donc

$$\Omega_{2m+2,\,2m}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = e^{i\pi/6+\lambda\eta_m}\begin{bmatrix}O(\lambda^{-1})\\1+O(\lambda^{-1})\end{bmatrix}$$

(η_m est donné par (18)). Par ailleurs,

$$\Omega_{2m+2,\,-1} = \Omega_{2m,\,-1}\Omega_{2m+2,\,2m};$$

quant à la représentation asymptotique de la matrice $\Omega_{2m,-1}$, elle est calculée dans le n° 2.2. D'où il vient

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= 2^m \exp\left\{\lambda \sum_{j=0}^{m+1} \eta_j + \varphi\right\} \left[\prod_{j=1}^{m} \cos\lambda\xi_j + O(\lambda^{-1})\right], \\ a_2(\lambda) &= 2^m \exp\left\{\lambda \sum_{j=0}^{m} \eta_j + \varphi\right\} \left[\prod_{j=1}^{m} \cos\lambda\xi_j + O(\lambda^{-1})\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Dans ce cas le coefficient de transmission peut être non pas de l'ordre de $\exp\{-2\lambda \sum_{j=0}^{m} \eta_j\}$, qui est défini par la largeur de la barrière, mais d'un ordre largement inférieur à cause de la présence d'un facteur entre crochets dans la formule de $a_1(\lambda)$. En particulier, il est possible que $|T_+(\lambda_n)|^2 = 1 + O(\lambda_n^{-1})$ pour une certaine suite $\{\lambda_n\}$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Ce cas sera traité dans le n° 5.

4. Réflexion dans le cas où $q(x) < 0$. Au § 11 du chap. II on a trouvé la représentation asymptotique du coefficient $T_+(\lambda)$ et on a montré que $R_+(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda \to +\infty$. Montrons que le coefficient de réflexion sur la barrière est exponentiellement petit. La fonction $S(0, x)$ envoie bijectivement l'axe réel **R** sur l'axe imaginaire, donc il existe un domaine D de type bande contenant **R**. Ceci étant, $D = D^*$, ∂D est composée de deux composantes connexes ∂D^+ et ∂D^- symétriques par rapport à **R**; supposons que $\operatorname{Im} z > 0$ sur ∂D^+.

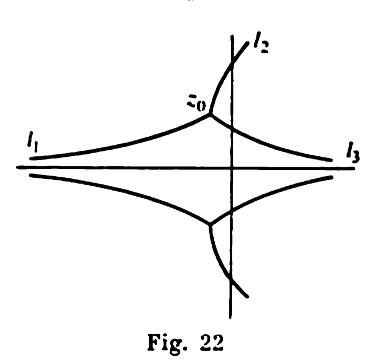


Fig. 22

4.1. *Un seul point de retour sur ∂D^+.* Désignons ce point par z_0; alors $\partial D^- \ni \bar{z}_0$. Supposons que z_0 est simple. Du point z_0 sont issues trois lignes de Stokes: l_1, l_2 et l_3, la ligne l_1 admettant $]-\infty, 0[$ pour direction asymptotique et la ligne l_3, $]0, +\infty[$ (fig. 22). Utilisons pour simplifier les matrices de passage. Considérons les systèmes fondamentaux élémentaires (u_j, v_j) associés à (l_j, z_0); on peut ne pas indiquer les domaines canoniques, puisque les matrices de passage ne seront utilisées qu'à $O(\lambda^{-1})$ près. On a

$$u_1(z, \lambda) \sim c_1 q^{-1/4}(z) \exp\{\lambda S(z_0, z)\}.$$

Cette représentation asymptotique est double : elle est valable pour $\lambda \to +\infty$, $z \in D$ fixe, que pour $\lambda > 0$ fixe, $\operatorname{Re} z \to +\infty$, $z \in D$. La solution u_1 est donc proportionnelle à y_+. Comme $\operatorname{Im} S(z_0, z) > 0$, $z \in l_1$, par définition d'un système fondamental élémentaire de solutions (§ 3), on obtient pour x réel

$$S(z_0, x) = S(z_0, 0) + S(0, x),$$
$$B = \operatorname{Re} S(z_0, 0) > 0,$$
$$S(0, x) = i \int_0^x |\sqrt{q(t)}|\, dt.$$

Puisque D est simplement connexe, on peut y définir une détermination holomorphe de $q^{1/4}(z)$. Choisissons cette détermination de telle sorte que $q^{1/4}(x) = e^{i\pi/4} |q(x)|^{1/4}$ pour x réel. Par définition d'un système fondamental élémentaire (§ 3) on a

$$c_1 = e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \lim_{z \to z_0,\, z \in l_1} \operatorname{Arg} q^{1/4}(z).$$

Donc, pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{gathered} u_1(z, \lambda) = e^{i\varphi_1 + i\pi/4} e^{\lambda B + i\lambda A_+} y_1^+(z, \lambda), \\ A_+ = \int_0^\infty (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_+}|)\, dx. \end{gathered} \tag{31}$$

Exprimons u_3 et v_3 en fonction de y_1^- et y_2^-. On a

$$S(z_0, x) = S(z_0, 0) + S(0, x),$$

où cette fois-ci

$$\operatorname{Re} S(z_0, 0) < 0, \quad \operatorname{Im} S(0, x) < 0.$$

Donc

$$\begin{gathered} u_3(z, \lambda) = e^{-i\pi/4 + i\varphi_3} e^{-\lambda B - i\lambda A_-} y_2^-(z, \lambda), \\ v_3(z, \lambda) = e^{-i\pi/4 + i\varphi_3} e^{\lambda B + i\lambda A_-} y_1^-(z, \lambda), \\ A_- = \int_0^{-\infty} (|\sqrt{q(x)}| - |\sqrt{q_-}|)\, dx, \end{gathered} \tag{32}$$

où $\varphi_3 = \lim\limits_{z \to z_0,\, z \in l_3} \operatorname{Arg} q^{1/4}(z)$. Exprimons u_1 en fonction de u_3 et v_3. Puisque

$$\Omega_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \Omega_{12}\Omega_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-i\pi/3} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + O(\lambda^{-1}),$$

il vient

$$u_1(z, \lambda) = [e^{-i\pi/3} + O(\lambda^{-1})]\, u_3(z, \lambda) + i\, [e^{-i\pi/3} + O(\lambda^{-1})]\, v_3(z, \lambda).$$

De cette formule et des formules (31), (32) et (33), on déduit

$$R_+(\lambda) = -i\exp\{-2\lambda(B+iA_-)\}[1+O(\lambda^{-1})], \tag{33}$$

de sorte que $R_+(\lambda)$ décroît exponentiellement ($\operatorname{Re} B > 0$). On peut écrire l'expression de $2B$ sous une forme plus élégante, plus exactement

$$2B = \oint_C \sqrt{q(z)}\,dz,$$

où C est un contour fermé simple contenant les points de retour z_0 et $\bar{z}_0$ à l'intérieur.

4.2. *Deux points de retour sur ∂D^+.* Supposons que ∂D^+ contient deux points de retour simples z_1 et z_2 et, pour fixer les idées, que du point z_1 est issue une ligne de Stokes l_1 admettant le demi-axe $]0, +\infty[$ pour direction asymptotique. Alors du point z_2 est issue une ligne de Stokes l_3 admettant le demi-axe $]-\infty, 0[$ pour direction asymptotique. L'arc l_2 de courbe ∂D^+ reliant les points de retour z_1 et z_2 est aussi une ligne de Stokes. Par ailleurs, du point z_1 est issue encore une ligne de Stokes l_4, du point z_2, une ligne de Stokes l_5, et ces lignes sont extérieures au domaine D.

Exprimons le système fondamental (u_1, v_1) en fonction du système fondamental (u_3, v_3). A cet effet passons de la ligne de Stokes l_1 à la ligne l_2 (la matrice de passage est de la forme (19), § 3), remplaçons ensuite l'origine z_1 de l_2 par z_2 (la matrice de passage est de la forme (14), § 3) et passons de l_2 à l_3 ((19), § 3). On obtient en définitive

$$\Omega_{31} = e^{i(\pi/3+\varphi_0)}\begin{bmatrix} -i(\alpha+\alpha^{-1}) & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = e^{i\lambda\xi_0},$$

$$\xi_0 = \left|\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)}\,dz\right|. \tag{34}$$

La forme explicite du nombre φ_0 est sans importance. Cette formule et les relations (31), (32) et (33) nous donnent

$$\begin{gathered} R_+(\lambda) = -2i[\cos\lambda\xi_0 + O(\lambda^{-1})]\exp\{-i\lambda\xi_0 - 2\lambda B_2 - 2i\lambda A_-\}, \\ B_2 = \int_{z_2}^{0} \sqrt{q(z)}\,dz, \quad \operatorname{Re} B_2 > 0. \end{gathered} \tag{35}$$

On remarquera que

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\oint_C \sqrt{q(z)}\,dz,$$

où C est un contour fermé englobant les points de retour z_1 et z_2. Dans cette formule on peut obtenir une série asymptotique à la place de $O(\lambda^{-1})$.

On se trouve ici en présence d'un phénomène de résonance. Le coefficient de réflexion $R_+(\lambda)$, ainsi qu'il ressort de (35), est exponentiellement petit, mais pour les valeurs λ_n de la forme

$$\lambda_n = (n\pi + \pi/2)\,\xi_0^{-1}$$

il devient encore plus petit. On démontre que l'expression $\cos \lambda\xi_0 + O(\lambda^{-1})$ est de l'ordre $O(\tilde{\lambda}_n^{-\infty})$ pour les valeurs $\tilde{\lambda}_n$ de la forme

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k}.$$

4.3. *Pôle simple sur ∂D^+.* Supposons que ∂D^+ contient un pôle simple z_1. Vu que du point z_1 est issue une seule ligne de Stokes l_0, celle-ci doit finir au point de retour $z_0 \in \partial D^+$. On admettra que z_0 est un point de retour simple et que ∂D^+ ne contient pas d'autres points de retour et de pôles (fig. 23). Du point z_1 sont issues aussi les lignes de Stokes l_1 et l_3 décrites au n° 4.1.

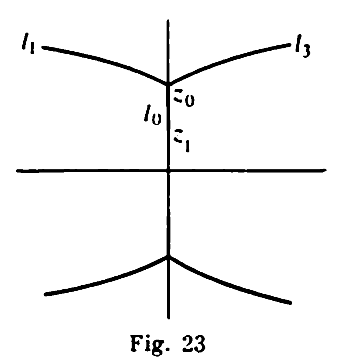


Fig. 23

Exprimons le système fondamental (u_1, v_1) en fonction du système (u_3, v_3). A cet effet il est nécessaire d'effectuer les passages suivants (on fait figurer entre parenthèses les numéros des formules du § 3 donnant la forme de la matrice de passage): de l_1 à l_0 ((19), mais il faut prendre la matrice inverse, puisque le passage se fait dans le sens négatif), de (l_0, z_1) à (l_0, z_0) (14), du bord droit de l_0 au bord gauche ((18), $n = 1$, matrice inverse), de (l_0, z_0) à (l_0, z_1) (14) et de l_0 à l_3 ((19), matrice inverse). Donc

$$\Omega_{31} = e^{i\pi/3}\begin{bmatrix} 2-\alpha^2-\alpha^{-2} & -i\alpha^2 \\ -i\alpha^{-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = e^{i\lambda\xi_0},$$

$$\xi_0 = \left| \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{q(z)}\, dz \right|. \tag{36}$$

En exprimant u_1 en fonction de u_3 et v_3 et en tenant compte des relations (31), (32) et (33), on obtient

$$R_+(\lambda) = 2i\,[\cos 2\lambda\xi_0 + O(\lambda^{-1})]\exp\{-2\lambda(B + A_- + \xi_0)\}, \tag{37}$$

où $B = S(z_0, 0)$, $\mathrm{Re}\, B > 0$. Dans ce cas il existe aussi des valeurs résonnantes de λ de la forme

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\xi_0^{-1}.$$

5. Invariant adiabatique. Considérons l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2(\varepsilon t)\, x = 0, \tag{38}$$

où $\omega(t) > 0$ pour t réel, $\omega \in C^\infty(\mathrm{R})$ et existent les limites finies $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \omega(t) = \omega_\pm > 0$. L'équation (38) est de la forme (1), où $\varepsilon = \lambda^{-1}$, $\omega^2 = -q$. L'invariant adiabatique $J(t, \varepsilon)$ a été introduit au § 11, chap. II, où l'on a établi la formule (18) qui exprime la variation totale de $J(\varepsilon) = J(+\infty, \varepsilon) - J(-\infty, \varepsilon)$ en fonction de la S-matrice. Donc, $J(\varepsilon)$ décroît exponentiellement lorsque $\varepsilon \to +0$ dans les conditions des n° 4.1 à 4.3 et la formule asymptotique de $T_+(\lambda)$ combinée aux formules (33), (35) et (37) de $R_+(\lambda)$ nous donne les formules asymptotiques de $J(\varepsilon)$.

6. Problème de transmission complète. Supposons que la fonction $q(x)$ satisfait les conditions du n° 3, $D_+(\lambda) = |T_+(\lambda)|^2$ est le coefficient de transmission d'une onde se déplaçant vers la droite. Si la fonction $q(x)$ admet deux points de retour simples, $D_+(\lambda)$ décroît strictement pour $\lambda \gg 1$. Si elle admet plus de deux points de retour, $D_+(\lambda)$ présente des maximums locaux λ_n pour $\lambda \gg 1$. On arrive à déterminer la représentation asymptotique des valeurs $D_+(\lambda_n)$ dans le cas où l'on a affaire à quatre points de retour simples $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ [59]. Dans ce cas il existe des lignes de Stokes l_j, l_j^*, $1 \leqslant j \leqslant 4$, issues des points de retour x_j, $\mathrm{Im}\, z > 0$ pour $z \in l_j$, et trois lignes de Stokes réelles $l_0 =]-\infty, x_1[$, $l_0' =]x_2, x_3[$ et $l_5' =]x_4, +\infty[$. La fonction $q(x)$ étant réelle, les domaines canoniques $D_0 \supset l_0$, $D_5 \supset l_5$ peuvent être choisis symétriques par rapport à l'axe réel et tels que toutes les coupures du domaine $S(D_j)$ soient orientées dans le sens contraire du rayon $S(l_j)$. Relions ces domaines par une chaîne de domaines canoniques comme au § 5 du n° 3. Introduisons les systèmes fondamentaux élémentaires (u_j, v_j), $(u_{j'}, v_{j'})$ et notons

$$\xi = \int_{x_2}^{x_3} |\sqrt{q(x)}|\, dx, \quad \eta_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q(x)}\, dx, \quad \eta_2 = \int_{x_3}^{x_4} \sqrt{q(x)}\, dx, \tag{39}$$

$$\delta_j = e^{-2\lambda\eta_j}, \quad \gamma = e^{i\lambda\xi}.$$

Considérons les matrices de passage

$$\Omega_{32} = e^{-i\pi/3}(a_{jk}),\ \ \Omega_{30} = -ie^{\lambda\eta_1}(b_{jk}),\ \ \Omega_{50} = -e^{-\lambda(\eta_1+\eta_2)}(c_{jk}). \tag{40}$$

On a

$$\begin{aligned} &c_{11} = b_{12}, \quad c_{12} = \delta_2\alpha_{34}^{-1}b_{11} + i\alpha_{41'}b_{12},\\ &c_{21} = b_{22} = \bar{c}_{12}, \quad c_{22} = \delta_2\alpha_{51}^{-1}b_{21} + i\alpha_{44'}b_{22} = \bar{c}_{11},\\ &a_{11} = 0, \quad a_{21} = \gamma^{-1}, \quad a_{12} = \gamma(\alpha_{30'}\alpha_{0'2})^{-1},\\ &a_{22} = i\alpha_{30'}^{-1}(\gamma\alpha_{22'} + \gamma^{-1}\alpha_{3'3}^{-1}),\\ &b_{11} = \alpha_{10}^{-1}a_{21}, \quad b_{12} = \alpha_{10}^{-1}a_{22}, \quad b_{21} = i\alpha_{01'}a_{21},\\ &b_{22} = \delta_1 a_{12} + i\alpha_{01'}a_{21}. \end{aligned} \tag{41}$$

De l'identité

$$u_5(x) = \delta_1\delta_2(c_{11}u_0(x) + c_{21}v_0(x))$$

on tire

$$D_+ = \sqrt{q_+/q_-}\,\delta_1\delta_2\,|c_{21}|^2, \quad R_+ = |c_{11}|^2\,|c_{21}|^{-2}. \tag{42}$$

Voyons s'il est possible que la barrière soit entièrement transparente, c'est-à-dire que $D_+(\lambda) = 0$ pour un certain λ. On a alors $R_+(\lambda) = 0$, de sorte que $c_{11} = 0$ et

$$\gamma\alpha_{22'} + \gamma^{-1}\alpha_{3'3}^{-1} = 0. \tag{43}$$

Du § 3, (23), il suit que

$$\alpha_{22'} = (1 + \tilde{\delta}_1)^{1/2}e^{i\varphi_1}, \quad \alpha_{3'3} = (1 + \tilde{\delta}_2)^{-1/2}e^{i\varphi_2},$$

$$\tilde{\delta}_j = \delta_j[1 + O(\lambda^{-1})], \quad \varphi_j = 1 + O(\lambda^{-1})$$

et les fonctions $\varphi_j(\lambda)$ sont réelles. L'équation $c_{11} = 0$ devient

$$\exp\{i(2\lambda\xi + \varphi_1 + \varphi_2)\} = -\sqrt{\frac{1+\tilde{\delta}_2}{1+\tilde{\delta}_1}}. \tag{44}$$

On en déduit que si $\eta_1 \neq \eta_2$, alors $D_+(\lambda) < 1$ pour $\lambda \gg 1$, autrement dit la transmission complète est impossible.

Le cas où $q(x)$ est une fonction paire mérite une attention particulière. Pour tout $\lambda > 0$, l'équation (1) admet une solution paire et une impaire, de sorte que les valeurs propres de la matrice $C(\lambda)$ sont respectivement égales à ± 1 et donc $\overline{c_{11}(\lambda)} = -c_{11}(\lambda)$. C'est pourquoi la quantité (cf. (43)) $A = \alpha_{10}^{-1}\alpha_{30'}^{-1}(\gamma\alpha_{22'} + \gamma^{-1}\alpha_{3'3}^{-1})$ est réelle, $A = 2\cos\lambda\xi + O(\lambda^{-1})$ et l'équation $A = 0$ et, partant, l'équation $D_+(\lambda) = 1$, admettent une infinité de solutions. Ce qui de toute évidence n'est possible que si la fonction $q(x + T)$ est paire pour un certain T.

Calculons les valeurs de $D_+(\lambda)$ aux points maximums locaux. De (42) il vient

$$D_+(\lambda) = \left[1 + \sqrt{\frac{q_-}{q_+}}\, |c_{11}|^2 e^{2\lambda(\eta_1+\eta_2)}\right]^{-1}. \tag{45}$$

Mettons l'équation (44) sous la forme

$$e^{i\psi(\lambda)} = \chi(\lambda) - 1.$$

Comme $\alpha_{jk} = 1 + O(\lambda^{-1})$ pour tous j, k, on obtient

$$|c_{11}|^2 = \left[4(1-\chi)\cos^2\frac{\psi}{2} + \chi^2\right][1 + O(\lambda^{-1})].$$

Aux extrémums de la fonction $D_+(\lambda)$ on a

$$(\eta_1+\eta_2)\,|c_{11}|^2 - \chi'\cos\psi - (1-\chi)(\psi'\sin\psi + \chi') = 0,$$

et puisque $\psi'(\lambda) = 2\xi + O(\lambda^{-2})$, alors $\cos\psi \sim -1$ aux points de maximums λ_n. Pour les λ_n on a donc le développement asymptotique

$$2\lambda_n\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{-k} \oint_C \alpha_k(z)\,dz = 2n\pi + \pi, \quad n \to \infty, \tag{46}$$

où C est un contour fermé simple englobant l'intervalle $[x_2, x_3]$ et orienté dans le sens positif, $\sqrt{q(x)} > 0$ pour $x \in C$, $x > x_3$, les fonctions $\alpha_k(z)$ sont données par la formule (3) du § 3, chap. II. Le terme principal de la représentation asymptotique est égal à

$$\lambda_n = -\xi^{-1}[\pi n + \pi/2] + O(n^{-1}).$$

Si $\eta_1 < \eta_2$, alors $\chi \sim \varepsilon_1/2$ au point $\lambda = \lambda_n$, de sorte que

$$\psi = 2\pi n - \pi \sim \frac{\eta_2 - \eta_1}{4} e^{-\lambda_n \eta_2}.$$

Donc, pour $n \to \infty$

$$D_+(\lambda_n) = 4\sqrt{\frac{q_+}{q_-}} \exp\{-2\lambda_n|\eta_1 - \eta_2|\}[1 + O(n^{-1})], \quad \eta_1 \neq \eta_2, \tag{47}$$

de sorte que $D_+(\lambda_n)$ est une quantité exponentiellement petite. Mais $D_+(\lambda_n)$ est exponentiellement grande par rapport à $D_+(\lambda_n)$ dans le cas où il n'existe que deux points de retour et la barrière est de la même largeur, c'est-à-dire que

$$\eta = \int_{x_1}^{x_2} |\sqrt{q(x)}|\,dx = \eta_1 + \eta_2,$$

puisque dans ce cas $D_+(\lambda_n) \sim \exp\{-\lambda_n(\eta_1 + \eta_2)\}$.

Supposons que $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Les points d'extrémums se déterminent alors à partir de l'équation

$$\psi'\beta + \chi(2\xi\chi + \chi') + O(\chi^3) = 0,$$

et puisque $\chi = e^{-2\lambda\eta}[1 + O(\lambda^{-1})]$, alors $\beta = O(\chi^2\lambda^{-1})$. D'où

$$D_+(\lambda_n) = 1 + O(n^{-2}), \quad \eta_1 = \eta_2, \tag{48}$$

lorsque $n \to \infty$, où $O(n^{-2}) \leqslant 0$. Dans ce cas on a une transmission presque complète pour $\lambda = \lambda_n$.

Si $\eta_1 \neq \eta_2$, alors $D_+(\lambda_n) \ll 1$. Mais il existe toujours des valeurs complexes $\tilde{\lambda}_n$ à partie imaginaire exponentiellement petite telles que $D_+(\tilde{\lambda}_n) = 1$. Plus exactement,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i\delta_2}{4\xi}[1 + O(n^{-1})], \qquad \eta_2 < \eta_1, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= -\frac{i\delta_1}{4\xi}[1 + O(n^{-1})], \quad \eta_1 < \eta_2. \end{aligned} \tag{49}$$

En effet, les solutions $y_j^{\mp}(x, \lambda)$ sont holomorphes par rapport à λ dans une bande de la forme $0 < \operatorname{Re}\lambda < \infty$, $|\operatorname{Im}\lambda| < c$, et ceci vaut également pour les éléments $s_{jk}(\lambda)$ de la matrice de diffusion. L'équation (43) admet donc une solution complexe $\tilde{\lambda}_n$ voisine de λ_n, et en outre

$$\psi(\tilde{\lambda}_n) = 2\pi n + \pi + \frac{i}{2}(\delta_2 - \delta_1) + o(|\delta_1| + |\delta_2|),$$

$$\psi(\tilde{\lambda}_n) - \psi(\lambda_n) = (\tilde{\lambda}_n - \lambda_n)\psi'(\lambda_n)[1 + O(n^{-1})].$$

Comme $\psi'(\lambda_n) = 2\xi + O(n^{-1})$, la relation (43) entraîne (49).

7. Niveaux quasi stationnaires. Considérons le problème de traversée d'une barrière (n° 1, problème 2) et cherchons les valeurs de λ pour lesquelles existe une solution de la forme

$$y = y_1^+, \quad y = Ay_2^-.$$

Pour $|x| \gg 1$ la solution y est une onde divergente et les valeurs correspondantes de λ sont dites *niveaux quasi stationnaires*. Si λ est réel, une telle solution n'existe pas, car la S-matrice est régulière. Il existe cependant une infinité de niveaux complexes quasi stationnaires $\tilde{\lambda}_n$ à partie imaginaire exponentiellement petite. Si $q(x)$ satisfait les conditions du n° 5, alors

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{4\xi}e^{-2\lambda_n\eta_1}[1 + O(n^{-1})], \quad \eta_2 < \eta_1, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{4\xi}e^{-2\lambda_n\eta_2}[1 + O(n^{-1})], \quad \eta_1 < \eta_2, \\ \tilde{\lambda}_n - \lambda_n &= \frac{i}{2\xi}e^{-2\lambda_n\eta}[1 + O(n^{-1})], \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta. \end{aligned} \tag{50}$$

Les λ_n sont donnés ici par la formule (46) et tous les symboles O sont des quantités imaginaires pures. En effet, $\tilde{\lambda}_n$ se déterminent à partir de l'équation $c_{21} = 0$ qui est de la forme

$$\gamma\alpha_{22'} + \gamma^{-1}\alpha_{3'3}^{-1} = \varepsilon_2,$$

de sorte que

$$e^{i\varphi} + \chi = \delta_1\gamma^2 (1 + \delta_1)^{-1/2} (\alpha_{01'}\alpha_{0'2})^{-1}. \tag{51}$$

L'équation $e^{i\psi} + 1 = 0$ admet une infinité de solutions λ_n de la forme (43). Posons $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + \lambda'_n$. Si $\eta_1 < \eta_2$, l'équation (51) est de la forme

$$e^{i\psi} + 1 = -\frac{\delta_1}{2} [1 + O(\lambda^{-1})];$$

si $\eta_1 = \eta_2$, on a

$$e^{i\psi} + 1 = -\delta [1 + O(\lambda^{-1})],$$

d'où l'on déduit (50).

8. Diffusion pour des énergies voisines du maximum de l'énergie potentielle. Le modèle est l'équation de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2m}\psi'' + (E - V(x))\psi = 0,$$

où $h > 0$ est un petit paramètre, $V(\pm\infty) = 0$. Supposons que le potentiel $V(x)$ présente un seul point de maximum x_0, $V''(x_0) < 0$. Pour les valeurs de E voisines de $E_0 = V(x_0)$, il existe deux points de retour voisins, réels pour $E < E_0$ et complexes pour $E > E_0$. Dans ce cas, pour les x voisins de x_0, la représentation asymptotique des solutions s'exprime par l'intermédiaire des fonctions de Weber (chap. IV, § 7) et ce n'est que sous cette forme qu'on peut trouver la représentation asymptotique de $T_\pm(h, E)$, $R_\pm(h, E)$ pour $h \to 0$, uniforme en E proches de E_0. On peut cependant déterminer la représentation asymptotique des rapports $T_\pm/R_\pm$ sans recourir à l'équation modèle. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x, \alpha) y = 0, \tag{52}$$

où α est un paramètre, $\alpha \in J = [-\alpha_0, \alpha_0]$. Supposons que $q(x, \alpha) \in C^\infty(\mathbf{R} \times J)$,

$$q(x, 0) \leqslant 0, \quad q(0, 0) = 0, \quad q''_{xx}(0, 0) < 0, \quad q'_\alpha(0, 0) > 0,$$

de sorte que $q(x, \alpha) = ax^2 + b\alpha + c\alpha x + \ldots$ pour les petits $|x|$, $|\alpha|$. Les autres conditions imposées à la fonction $q(x, \alpha)$ sont les mêmes que dans le problème de traversée d'une barrière (n° 1) ; on

exige simplement que ces conditions soient uniformes en $\alpha \in J$. Le nombre $\alpha_0 > 0$ est supposé assez petit.

Supposons que $\alpha < 0$ est fixe; l'équation (52) admet alors deux points de retour complexes: $z_0(\alpha)$ et $\overline{z_0(\alpha)}$, et les lignes de Stokes sont de la même forme que sur la figure 21. Soit $\tilde{y}$ une solution telle que

$$\tilde{y}(z, \lambda, \alpha) \sim cq^{-1/4}(z, \alpha) \exp\{\lambda S(z_0(\alpha), z)\}$$

pour $z \in l_3(\alpha)$, $z \to \infty$, et cette représentation asymptotique est double (par rapport à z et à λ). La détermination de S est choisie de telle sorte que

$$\operatorname{Im} S(z_0(\alpha), z) > 0, \quad z \in l_3(\alpha); \quad \lim_{z \to z_0(\alpha)} c_0 \operatorname{Arg} q^{-1/4}(z, \alpha) = 0.$$

Pour tous $\lambda > 0$, $\alpha < 0$

$$\tilde{y}(x, \lambda, \alpha) = \exp\{i\pi/12 + \lambda c + i\lambda B_+(\alpha)\} y_1^+(x, \lambda, \alpha),$$

$$c = S(z_0(\alpha), 0), \quad \operatorname{Re} c > 0,$$

$$B_+(\alpha) = \int_0^{+\infty} [\sqrt{|q(x, \alpha)|} - \sqrt{|q_+(\alpha)|}]\, dx.$$

Si $\alpha < 0$ est fixe, la représentation asymptotique de $\tilde{y}$ est partout valable au voisinage de l'axe réel, sauf en certains voisinages des lignes de Stokes $l_1(\alpha)$ et $l_2(\alpha)$. Mais lorsque $\alpha \to 0$ les points de retour $z_0(\alpha)$ et $\overline{z_0(\alpha)}$ se confondent, de sorte qu'il faut retrancher le demi-axe $]-\infty, 0]$ du domaine de validité de la représentation asymptotique. Cette représentation est néanmoins valable en un point $\tilde{z}$ tel que $\operatorname{Re} \tilde{z} < 0$, $\operatorname{Im} \tilde{z} > 0$ (cette représentation n'est pas valable au point $\bar{\tilde{z}}$).

Introduisons les solutions

$$\tilde{y}_j(z, \lambda, \alpha) \sim c_j q^{-1/4}(z, \alpha) \exp\{\lambda S_j(z_j(\alpha), z)\}, \quad j = 1, 2.$$

Les représentations asymptotiques des solutions $\tilde{y}_{1,2}$ sont valables lorsque $z \to \infty$ respectivement pour $z \in l_1(\alpha)$ et $z \in l^*(\alpha)$,

$$\operatorname{Im} S_1(z_0(\alpha), z) < 0, \quad z \in l_1(\alpha);$$

$$\operatorname{Im} S_2(\overline{z_0(\alpha)}, z) > 0, \quad z \in l_1^*(\alpha),$$

et le long de la ligne de Stokes correspondante

$$\lim_{z \to z_j(\alpha)} \operatorname{Arg}[c_j q^{-1/4}(z, \alpha)] = 0.$$

On a

$$\tilde{y}_1(x, \lambda, \alpha) = \exp\left\{-\frac{i\pi}{12} + \lambda c + i\lambda B_-(\alpha)\right\} y_1^-(x, \lambda, \alpha),$$

$$\tilde{y}_2(x, \lambda, \alpha) = \exp\left\{\frac{i\pi}{12} + \lambda\bar{c} - i\lambda B_-(\alpha)\right\} y_2^-(x, \lambda, \alpha),$$

$$B_-(\alpha) = \int_0^\infty [\sqrt{|q(x, \alpha)|} - \sqrt{|q_-(\alpha)|}]\, dx.$$

Par ailleurs, pour $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$

$$\tilde{y}(z, \lambda, \alpha) = A(\lambda, \alpha)\tilde{y}_1(z, \lambda, \alpha) + B(\lambda, \alpha)\tilde{y}_2(z, \lambda, \alpha).$$

Au point $\tilde{z}$ les solutions $\tilde{y}$ et $\tilde{y}_2$ sont exponentiellement grandes pour $\lambda \gg 1$, la solution $\tilde{y}_1$ est exponentiellement petite, et par la méthode habituelle on trouve

$$B(\lambda, \alpha) = \frac{\tilde{y}(\tilde{z}, \lambda, \alpha)}{\tilde{y}_2(z, \lambda, \alpha)} = [-i + O(\lambda^{-1})]\, e^{2\lambda c}. \tag{53}$$

Ceci permet de calculer le rapport

$$R_+/T_+ = B\exp\{-i\lambda(B_+(\alpha) + B_-(\alpha))\}. \tag{54}$$

Comme $|R_+|^2 + |T_+|^2 = 1$, il vient

$$|R_+| = \exp\left\{-\lambda \int_{\overline{z_0(\alpha)}}^{z_0(\alpha)} \sqrt{q(t)}\, dt\right\}[1 + O(\lambda^{-1})], \tag{55}$$

où le second membre est exponentiellement petit pour $\alpha < 0$ fixe, $\lambda \to +\infty$. Le calcul du coefficient A est impossible.

Les formules (54) et (55) sont valables aussi pour $\alpha \leqslant 0$. En particulier, pour $\alpha = 0$

$$|R_+(0, \alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}} + O(\lambda^{-1}), \quad |T_+(0, \alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}} + O(\lambda^{-1}).$$

§ 9. Equations de Sturm-Liouville à potentiel périodique

1. Propriétés fondamentales des solutions. Considérons l'équation

$$w'' + \lambda^2 q(x) w = 0, \tag{1}$$

où $q(x)$ est une fonction périodique continue de période $T > 0$, $\lambda > 0$ est un paramètre. Pour λ fixe on a le

Théorème de Floquet-Liapounov. *L'équation* (1) *admet un système fondamental de solutions soit de la forme*

$$w_1(x, \lambda) = e^{\mu_1 x} p_1(x, \lambda), \quad w_2(x, \lambda) = e^{\mu_2 x} p_2(x, \lambda), \tag{2a}$$

soit de la forme

$$w_1(x, \lambda) = e^{\mu_1 x} p_1(x, \lambda), \quad w_2(x, \lambda) = e^{\mu_1 x}[xp_1(x, \lambda) + p_3(x, \lambda)], \tag{2b}$$

où $p_j(x, \lambda)$ *sont des fonctions périodiques de période* T.

Les nombres $\mu_1(\lambda)$ et $\mu_2(\lambda)$ s'appellent *exposants caractéristiques*, les nombres $\rho_j(\lambda) = \exp\{T\mu_j(\lambda)\}$, *multiplicateurs*. Le cas (2b) a lieu si seulement $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$.

Soit $Y(x, \lambda)$ la matrice fondamentale de l'équation (1):

$$Y(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ y_1'(x, \lambda) & y_2'(x, \lambda) \end{bmatrix},$$

où $y_1(x, \lambda)$ et $y_2(x, \lambda)$ forment un système fondamental de solutions de l'équation (1). Les multiplicateurs sont alors les racines de l'équation quadratique

$$\det [Y(x_0 + T, \lambda) - \rho Y(x_0, \lambda)] = 0,$$

où x_0 est arbitraire.

Partout dans la suite on admet que la fonction $q(x)$ est à valeurs réelles, de sorte que si $w(x, \lambda)$ est solution de l'équation (1), il en est de même de la fonction $\overline{w(x, \lambda)}$. Supposons que ces solutions forment un système fondamental. Les multiplicateurs se déterminent alors à partir de l'équation

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0,$$

$$a = \operatorname{Re}\left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} & \dfrac{w(T, \lambda)}{w'(T, \lambda)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} & \dfrac{w(0, \lambda)}{w'(0, \lambda)} \end{vmatrix}^{-1} \right\}. \tag{3}$$

Donc $\rho_1\rho_2 = 1$ et si ρ_1, ρ_2 ne sont pas réels, alors $\overline{\rho_2} = \rho_1$, $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$.

Le nombre λ appartient à la zone de stabilité si toutes les solutions de l'équation (1) sont bornées sur l'axe réel, et à la zone d'instabilité (lacune) dans le cas contraire. Comme

$$\rho_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1},$$

les zones d'instabilité sont définies par l'inégalité $|a| \geqslant 1$. Dans ce cas les deux multiplicateurs sont réels et forment un couple ρ, ρ^{-1}. Si λ se trouve dans la zone de stabilité, c'est-à-dire que $|\rho| < 1$, alors les multiplicateurs sont conjugués complexes et forment un couple $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$.

2. Estimations de la largeur des lacunes. Soit Δ_n la largeur de la n-ième lacune ; on sait alors que $\Delta_n = O(n^{-1})$ et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$. On sait que si $q(x) > 0$, $q(x) \in C^m(\mathbf{R})$, alors $\Delta_n = O(n^{-m-1})$

lorsque $n \to \infty$. Montrons que si $q(x) > 0$, $q(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, alors $\Delta_n = O(n^{-\infty})$, $n \to \infty$. L'équation (1) possède une solution $w(x, \lambda)$ dont le développement asymptotique pour $\lambda \to +\infty$ est uniforme sur tout invervalle fini (chap. I, § 10):

$$w(x, \lambda) = \exp\left\{\int_0^x y(t, \lambda)\, dt\right\}, \quad y(x, \lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k}\alpha_k(x). \tag{4}$$

Les fonctions $\alpha_k(x)$ sont toutes périodiques, de période T, les fonctions $\alpha_{2k}(x)$ sont réelles, les fonctions $\alpha_{2k+1}(x)$, imaginaires pures et

$$\alpha_{-1}(x) = i\sqrt{q(x)}, \quad \alpha_0(x) = -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\ln q(x).$$

Posons $y(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) + iy_2(x, \lambda)$ et montrons que

$$\tilde{y}_1(T, \lambda) = \int_0^T y_1(x, \lambda)\, dx = O(\lambda^{-\infty}), \quad \lambda \to \infty. \tag{5}$$

On a (on omet les termes d'ordre $O(\lambda^{-\infty})$)

$$y' + y^2 + \lambda^2 q = 0, \quad y_1' + y_1^2 - y_2^2 + \lambda^2 q = 0, \quad y_2' + 2y_1 y_2 = 0,$$

de sorte que

$$\int_0^T y_1(x, \lambda) = -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{y_2'(x, \lambda)}{y_2(x, \lambda)}\, dx = 0.$$

Les relations (3) et (4) entraînent

$$a(\lambda) = e^{\tilde{y}_1(T, \lambda)}\cos\tilde{y}_2(T, \lambda) + O(\lambda^{-\infty}) = \cos\tilde{y}_2(T, \lambda) + O(\lambda^{-\infty}). \tag{6}$$

Si λ_{1n} et λ_{2n} sont les extrémités des lacunes Δ_n, on a en ces points $a(\lambda) = 1$ ou $a(\lambda) = -1$. Soit $\tilde{\lambda}_n$ le milieu de la lacune Δ_n ; on a alors le développement asymptotique

$$\tilde{y}_2(T, \tilde{\lambda}_n) = n\pi + O(\lambda_n^{-\infty}),$$

d'où l'on déduit le développement asymptotique de $\tilde{\lambda}_n$ en puissances impaires de n^{-1}:

$$\tilde{\lambda}_n = n\pi\left[\int_0^T \sqrt{q(x)}\, dx\right]^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k n^{-2k-1}. \tag{7}$$

De (6) il vient que $\Delta_n = O(n^{-\infty})$. On a par ailleurs établi la représentation asymptotique des multiplicateurs:

$$\rho_{1,2}(\lambda) = \cos\tilde{y}_2(T, \lambda) \pm \sqrt{\cos^2\tilde{y}_2(T, \lambda) - 1 + O(\lambda^{-\infty})} + O(\lambda^{-\infty}),$$

dont le terme principal est égal à

$$\rho_{1,2}(\lambda)=\cos\left[\lambda\int_0^T \sqrt{q(x)}\,dx\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{\cos^2\left[\int_0^T \sqrt{q(x)}\,dx\right]+O(\lambda^{-1})}+O(\lambda^{-1}).$$

3. Lacunes pour potentiels analytiques. Si la fonction $q(z)$ est holomorphe dans un certain voisinage de l'axe réel, la largeur de la n-ième lacune décroît en général exponentiellement lorsque $n\to\infty$. Prouvons ceci en imposant quelques conditions à $q(z)$.

3.1. *Lignes de Stokes.* Soit $q(z)$ une fonction entière strictement positive sur l'axe réel, $q(z)\not\equiv$ const. La fonction $iS(0, z)$, où

$$S(0, z)=\int_0^z \sqrt{q(t)}\,dt$$

et $\sqrt{q(x)}>0$ pour x réels, envoie bijectivement l'axe réel Ox sur l'axe imaginaire dans le plan de S complexe. Donc l'axe Ox est contenu dans un domaine D de type bande et $D=D^*$ (ce domaine est symétrique par rapport à l'axe Ox). La frontière du domaine D est constituée de deux composantes connexes Γ^+ et Γ^-; supposons pour fixer les idées que $\operatorname{Im} z>0$ pour $z\in\Gamma^+$. Les courbes $\Gamma^\pm$ sont invariantes par une T-translation parallèlement à l'axe Ox. La courbe $\Gamma_T^+=\Gamma^+\cap\{0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant T\}$ contient au moins un point de retour de l'équation (1). La représentation asymptotique de la largeur de la n-ième lacune Δ_n est définie par le nombre de points de retour situés sur Γ^+ et par leurs multiplicités. Traitons un cas fondamental: Γ^+ contient un seul point de retour z_0 simple. De ce point sont issues trois lignes de Stokes; supposons que $l_1, l_2\in\Gamma^+$, l_1 est située à gauche de l_2 et $l_3\notin\Gamma^+$.

3.2. *Systèmes fondamentaux de solutions.* Sur la ligne l_1 choisissons la détermination de $\sqrt{q(z)}$ telle que

$$\operatorname{Im}[iS(z_0, z)]>0,\quad z\in l_1.$$

Comme dans les §§ 3 et 5, on peut montrer qu'il existe un domaine D_1 tel que $\partial D_1\supset l_2\cup l_3$. La fonction $iS(z_0, z)$ envoie bijectivement le domaine D_1 sur le demi-plan $\operatorname{Re}(iS)>0$ muni d'un nombre fini ou infini de coupures verticales. Désignons par D_2 le domaine image de D_1 par une T-translation. Supposons que la fonction $q(z)$ satisfait dans le domaine D_1 les conditions du § 4, n° 1. Ces conditions sont en particulier vérifiées par des polynômes trigonométriques stricte-

ment positifs sur l'axe réel. L'équation (1) admet alors (§ 4) pour tout $\lambda > 0$ fixe une solution de la forme

$$w(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) \exp\{-i\lambda S(z_0, z)\} [1 + \lambda^{-1}\varepsilon_1(z, \lambda)], \tag{8}$$

où $\varepsilon_1(z, \lambda) \to 0$ si $z \to \infty$ dans le domaine D_1 de telle sorte que $\operatorname{Re}[iS(z_0, z)] \to +\infty$. Cette solution est définie à un facteur multiplicatif près par la condition $\lim\limits_{z\to\infty} w = 0$, $z \in D_1$. Comme indiqué au § 3, le développement asymptotique (8) pour $\lambda \to +\infty$ est partout valable dans le plan de z complexe, sauf aux voisinages de certaines lignes de Stokes, c'est-à-dire que dans ce domaine $|\varepsilon_1(z, \lambda)| \leqslant c$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$. En particulier, le développement asymptotique (8) lorsque $\lambda \to +\infty$ est valable dans le domaine $D_1 \cup D \cup D_1^* \cup D_2 \cup D_2^*$, d'où l'on a retiré les voisinages des lignes de Stokes l_2 et l_2^*. On définit de façon analogue la solution $w_2(z, \lambda)$ associée au domaine D_2:

$$w_2(z, \lambda) = q^{-1/4}(z) \exp\{-i\lambda S(z_0 + T, z)\} [1 + \lambda^{-1}\varepsilon_2(z, \lambda)]. \tag{9}$$

La détermination de la fonction $q^{-1/4}(z)$ est choisie de telle sorte que $q^{1/4}(x) > 0$ pour x réels.

Montrons que pour chaque $\lambda > 0$ fixe, on a l'identité

$$w_1(z, \lambda) = w_2(z + T, \lambda). \tag{10}$$

Supposons que $z \to \infty$ dans le domaine D_1 de telle sorte que $\operatorname{Re}[iS(z_0, z)] \to +\infty$; alors $w_1(z, \lambda) \to 0$ et comme $z + T \in D_2$, il vient $w_2(z, \lambda) \to 0$. Donc, $w_1(z + T, \lambda) \equiv A w_2(z, \lambda)$. En simplifiant les deux membres de cette identité par $q^{-1/4}(z)$ et en tenant compte du choix des déterminations de la fonction S, on obtient

$$1 + \lambda^{-1}\varepsilon_1(z + T, \lambda) = A[1 + \lambda^{-1}\varepsilon_2(z + T, \lambda)].$$

En faisant tendre $z \to \infty$ dans le domaine D comme indiqué ci-dessus et en tenant compte de ce que $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, on obtient l'identité (10).

Considérons les systèmes fondamentaux $\{w_j(z, \lambda), \overline{w_j(\bar{z}, \lambda)}\}$, $j = 1, 2$, et soient $W_j(z, \lambda)$ les matrices fondamentales correspondantes. On a

$$W_1(z, \lambda) = W_2(z, \lambda)\,\Omega(\lambda). \tag{11}$$

En vertu du choix des systèmes fondamentaux de solutions, on a pour les éléments $\omega_{jk}(\lambda)$ de la matrice $\Omega(\lambda)$ les identités

$$\omega_{22}(\lambda) = \overline{\omega_{11}(\lambda)}, \quad \omega_{21}(\lambda) = \overline{\omega_{12}(\lambda)}.$$

Comme $W_1(z, \lambda) = W_2(z + T, \lambda)$, il vient

$$W_2(z + T, \lambda) = W_2(z, \lambda)\,\Omega(\lambda)$$

et les multiplicateurs sont les valeurs propres de la matrice de monodromie $\Omega(\lambda)$. On les tire de l'équation

$$\rho^2 - 2\rho \operatorname{Re} \omega_{11} + |\omega_{11}|^2 - |\omega_{12}|^2 = 0,$$

et comme $\rho_1\rho_2 = 1$, on a l'identité

$$|\omega_{11}(\lambda)|^2 = |\omega_{12}(\lambda)|^2 + 1. \tag{12}$$

Déterminons la représentation asymptotique des éléments ω_{11}, ω_{12} lorsque $\lambda \to +\infty$. On a

$$w_1(z, \lambda) = \omega_{11} w_2(z, \lambda) + \omega_{21}(\lambda) w_3(z, \lambda), \quad w_3(z, \lambda) = \overline{w_2(\bar{z}, \lambda)}.$$

Convenons de désigner par $f_j(z)$ la détermination de la fonction multivalente $f(z)$, associée à la solution w_j.

Supposons que $z \to \infty$ dans le domaine D_2^* de telle sorte que $\operatorname{Re}[iS(z_0, z)] \to -\infty$; alors $w_1 \to \infty$, $w_2 \to \infty$, $w_3 \to 0$. Il s'ensuit que

$$\omega_{11}(\lambda) = \lim_{z\to\infty} \frac{w_1(z, \lambda)}{w_2(z, \lambda)}.$$

En remplaçant les solutions par leurs développements asymptotiques, on a

$$\omega_{11}(\lambda) = \left[\frac{q_2(z)}{q_1(z)}\right]^{1/4} \exp\{i\lambda [S_2(z_0+T, z) - S_1(z_0, z)]\} [1 + O(\lambda^{-1})],$$

où pour z on peut prendre n'importe quel point du domaine D_2^*, puisque le rapport des racines et l'exponentielle sont indépendants de z. Le rapport de ces racines est égal à l'unité de par le choix des branches de $q_j^{1/4}(z)$. Les branches S_1 et S_2 étant confondues dans le domaine $D_2^* \cup D \cup \partial D$, on a

$$S_2(z_0+T, z) - S_1(z_0, z) = \int_{z_0+T}^{z_0} \sqrt{q(t)}\, dt > 0,$$

où l'intégrale est prise le long de la ligne l_2. La fonction $q(x)$ étant périodique et réelle, cette intégrale vaut

$$\alpha = \int_0^T \sqrt{q(x)}\, dx. \tag{13}$$

On obtient en définitive

$$\omega_{11}(\lambda) = e^{i\lambda\alpha} [1 + O(\lambda^{-1})].$$

On obtient sans peine le développement asymptotique de $\omega_{11}(\lambda)$ en puissances de λ^{-1}:

$$\omega_{11}(\lambda) = \exp\{iy_2(T, \lambda)\} + O(\lambda^{-\infty}),$$

où y_2 intervient dans la formule (6).

Supposons que $z \to \infty$ dans le domaine D_2 de telle sorte que $\operatorname{Re}[iS_1(z_0, z)] \to -\infty$; alors $w_1 \to \infty$, $w_2 \to 0$, $w_3 \to \infty$. Ceci entraîne

$$\omega_{21}(\lambda) = \lim_{z\to\infty} \frac{w_1(z, \lambda)}{w_3(z, \lambda)}.$$

De la définition de la solution w_3 il s'ensuit que pour $z \in D_2$ fixe, $\lambda \to +\infty$, on a

$$w_3(z, \lambda) = q_2^{-1/4}(z) \exp\{i\lambda S_2(\bar{z}_0 + T, z)\}[1 + O(\lambda^{-1})].$$

Fixons un point $z_1 \in D_2$ situé au-dessus de l_1 et assez proche d'elle. On obtient la valeur $q_j^{1/4}(z)$ en prolongeant analytiquement la branche de la racine le long du chemin γ_j à partir du point $x = 0$. Comme le développement asymptotique (8) n'est pas valable sur la ligne l_2, le chemin γ_1 passera à gauche du point z_0. Supposons que γ_2 passe à droite du point z_0, puisque le développement asymptotique de la solution w_3 est valable sur l_2. Donc $[q_2(z_1)/q(z_1)]^{1/4} = i$. D'autre part,

$$\begin{gathered} S_1(z_0, z) + S_2(\bar{z}_0 + T, z) = \int_{\bar{z}_0+T}^{z_0+T} \sqrt{q(t)}\,dt + \alpha = \beta + \alpha, \\ \beta = \int_{\bar{z}_0}^{z_0} \sqrt{q(t)}\,dt > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

On obtient en définitive

$$\omega_{21}(\lambda) = i \exp\{-\lambda\beta - i\lambda\alpha\}[1 + O(\lambda^{-1})]. \tag{15}$$

De (12) à (15) il s'ensuit que

$$\omega_{11}(\lambda) = \exp\{i(\lambda\alpha + \varphi(\lambda))\}\sqrt{1 + \exp\{-2\lambda\beta\}(1 + \psi(\lambda))}, \tag{16}$$

où $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ sont des développements asymptotiques en puissances de λ^{-1} commençant par λ^{-1}, les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ sont réelles.

4. **Représentation asymptotique de Δ_n.** Supposons que la n-ième lacune est $(\lambda_{1n}, \lambda_{2n})$, $\lambda_{1n} < \lambda_{2n}$; les développements asymptotiques de λ_{jn} en puissances de n^{-1} coïncident et sont de la forme (7). Limitons-nous au cas où n est pair. Alors

$$\operatorname{Re}\omega_{11}(\lambda_{1n}) = \operatorname{Re}\omega_{11}(\lambda_{2n}) = 1$$

et par suite

$$\cos[\alpha\lambda_{jn} + \varphi(\lambda_{jn})] = 1 - \frac{1}{2}\exp\{-2\beta\lambda_{jn}\}[1 + O(n^{-1})], \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

Supposons que $\tilde{\lambda}_n$ est un point de la n-ième lacune en lequel $\cos[\alpha\lambda + \varphi(\lambda)] = 1$; alors

$$\lambda_{1n} = \tilde{\lambda}_n - \alpha_n, \quad \lambda_{2n} = \tilde{\lambda}_n + \beta_n, \quad \alpha_n > 0, \quad \beta_n > 0.$$

En développant les premiers membres des équations (17) en série de Taylor au point $\tilde{\lambda}_n$ et en ajoutant ces expressions, on obtient

$$\Delta_n = \frac{2}{\alpha} \exp\left\{-\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right\} [1 + O(n^{-1})], \tag{18}$$

où α et β interviennent dans (13) et (14).

5. Compléments. Soit la courbe $\Gamma_T^+ = \Gamma^+ \cap \{0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant T\}$ qui contient deux points de retour simples z_1 et z_2. Alors

$$\Delta_n = \frac{2\,|\cos(n\pi\gamma/\alpha) + O(n^{-1})|}{\alpha\sqrt{\beta+1}} \exp\left\{-\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right\},$$

où α est de la même forme que ci-dessus

$$\beta = \int_{\bar{z}_1}^{z_1} \sqrt{q(z)}\,dz, \quad \gamma = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)}\,dz > 0.$$

Supposons que $q(z)$ est une fonction méromorphe et que Γ_T^+ contient un point de retour simple z_0 et un pôle simple z_1, et de plus que la ligne de Stokes reliant z_0 à z_1 est située dans $[D]$ (la courbe Γ_T^+ est de la même forme que plus haut). Alors

$$\Delta_n = \frac{8\,|\sin(n\pi\gamma/\alpha) + O(n^{-1})|}{\alpha^2\sqrt{1+\beta}} \exp\left\{-\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right\},$$

où α et β sont les mêmes que dans (13) et (15),

$$\gamma = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{q(t)}\,dt > 0.$$

Ces formules sont prouvées à l'aide des matrices de passage utilisées pour le calcul de la matrice de monodromie $\Omega(\lambda)$. Dans les deux cas on est confronté à un phénomène de résonance.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE À POINTS DE RETOUR

Dans ce chapitre on étudie les équations de la forme

$$y'' + \lambda^2 q(x, \lambda^{-1}) y = 0, \quad \lambda \to \infty,$$

présentant des points de retour. On exhibe les formules asymptotiques des solutions, valables dans un voisinage réel ou complexe d'un point de retour.

§ 1. Point de retour simple. Cas réel

1. Solutions asymptotiques formelles. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x) y = 0, \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, $x \in I = [a, b]$. Supposons satisfaites les conditions:

1) La fonction $q(x)$ est réelle, $q(x) \in C^\infty(I)$.

2) L'équation (1) admet un seul point de retour x_0 qui est simple, $a < x_0 < b$.

Alors $q(x_0) = 0$, $q'(x_0) \neq 0$; supposons que $q'(x_0) > 0$ pour fixer les idées. Pour les $|x - x_0|$ petites, l'équation (1) peut être remplacée approximativement par l'équation $y'' - \lambda^2 q'(x_0)(x - x_0) y = 0$ dont les solutions sont les fonctions d'Airy $w(\lambda^{2/3}(q'(x_0))^{2/3}(x - x_0))$.

On cherchera une solution asymptotique formelle de l'équation (1) sous la forme proposée par F. Olver [28]:

$$\begin{gathered} y = Aw(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \lambda^{-1/3} B w'(\lambda^{2/3}\xi(x)), \\ A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n(x), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n(x), \end{gathered} \tag{2}$$

où $\xi(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ sont des fonctions inconnues, $w(t)$ est une solution de l'équation d'Airy $w'' - tw = 0$. En portant (2) dans

l'équation (1) et en égalant à 0 les coefficients des fonctions w, w', on obtient

$$\lambda^2 A(\xi'^2\xi - q) + 2\lambda B'\xi'\xi + \lambda B(\xi'\xi)' + A'' = 0,$$
$$\lambda^2 B(\xi'^2\xi - q) + \lambda(2A'\xi' + A\xi'') + B'' = 0.$$

Portons dans ce système les développements asymptotiques des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et égalons à 0 les coefficients des puissances de λ^{-1}; on obtient alors pour la fonction $\xi(x)$ l'équation

$$\xi'^2(x)\,\xi(x) = q(x). \tag{3}$$

Posons

$$\xi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\,dt\right)^{2/3} \equiv \left(\frac{3}{2} S(x_0, x)\right)^{2/3}. \tag{4}$$

La fonction $\xi(x)$ est réelle, $\xi(x) \in C^\infty(I)$, $\operatorname{sgn} \xi(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0)$ et

$$\xi(x) \sim [q'(x_0)]^{2/3}(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Pour les fonctions A_n et B_n on obtient le système récurrentiel d'équations

$$2\sqrt{\xi'\xi}\,(B_n\sqrt{\xi'\xi})' + A''_{n-1} = 0,$$
$$2\sqrt{\xi'}\,(A_n\sqrt{\xi'})' + B''_{n-1} = 0,$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad A_{-1} = B_{-1} = 0.$$

En particulier, $A_0(x) = c\,[\xi'(x)]^{-1/2}$. Les fonctions $A_n(x)$ et $B_n(x)$ doivent être nécessairement différentiables pour $x \in I$, ce qui nous conduit aux identités

$$A_{2n+1}(x) \equiv 0, \quad B_{2n}(x) \equiv 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Les relations récurrentielles nous donnent

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}}\left[c_n - \int_{x_0}^{x} \frac{B''_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi'(t)}}\,dt\right], \\ B_n(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\xi(x)\xi'(x)}}\int_{x_0}^{x} \frac{A''_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi(t)\xi'(t)}}\,dt, \end{aligned} \tag{5}$$

où c_n sont des constantes. Dans ces formules $\sqrt{\xi'(x)} > 0$ et pour fixer les idées $\sqrt{\xi(x)} > 0$ pour $x > x_0$, $\sqrt{\xi(x)} = i\,|\sqrt{\xi(x)}|$ pour $x < x_0$ (en fait le choix de la détermination de $\sqrt{\xi(x)}$ n'est pas essentiel). Remarquons que la limite inférieure d'intégration dans (5) est le point de retour x_0; pour tout autre choix de cette limite, les

fonctions A_n et B_n présenteront des singularités en x_0. On obtient en définitive la solution asymptotique formelle de l'équation (1):

$$y = \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}}\right] w(\lambda^{2/3}\xi(x)) +$$

$$+ \lambda^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}(x)}{\lambda^{2n}} w'(\lambda^{2/3}\xi(x)). \quad (6)$$

Une autre solution asymptotique formelle a été proposée par T. Cherry [48]:

$$y = Aw(\lambda^{2/3}\xi), \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\lambda^{-n}, \quad \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x)\lambda^{-n}. \quad (7)$$

En portant cette expression dans l'équation (1) et en égalant à zéro les coefficients de w et w', on obtient les relations

$$\lambda^2 A(\xi\xi'^2 - q) + A'' = 0, \quad 2A'\xi' + A\xi'' = 0.$$

En remplaçant les fonctions A et ξ par leurs développements asymptotiques et en égalant à zéro les coefficients des puissances de λ^{-1}, on obtient le système récurrentiel d'équations

$$\xi_0\xi_0'^2 - q = 0, \quad 2A_0'\xi_0' + A_0\xi_0'' = 0,$$
$$A_0\xi_0'(\xi_1\xi_0' + 2\xi_0\xi_1') = 0, \quad \ldots,$$

d'où l'on tire de proche en proche les fonctions ξ_0, A_0, ξ_1, A_1, ... Les fonctions $\xi_0(x)$ et $A_0(x)$ coïncident avec les fonctions $\xi(x)$ et $A(x)$ trouvées ci-dessus, mais les formules des termes ultérieurs du développement (7) sont plus compliquées que les formules (5). Les autres méthodes de construction d'une solution asymptotique formelle sont exhibées dans le nº 3.3.

2. Fonctions d'Airy. On appelle *fonctions d'Airy* les solutions de l'*équation d'Airy*

$$y'' - xy = 0. \quad (8)$$

2.1. *Représentations intégrales et séries.* Les fonctions d'Airy s'expriment au moyen des fonctions de Bessel d'ordre 1/3:

$$y(x) = \sqrt{x}\, Z_{1/3}\left(i\, \frac{2}{3} x^{3/2}\right).$$

Les fonctions d'Airy forment une classe autonome en raison du rôle important joué par l'équation d'Airy dans les problèmes d'application et en théorie asymptotique des équations différentielles linéaires.

Il existe deux types de notations pour désigner les fonctions d'Airy: Ai (x), Bi (x) et les notations de V. Fock $v(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$

(nous ferons usage de ces dernières). Ces fonctions sont reliées entre elles comme suit:

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{v\,(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathrm{Bi}\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(w_1(x) + w_2(x)).$$

Les fonctions Ai (x) et Bi (x) sont réelles pour x réel.

Les fonctions v (x), w_1 (x) et w_2 (x) admettent les représentations intégrales:

$$v\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xt + t^3/3)}\,dt,$$

$$w_1\,(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right) e^{xt - t^3/3}\,dt,$$

$$w_2\,(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\infty e^{2\pi i/3}}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right) e^{xt - t^3/3}\,dt.$$

Les fonctions d'Airy sont toutes des fonctions entières de x. On a les identités

$$v\,(z) = \frac{w_1(z) - w_2(z)}{2i}, \quad \overline{w_2\,(z)} = w_1\,(\bar{z}).$$

En particulier, la fonction v (x) est réelle pour x réel et $\overline{w_2\,(x)} = w_1\,(x)$.

Si y (x) est une fonction d'Airy, il en est de même de la fonction y $(e^{2\pi i/3}x)$. Ceci nous conduit aux identités

$$w_1\,(xe^{2\pi i/3}) = e^{i\pi/3} w_2\,(x), \quad w_2\,(xe^{-2\pi i/3}) = 2e^{i\pi/6} v\,(x).$$

La fonction v admet le développement en série

$$v\,(z) = \frac{1}{3^{2/3}\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,((n+1)/3)}{n!} \sin\left[\frac{2}{3}\,(n+1)\,\pi\right] (3^{1/3}z)^n,$$

qui converge pour tous les z. Signalons aussi les formules

$$w_1\,(0) = \frac{2\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi/6}}{3^{2/3}\Gamma\,(2/3)}, \quad w_1'\,(0) = \frac{2\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi/6}}{3^{4/3}\Gamma\,(4/3)},$$

$$v\,(0) = \mathrm{Im}\,w_1\,(0), \qquad v'\,(0) = \mathrm{Im}\,w_1'\,(0).$$

2.2. *Développements asymptotiques.* Pour $x \to +\infty$ réel, on a les développements asymptotiques

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-3n/2},$$

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^{-3n/2}, \tag{9}$$

$$a_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{(2n)!} 9^{-n}.$$

Ces développements peuvent être dérivés par rapport à x autant de fois qu'on le veut. Pour $x \to -\infty$ réel, on a les formules asymptotiques

$$w_1(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} (-x)^{-1/4} \exp\left\{i\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} a_n (-x)^{-3n/2},$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-x)^{-1/4} \operatorname{Im}\left\{\exp\left\{i\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} a_n (-x)^{-3n/2}\right\}, \tag{10}$$

où $\sqrt{-x} > 0$, $\sqrt[4]{-x} > 0$ et a_n sont donnés par (9).

En particulier, la fonction $v(x)$ décroît exponentiellement lorsque $x \to +\infty$ et oscille lorsque $x \to -\infty$:

$$v(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2x^{3/2}/3}, \quad x \to +\infty,$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2})\right], \quad x \to -\infty.$$

Les fonctions $w_1(x)$ et $w_2(x)$ oscillent fortement pour $x < 0$ et croissent exponentiellement pour $x \to +\infty$.

Exhibons les formules asymptotiques des fonctions d'Airy pour les z complexes. Soient l_1, l_2 et l_3 les rayons $\operatorname{Arg} z = \pi$, $\operatorname{Arg} z = \pi/3$ et $\operatorname{Arg} z = -\pi/3$ (cf. fig. 3). Ces rayons sont des lignes de Stokes. Retirons du plan complexe le secteur S_2 contenant la ligne l_2, c'est-à-dire que $|\operatorname{Arg} z - \pi/3| \geqslant \varepsilon > 0$ à l'extérieur de S_2. La représentation asymptotique de $w_1(z)$ est donnée en dehors de S_2 par la formule (9), où les déterminations de $\sqrt[4]{z}$ et $\sqrt{z}$ sont strictement positives pour $z > 0$. Dans le secteur S_2

$$w_1(z) = -w_1(ze^{2\pi i/3}) - w_1(ze^{-2\pi i/3}).$$

2.3. *Zéros des fonctions d'Airy*. Tous les zéros de la fonction $v(z)$ et de sa dérivée sont réels, simples et situés sur $]-\infty, 0[$. Tous les zéros des fonctions $w_1(z)$, $w_1'(z)$ sont situés sur le rayon $\operatorname{Arg} z = \pi/3$, ceux des fonctions $w_2(z)$, $w_2'(z)$, sur le rayon $\operatorname{Arg} z = -\pi/3$, c'est-à-dire que les zéros de toutes les fonctions d'Airy et de leurs dérivées sont situés sur les lignes de Stokes l_1, l_2 et l_3.

Les zéros t_s et t_s' des fonctions $v(x)$, $v'(x)$ admettent les représentations asymptotiques suivantes:

$$t_s = \left[\frac{3}{2}\pi\left(s-\frac{1}{4}\right)\right]^{2/3} + O(s^{-4/3}),$$

$$t_s' = \left[\frac{3}{2}\pi\left(s-\frac{3}{4}\right)\right]^{2/3} + O(s^{-4/3}).$$

3. Représentations asymptotiques des solutions.

3.1. *Equation* (1). Supposons que les conditions 1) et 2) sont satisfaites. Pour tout $N \geqslant 1$ l'équation (1) admet alors une solution de la forme

$$y_0(x, \lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right)\right] v(\lambda^{2/3}\xi(x)) +$$
$$+ \lambda^{-4/3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+1}(x)}{\lambda^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right)\right] v'(\lambda^{2/3}\xi(x)), \quad (11)$$

où v est une fonction d'Airy-Fock, les coefficients A_n et B_n se déterminent à partir de (5), où $c_n = 0$ pour $n \geqslant 1$. Les majorations des résidus sont uniformes en $x \in I$. Le développement asymptotique (11) est différentiable par raport à x et à λ autant de fois qu'on le veut avec respect de l'uniformité en $x \in I$ des majorations des résidus.

Cette remarque est valable pour tous les développements asymptotiques mentionnés plus bas. Le terme principal de la représentation asymptotique s'écrit

$$y_0(x, \lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] v(\lambda^{2/3}\xi(x)) -$$
$$- \frac{1}{2\lambda^{4/3}}\left[\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)\xi(x)}} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi'(t)}}\right)'' \frac{dt}{\sqrt{\xi'(t)\xi(t)}} +\right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] v'(\lambda^{2/3}\xi(x)). \quad (12)$$

Au point de retour on a en particulier

$$y_0(x_0, \lambda) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(q'(x_0))^{2/3}}. \quad (13)$$

La solution y_0 oscille rapidement pour $x \leqslant x_0$; le terme principal de la représentation asymptotique est égal à

$$y_0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} v(\lambda^{2/3}\xi(x)) + O\left(\frac{1}{\lambda^{4/3}}\right), \quad x \leqslant x_0.$$

La fonction $v(t)$ présente une infinité de zéros t_k: $\ldots < t_k < < t_{k-1} < \ldots < t_1 < 0$. C'est pourquoi il est nécessaire au voisinage des zéros x_k d'inclure dans le terme principal de la représentation asymptotique le terme contenant v' (cf. (12)). Pour $t \geqslant 0$, $v(t) \neq 0$ et le terme principal de la représentation asymptotique est de la forme

$$y_0(x, \lambda) = v(\lambda^{2/3}\xi(x)) \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{2/3}}\right)\right].$$

L'équation (1) présente aussi des solutions de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right)\right] [w_j(\lambda^{2/3}\xi(x)) +$$
$$+ \lambda^{-4/3}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{B_{2n}(x)}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2N+2}}\right)\right] w_j'(\lambda^{2/3}\xi(x)), \quad j = 1, 2, \tag{14}$$

où w_1 et w_2 sont des fonctions d'Airy. Le terme principal de la représentation asymptotique est égal à

$$y_j(x, \lambda) = w_j(\lambda^{2/3}\xi(x)) [1 + O(\lambda^{-2/3})].$$

Les solutions y_j oscillent rapidement pour $x \leqslant x_0$ et croissent exponentiellement pour $x \geqslant x_0 + \delta$, $\delta > 0$, $\lambda \to +\infty$. Ces solutions peuvent être choisies conjuguées complexes: $\overline{y_2(x, \lambda)} = y_1(x, \lambda)$.

Les fonctions d'Airy peuvent être remplacées par leurs développements asymptotiques à la condition que $\lambda^{2/3} | \xi(x) | \gg 1$, c'est-à-dire pour $| x - x_0 | \gg \lambda^{-2/3}$. Donc l'épaisseur de la couche limite dans laquelle il est impossible de simplifier les formules (11), (14) est de l'ordre $O(\lambda^{-2/3})$.

3.2. *Formules de raccordement.* Supposons que $\delta > 0$ est fixe et indépendant de λ. Pour $x \notin]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\lambda \to +\infty$, les solutions y_j admettent alors des développements asymptotiques de la même forme qu'au chap. II, § 3:

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} q^{-1/4}(x) e^{\lambda S} [1 + \lambda^{-1}\varphi_1^+(x, \lambda)], \quad x \geqslant x_0 + \delta, \\ y_1(x, \lambda) &= \frac{\lambda^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} |q(x)|^{-1/4} e^{i\lambda|S|} [1 + \lambda^{-1}\varphi_1^-(x, \lambda)], \\ &\qquad x \leqslant x_0 - \delta, \end{aligned} \tag{15}$$

$$y_0(x,\ \lambda)=\frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}}\,q^{-1/4}(x)\,e^{-\lambda S}\,[1+\lambda^{-1}\varphi_0(x,\ \lambda)],\quad x\geqslant x_0+\delta,$$

$$y_0(x,\ \lambda)=\frac{\lambda^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}}\,|q(x)|^{-1/4}\exp\left\{i\lambda\,|S|-\frac{i\pi}{4}\right\}[1+\lambda^{-1}\psi_+(x,\ \lambda)]-$$
$$-\exp\left\{-i\lambda\,|S|+\frac{i\pi}{4}\right\}[1+\lambda^{-1}\psi_-(x,\ \lambda)],\quad x\leqslant x_0-\delta. \qquad (16)$$

Dans ces formules $S=\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt$, $S>0$ pour $x>x_0$ et $\psi_j^{\pm}$ et $\psi_\pm$ sont des développements asymptotiques en séries de puissances de λ^{-1}. Les formules (15) et (16) s'appellent *formules de raccordement*: elles permettent de trouver le développement asymptotique d'une solution d'un côté du point de retour si ce développement est connu de l'autre côté.

Supposons que $I=]-\infty,\ b]$, les conditions 1) et 2) sont satisfaites et $q(x)$ est un polynôme. Les développements asymptotiques (11) et (14) sont alors valables pour $\lambda\to+\infty$ uniformément en $x\in I$. De plus, ils sont doubles, c'est-à-dire valables pour $x\to-\infty$ à $\lambda>0$ fixe. Ceci vaut dans le cas aussi où les intégrales $\int\limits_{-\infty}|\alpha_k(x)|\,dx$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, sont toutes convergentes.

3.3. *Paramètres auxiliaires.* Considérons l'équation

$$y''-\lambda^2q(x,\ \alpha)\,y=0 \qquad (17)$$

sur l'intervalle I, où α est un paramètre réel, $\alpha\in J=[-\alpha_0,\ \alpha_0]$, $\alpha_0>0$. Introduisons les conditions:

1) La fonction $q(x,\ \alpha)$ est réelle, $q\in C^\infty(I\times J)$.

2) $q(x_0,\ 0)=0$, $q'_x(x_0,\ 0)\neq0$, $q'_\alpha(x_0,\ 0)\neq0$ et $q(x,\ 0)\neq0$ pour $x\in I$, $x\neq x_0$.

Supposons pour fixer les idées que $q'_x(x_0,\ 0)>0$, $q'_\alpha(x_0,\ 0)<0$. Pour les petits α_0 l'équation (17) présente alors sur l'intervalle I un seul point de retour qui est simple: $x=x_0(\alpha)$, où $x_0(0)=0$, $x_0(\alpha)\in C^\infty(J)$. On cherchera une solution asymptotique formelle de l'équation (17) sous la forme (2), où A_n, B_n et ξ sont des fonctions de $(x,\ \alpha)$. On obtient alors

$$\xi(x,\ \alpha)=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{x_0(\alpha)}^{x}\sqrt{q(t,\ \alpha)}\,dt\right)^{2/3}.$$

Les coefficients A_n et B_n sont donnés par les formules (5) dans lesquelles il faut poser $C_n=0$, $x_0=x_0(\alpha)$. Si α_0 est assez petit, alors

A_n, B_n et $\xi \in C^\infty (I \times J)$. L'équation (17) possède une solution de la forme

$$y_0(x, \lambda, \alpha) = \Big[\frac{1}{\sqrt{\xi'_x(x, \alpha)}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n(x, \alpha)}{\lambda^n} + O\Big(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\Big)\Big] v(\lambda^{2/3}\xi(x, \alpha)) + \lambda^{-1/3}\Big[\sum_{n=0}^{N} \frac{B_n(x, \alpha)}{\lambda^n} + O\Big(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\Big)\Big] v'(\lambda^{2/3}\xi(x, \alpha)) \qquad (18)$$

et des solutions y_1 et y_2 de la même forme, mais il faut remplacer v par w_1 et w_2. Les majorations des résidus sont uniformes en $(x, \alpha) \in I \times J$. La différence entre les formules (6) et (17) réside dans le fait que les coefficients A_{2n+1} et B_{2n} sont nuls dans la première.

L'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x, \lambda^{-1}) y = 0 \qquad (19)$$

intervient dans de nombreux problèmes. Supposons que J est l'intervalle $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et soient réalisées les conditions:

1) La fonction $q(x, \varepsilon)$ est réelle, $q \in C^\infty (I \times J)$.

2) On a le développement asymptotique

$$q(x, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x) \varepsilon^j, \quad \varepsilon \to +0,$$

uniforme en $x \in I$. Ici $q_j(x) \in C^\infty (I)$ et le développement asymptotique est dérivable autant de fois qu'on le veut par rapport à x.

3) La fonction $q_0(x)$ satisfait les conditions 1) et 2) du nº 1.

Pour $\varepsilon_0 \ll 1$, $\varepsilon \in J$, l'équation (19) admet alors un seul point de retour $x = x_0(\varepsilon)$, où $x_0(\varepsilon) \to x_0$ lorsque $\varepsilon \to +0$ et l'on a le développement asymptotique

$$x_0(\varepsilon) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j x_j, \quad \varepsilon \to +0, \quad x_1 = -\frac{q_1(0)}{q'_0(0)}.$$

L'équation (19) possède des solutions y_0, y_1 et y_2 admettant un développement asymptotique de la forme (18) pour $\alpha = \lambda^{-1}$. La fonction $\xi(x, \varepsilon)$ doit être solution de l'équation (3); prenons-la de la forme

$$\xi(x, \varepsilon) = \Big(\frac{3}{2} \int_{x_0(\varepsilon)}^{x + x_0(\varepsilon) - x_0} \sqrt{q(t, \varepsilon)}\, dt\Big)^{2/3}.$$

Pour $\lambda \to +\infty$, on a alors uniformément en $x \in I$

$$\xi(x, \varepsilon) = \xi_0(x)\,[1 + \lambda^{-1}\xi_1(x) + O(\lambda^{-2})],$$

$$\xi_0(x) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t, 0)}\,dt\right)^{2/3},$$

$$\xi_1(x) = \frac{1}{3}\xi_0^{-1}(x)\,[q_0'(0)]^{-1}\int_{x_0}^{x} \frac{q_0'(0)\,q_1(t) - q_x'(t, 0)\,q_1(0)}{t - x_0}\,dt.$$

Il existe un autre procédé de construction d'une solution asymptotique formelle de l'équation (19). Cherchons cette solution sous la forme (2) et définissons la fonction $\xi(x)$ à l'aide de la formule (4), où $q = q_0(x)$. Pour les coefficients A_n et B_n on obtient alors les relations récurrentielles:

$$2\sqrt{\xi'\xi}\,(B_n\sqrt{\xi'\xi})' + A_{n-1}'' - \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1-k}q_k = 0,$$

$$2\sqrt{\xi'}\,(A_n\sqrt{\xi'})' + B_{n-1}'' - \sum_{k=1}^{n+1} B_{n+1-k}q_k = 0,$$

$$n = 0,\ 1,\ \ldots,\quad A_{-1} = B_{-1} = 0.$$

Les fonctions $A_n(x)$ et $B_n(x)$ doivent être nécessairement dérivables sur l'intervalle I. Pour $n = 0$ on obtient le système

$$2\sqrt{\xi'\xi}\,(B_0\sqrt{\xi'\xi})' - q_1A_0 = 0,$$

$$2\sqrt{\xi'}\,(A_0\sqrt{\xi'}) - q_1B_0 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$A_0(x) = \frac{c_0}{\sqrt{\xi'(x)}}\,\mathrm{ch}\left[\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt\right],$$

$$B_0(x) = \frac{c_1}{\sqrt{\xi'(x)\,\xi(x)}}\,\mathrm{sh}\left[\int_{x_0}^{x} \alpha(t)\,dt\right],$$

$$\alpha(x) = \frac{q_1(x)}{2\sqrt{q_0(x)}}.$$

On calcule de façon analogue les approximations d'ordre supérieur.

3.4. *Formules asymptotiques de A. Dorodnitsyne* [55]. Considérons l'équation

$$y'' + [\lambda^2 q(x) + p(x)]\,y = 0 \tag{20}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, $a < 0 < b$, où $q(x)$ est une fonction réelle et $p(x)$ une fonction complexe. Supposons que

$$q(x) = xr(x), \quad r(x) > 0, \quad x \in I,$$

et $r(x) \in C^1(I)$, $q(x) \in C(I)$. L'équation (20) admet sur l'intervalle I un seul point de retour qui est simple: $x = 0$.

Considérons un système fondamental de solutions $\{U_1, U_2\}$ de l'équation d'Airy

$$U'' + tU = 0$$

tel que

$$U_1(0) = 1, \quad U_1'(0) = 0, \quad U_2(0) = 0, \quad U_2'(0) = 1.$$

Ces fonctions peuvent être exprimées au moyen de Ai (t) et Bi (t):

$$U_1(t) = \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{2}\left[\mathrm{Ai}(t) + \frac{\mathrm{Bi}(t)}{\sqrt{3}}\right],$$
$$U_2(t) = \frac{3^{1/3}\Gamma(1/3)}{2}\left[-\mathrm{Ai}(t) + \frac{\mathrm{Bi}(t)}{\sqrt{3}}\right].$$

Supposons que $\xi(x)$ est de la forme (4), où $x_0 = 0$,

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda^{2/3}\xi(x), \quad f(x) = p(x) + \sqrt{\xi'(x)}\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}}\right).$$

L'équation (20) possède pour $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$ un système fondamental de solutions $\{y_1, y_2\}$ tel que

$$y_j(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}}\, U_j(\lambda^{2/3}\xi(x))\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{|q(t)|}}\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^{1/3}}\right)\right], \quad x \leqslant 0. \qquad (21)$$

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)}}\, U_1(\lambda^{2/3}\xi(x)) + \frac{1}{\lambda\sqrt{\xi'(x)}}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\, U_1(\lambda^{2/3}\xi(x)) - \frac{\sqrt[3]{3}\,\Gamma^2(2/3)}{2\pi}\, U_2(\lambda^{2/3}\xi(x))\right]\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{r(t)}}\,dt + \frac{f(x)}{\lambda^{4/3}[\xi'(x)]^{5/2}}\,[U_1(\lambda^{2/3}\xi(x))\, V_{12}(\lambda^{2/3}\xi(x)) - U_2(\lambda^{2/3}\xi(x))\, V_{11}(\lambda^{2/3}\xi(x))] + o(\lambda^{-1/3}U(\lambda^{2/3}\xi(x))), \qquad (22)$$

où

$$
\begin{aligned}
&U(t)=\sqrt{U_1^2(t)+U_2^2(t)},\\
&V_{11}(t)=Y_{11}(t)-\frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{\pi}\sqrt{t},\\
&V_{12}(t)=Y_{12}(t)-\sqrt{\frac{t}{3}},\\
&V_{22}(t)=Y_{22}(t)+1-\frac{\Gamma^2(1/3)}{\pi 3^{1/3}}\sqrt{t},\\
&Y_{11}(t)=U_1'^2(t)+tU_1^2(t),\\
&Y_{12}(t)=U_1'(t)\,U_2'(t)+tU_1(t)\,U_2(t),\\
&Y_{22}(t)=U_2'^2(t)-1+tU_2^2(t).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Pour $x\geqslant 0$, la solution y_2 est de la forme

$$
\begin{aligned}
y_2(x,\lambda)={}&\frac{U_2(\lambda^{2/3}\xi(x))}{\sqrt{\xi'(x)}}+\\
&+\frac{1}{\lambda\sqrt{\xi'(x)}}\left[\frac{\Gamma^2(1/3)}{2\pi 3^{1/3}}U_1(\lambda^{2/3}\xi(x))-\frac{1}{2\cdot 3^{1/3}}V_2(\lambda^{2/3}\xi(x))\right]\int_0^x\frac{f(t)}{\sqrt{q(t)}}dt+\\
&+\frac{1}{\lambda^{4/3}\sqrt{\xi'(x)}}\left[\frac{f(x)}{(\xi'(x))^2}U_1(\lambda^{2/3}\xi(x))\,U_{22}(\lambda^{2/3}\xi(x))-\right.\\
&\left.-U_2(\lambda^{2/3}\xi(x))\,V_{12}(\lambda^{2/3}\xi(x))-\frac{f(0)}{(\xi'(0))^2}U_1(\lambda^{2/3}\xi(x))\right]+\\
&+o(\lambda^{-4/3}U(\lambda^{2/3}\xi(x))).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Ces formules asymptotiques ainsi que les développements asymptotiques des dérivées y_1' et y_2' sont établis dans [55].

4. Dépendance plus générale par rapport au paramètre. Considérons l'équation

$$
y''-[\lambda^2 f(x,\lambda)+g(x,\lambda)]\,y=0 \tag{25}
$$

sur l'intervalle $I: a_1<x<a_2$, où a_1 et a_2 peuvent être finis ou infinis. Supposons que pour chaque $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ sont satisfaites les conditions:

1) La fonction $f(x,\lambda)(x-x_0)^{-1}$, où $x_0\in I$, est réelle, non nulle et appartient à $C^2(I)$.

2) La fonction $g(x,\lambda)$ est complexe, $g\in C^2(I)$.

L'équation (25) admet un seul point de retour $x=x_0$ qui de plus est simple.

4.1. *Principales estimations.* Supposons pour fixer les idées que $f(x, \lambda) > 0$ pour $x > x_0$. Les fonctions

$$V(t) = 2^{5/6}3^{1/6}\pi^{1/2}\,\mathrm{Ai}\,((3/2)^{2/3}t),$$

$$\overline{V}(t) = 2^{5/6}3^{-1/3}\pi^{1/2}\,\mathrm{Bi}\,((3/2)^{2/3}t)$$

forment un système fondamental de solutions de l'équation modèle

$$y'' - (3/2)^2 ty = 0,$$

et de plus $V(0) = \overline{V(0)}$. Considérons les fonctions auxiliaires ξ, $\tilde{f}$ et Ω:

$$\xi(x, \lambda) = -\Big(\int_{x_0}^{x} |f(t, \lambda)|^{1/2}\,dt\Big)^{2/3}, \quad a_1 < x \leqslant x_0,$$

$$\xi(x, \lambda) = \Big(\int_{x_0}^{x} |f(t, \lambda)|^{1/2}\,dt\Big)^{2/3}, \quad x_0 \leqslant x < a_1,$$

$$\tilde{f}(x, \lambda) = (2/3)^2\,|f(x, \lambda)|\,|\xi|^{-1}, \qquad \Omega(t) = 1 + \sqrt{|t|}$$

et la fonction de contrôle de l'erreur

$$h(x, \lambda) = \Big[\tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\frac{d^2}{dx^2}\tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) - g(x, \lambda)\tilde{f}^{-1/2}(x, \lambda)\Big]\frac{1}{\Omega(\lambda^{2/3}\xi)}.$$

La fonction $\xi(x, \lambda)$ est strictement croissante pour $x \in I$. Pour l'équation modèle on a $x_0 = 0$, $g \equiv 0$, $\xi = x$, $\tilde{f} \equiv 1$, $h \equiv 0$.

Considérons l'équation

$$\overline{V}(t) = V(t)\,\mathrm{tg}\,\pi/6.$$

Cette équation ne possède pas de racines positives; soit $-t_0$ la plus petite racine négative en module, de sorte que $t_0 \approx 0{,}279$. Introduisons la fonction de poids

$$E(t) = \sqrt{\overline{V}(t)/V(t)}, \quad t \geqslant -t_0; \quad E(t) = \sqrt{\mathrm{tg}\,\pi/6}, \quad t \leqslant -t_0,$$

qui est continue et décroissante sur l'axe réel. Posons

$$M(t) = \Big(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}V^2(t) + \mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{6}\overline{V}^2(t)\Big)^{1/2},$$

$$N(t) = \Big(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}V'^2(t) + \mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{6}\overline{V}'^2(t)\Big)^{1/2}$$

pour $t \leqslant -t_0$ et

$$M(t) = (2V(t)\overline{V(t)})^{1/2},$$

$$N(t) = \Big[\frac{V'^2(t)\overline{V}^2(t) + \overline{V}'^2(t)V^2(t)}{V(t)\overline{V(t)}}\Big]^{1/2}$$

pour $t \geqslant -t_0$. On remarquera que

$$M(t) \sim 2 \cdot 3^{-1/4} |t|^{-1/4}, \quad N(t) \sim (3/2) M(t), \quad |t| \to \infty.$$

Notons

$$\rho(x_1, x_2) = \left| \int_{x_1}^{x_2} |h(x, \lambda)| dx \right|.$$

L'équation (25) admet des solutions w_1 et w_2 telles que

$$\begin{aligned} w_1(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [\overline{V}(\lambda^{2/3}\xi) + \varepsilon_1], \\ w_2(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [V(\lambda^{2/3}\xi) + \varepsilon_2]. \end{aligned} \tag{26}$$

Pour les résidus on a les majorations

$$\frac{|\varepsilon_j(x, \lambda)|}{M(\lambda^{2/3}\xi)}, \quad \frac{\left| \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_j(x, \lambda) \right|}{\lambda^{2/3}\tilde{f}^{1/2}(x, \lambda) N(\lambda^{2/3}\xi)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sigma_j}{\rho} E^{\pm 1}(\lambda^{2/3}\xi) \left[\exp\left\{ \frac{\delta}{\lambda^{2/3}} \rho(a_j, x) \right\} - 1 \right], \tag{27}$$

où $j = 1, 2$ et le signe plus est pris pour $j = 1$

$$\delta = \sup_{t \in \mathbf{R}} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) M^2(t) \right),$$
$$\sigma_1 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) |\overline{V}(t)| E^{-1}(t) M(t) \right),$$
$$\sigma_2 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \left(\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3} \Omega(t) |V(t)| E(t) M(t) \right).$$

On peut simplifier ces majorations à l'aide des inégalités

$$\sigma_1 \leqslant \rho, \quad \sigma_2 \leqslant \rho, \quad |E(t) M(t)| \leqslant |\overline{V}(t)|, \quad |E^{-1}(t) M(t)| \leqslant |V(t)|.$$

Plus exactement,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(x, \lambda)| &\leqslant |\overline{V}(\lambda^{2/3}\xi)| \left[\exp\left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_1, x) \right\} - 1 \right], \\ |\varepsilon_2(x, \lambda)| &\leqslant |V(\lambda^{2/3}\xi)| \left[\exp\left\{ \frac{\rho}{\lambda^{2/3}} \rho(a_2, x) \right\} - 1 \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Il est évident que si $\lambda^{-2/3} \rho(a_1, a_2) = o(1)$, $\lambda \to +\infty$, les formules (26) et (27) deviennent

$$w_j(x, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda) [V_j(\lambda^{2/3}\xi) + o(|V_j(\lambda^{2/3}\xi)|)],$$
$$V_1 = \overline{V}, \quad V_2 = V.$$

Les estimations (26) et (27) sont analogues aux estimations WKB (chap. II, § 2). Ces estimations et les résultats ultérieurs du nº 4 sont dus à F. Olver [106].

4.2. *Formules de raccordement.* Supposons réalisées les conditions auxiliaires:

3) $\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{|f(t, \lambda)|}\, dt$ diverge pour $x \to a_1+0$ pour $x \to a_2-0$.

4) L'intégrale

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \left| |f|^{-1/4} \frac{d^2}{dx^2} |f|^{-1/4} - g|f|^{-1/2} \right| dx$$

converge.

Pour chaque $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ l'équation (25) admet alors des solutions $\tilde{w}_1$ et $\tilde{w}_2$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &= |f(x, \lambda)|^{-1/4}\left[\cos\left(\lambda \int\limits_{x}^{x_0} |f(t, \lambda)|^{1/2}\, dt\right) + \frac{\pi}{4} + o(1)\right], \\ &\qquad x \to a_1+0, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &= f^{-1/4}(x, \lambda) \exp\left\{-\lambda \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{f(t, \lambda)}\, dt\right\}[1+o(1)], \\ &\qquad x \to a_2-0. \end{aligned} \tag{29}$$

Ces solutions sont définies de façon unique par leurs représentations asymptotiques. Les formules de raccordement décrivent le comportement asymptotique de la solution $\tilde{w}_1$ lorsque $x \to a_2 - 0$ et de la solution $\tilde{w}_2$ lorsque $x \to a_1 + 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(x, \lambda) &= (1+k) f^{-1/4}(x, \lambda) \exp\left\{\lambda \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{f(t, \lambda)}\, dt\right\}[1+o(1)], \\ &\qquad x \to a_2-0, \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) &= \\ &= 2(1+\gamma)|f(x, \lambda)|^{-1/4}\left[\cos\left(\lambda \int\limits_{x}^{x_0} |f(t, \lambda)|^{1/2}\, dt - \frac{\pi}{4} - \beta\right) + o(1)\right], \\ &\qquad x \to a_1+0, \end{aligned} \tag{30}$$

où k, γ et β sont des constantes

$$|k| \leqslant \sqrt{2}\,\frac{\sigma_1}{\rho}\left[\exp\left\{\frac{\rho}{\lambda^{2/3}}\,\rho\,(a_1,\ a_2)\right\}-1\right],$$
$$|\gamma|,\ \frac{2\,|\rho|}{\pi} \leqslant \frac{\sigma_2}{\rho}\left[\exp\left\{\frac{\rho}{\lambda^{2/3}}\,\rho\,(a_1,\ a_2)\right\}-1\right]. \tag{31}$$

4.3. *Majorations asymptotiques des résidus.* Supposons que la fonction f ne dépend pas de λ, de sorte que l'équation (25) est de la forme

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x,\ \lambda)]\,y = 0. \tag{32}$$

Supposons remplies les conditions ci-dessus et pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$

$$|g(x,\ \lambda)| \leqslant c\lambda^{\alpha},\quad x \in I,\quad \int_{a_1}^{a_2} |g(x,\ \lambda)|\,|f(x)|^{-1/2}\,dx \leqslant c\lambda^{\alpha},$$

où $\alpha < 1$. Alors

$$\rho\,(a_1,\ a_2) \leqslant c\lambda^{\alpha_0 - 1/3},\qquad \alpha_0 = \max(\alpha,\ 0),$$

et de (28) il s'ensuit que

$$w_j(x,\ \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x)\,[V_j(\lambda^{2/3}\xi) + O(\lambda^{\alpha_0 - 1}V_j(\lambda^{2/3}\xi))].$$

Les constantes k, γ et β qui figurent dans les formules de raccordement (30) sont de l'ordre $O(\lambda^{\alpha_0 - 1})$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

§ 2. Point de retour simple. Cas complexe

1. Représentation asymptotique des solutions au voisinage d'un point de retour. Considérons l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z)\,w = 0, \tag{1}$$

où $q(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage U du point $z = 0$,

$$q(0) = 0,\quad q'(0) \neq 0. \tag{2}$$

Le point $z = 0$ est un point de retour simple pour l'équation (1).

Les formules asymptotiques des solutions, exhibées au § 1 pour le cas d'un intervalle de l'axe réel, sont valables dans un voisinage complexe de ce point. Les résultats sont donnés plus bas ; on se penchera par ailleurs sur une approche du problème du point de retour proposée dans [129], qui est différente de celle du § 1.

1.1. *Système modèle.* Considérons le système de deux équations

$$\varepsilon w' = A(z,\ \varepsilon)\,w, \tag{3}$$

où la fonction matricielle $A\ (z, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à (z, ε) dans le domaine $D: |z| \leqslant r,\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, de sorte que

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\,\varepsilon^n.$$

Les nombres r et ε_0 sont supposés être assez petits. Admettons que

$$A_0(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

La transformation

$$w = T(z, \varepsilon)\, u \tag{5}$$

permet de ramener le système (3) à la forme

$$\varepsilon u' = A_0(z)\, u. \tag{6}$$

Le système obtenu admet pour solutions

$$u_1 = w(\varepsilon^{-2/3} z), \quad u_2 = \varepsilon^{1/3} w'(\varepsilon^{-2/3} z),$$

où $w\ (t)$ est solution de l'équation d'Airy $w'' - tw = 0$. La matrice $T\ (z, \varepsilon) \in C^{\infty}(D)$ est holomorphe par rapport à z, $|z| \leqslant r$, pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et se développe en une série asymptotique

$$T(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z)\,\varepsilon^n, \quad \varepsilon \to +0, \tag{7}$$

uniforme en z. De plus, $\det T_0(0) = 1$.

Montrons comment il faut calculer les matrices $T_n\ (z)$; ce faisant on obtiendra les développements asymptotiques des solutions du système (3) dans un voisinage complexe complet du point de retour $z = 0$. En portant (5) et (7) dans le système (3), on déduit de (6) le système récurrentiel d'équations

$$\begin{gathered} A_0 T_0 - T_0 A_0 = 0, \\ A_0 T_n - T_n A_0 = \frac{d}{dz} T_{n-1} - \sum_{k=1}^{n} A_k T_{n-k}, \quad n \geqslant 1. \end{gathered} \tag{8}$$

De la forme de la matrice $A_0\ (z)$ il suit que toute solution de la première des équations (8) est de la forme

$$T_0(z) = t_1(z) I + t_2(z) A_0(z), \tag{9}$$

où $t_1\ (z)$ et $t_2\ (z)$ sont des fonctions arbitraires.

Par ailleurs l'équation matricielle

$$A_0(z)\, X(z) - X(z)\, A_0(z) = F(z),$$

où $A_0(z)$ est de la forme (4), admet une solution si et seulement si

$$\operatorname{Tr} F(z) = 0, \quad \operatorname{Tr}(F(z)\, A_0(z)) = 0.$$

Ce fait se prouve de façon élémentaire. Donc la deuxième équation (8) admet une solution si et seulement si

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{dT_0}{dz} - A_1 T_0\right) = 0, \quad \operatorname{Tr}\left(A_0 \frac{dT_0}{dz} - A_0 A_1 T_0\right) = 0,$$

ce qui nous conduit au système d'équations pour les fonctions $t_1(z)$ et $t_2(z)$:

$$\begin{gathered} t_1' = at_1 + bt_2, \qquad zt_2' = bt_1 + \left(za - \frac{1}{2}\right) t_2, \\ a(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A_1(z), \quad b(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A_0(z)\, A_1(z)). \end{gathered} \tag{10}$$

Ce système peut être mis sous la forme $zt' = B(z)\, t$, et de plus

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b(0) & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $B(0)$ sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1/2$, donc le système (10) possède une solution $t(z)$ holomorphe au point $z = 0$ (chap. I, § 2). Cette solution peut être normalisée par la condition $t_1(0) = 1$. La matrice $T_0(z)$ obtenue est holomorphe au point $z = 0$ et $\det T_0(0) = 1$ (cf. (9)). On prouve de façon analogue que les matrices $T_1(z)$, $T_2(z)$, . . . peuvent être choisies de façon à être holomorphes au point $z = 0$ et à satisfaire le système (8).

Intégrons le système (10). Faisons la substitution

$$t_1(z) = A(z)\, \tilde{t}_1(z), \quad t_2(z) = z^{-1/2} A(z)\, \tilde{t}_2(z),$$

$$A(z) = \exp\left\{ \int_0^z a(t)\, dt \right\}.$$

On obtient alors le système

$$\tilde{t}_1' = f\tilde{t}_2, \quad \tilde{t}_2' = f\tilde{t}_1, \quad f(z) = z^{-1/2} b(z).$$

Les fonctions $\tilde{t}_1(z)$ et $\tilde{t}_2(z)$ vérifient l'équation

$$y'' = \frac{f'(z)}{f(z)} y' + f^2(z)\, y,$$

dont toute solution est de la forme

$$y(z) = c_1 \exp\left\{ \int_0^z f(t)\, dt \right\} + c_2 \exp\left\{ - \int_0^z f(t)\, dt \right\}.$$

Si $c_1 = c_2$, la solution $y(z)$ est holomorphe au point $z = 0$; si $c_1 = -c_2$, la fonction $z^{-1/2}\, y(z)$ est holomorphe au point $z = 0$. On obtient en définitive

$$t_1(z) = A(z) \operatorname{ch} B(z), \quad t_2(z) = A(z)\, z^{-1/2} \operatorname{sh} B(z), \tag{11}$$

où

$$A(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^z \operatorname{Tr} A_1(t)\, dt\right\},$$
$$B(z) = \frac{1}{2}\int_0^z t^{-1/2} \operatorname{Tr}(A_0(t)\, A_1(t))\, dt. \tag{12}$$

Le système modèle (3) admet pour $|z| \leqslant r$, $\varepsilon \to +0$ les solutions

$$\begin{aligned} w_1(z, \varepsilon) &= [t_1(z) + O(\varepsilon)]\, w(\varepsilon^{-2/3} z) + \varepsilon^{1/3}[t_2(z) + O(\varepsilon)]\, w'(\varepsilon^{-2/3} z), \\ w_2(z, \varepsilon) &= [z t_2(z) + O(\varepsilon)]\, w(\varepsilon^{-2/3} z) + \varepsilon^{1/3}[t_1(z) + O(\varepsilon)]\, w'(\varepsilon^{-2/3} z), \end{aligned} \tag{13}$$

où $w(t)$ est une fonction d'Airy et les majorations des résidus sont uniformes en z, $|z| \leqslant r$. Les fonctions $t_1(z)$ et $t_2(z)$ sont définies par les formules (11) et (12). Ces solutions admettent des développements asymptotiques en séries de puissances de ε.

1.2. *Notion de point de retour simple du système* (3). Considérons le système (3), où $A(z, \varepsilon)$ satisfait toutes les conditions du n° 1.1 sauf que la matrice $A_0(z)$ est de la forme (4). Supposons que $z = 0$ est un point de retour du système (3), c'est-à-dire que les racines de l'équation caractéristique

$$p^2 - p \operatorname{Tr} A_0(z) + \det A_0(z) = 0$$

coïncident pour $z = 0$. Soit $D(z)$ le discriminant de cette équation :

$$D(z) = (a_{11}(z) - a_{22}(z))^2 + 4a_{12}(z)\, a_{21}(z);$$

alors $D(0) = 0$. Le point de retour $z = 0$ est dit *simple* si $D'(0) \neq 0$, de sorte que

$$D(0) = 0, \quad D'(0) \neq 0. \tag{14}$$

Faisons la substitution

$$w(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^z \operatorname{Tr} A_0(t)\, dt\right\} \tilde{w}(z);$$

le système (3) est alors de la forme

$$\tilde{w}'(z) = \tilde{A}(z, \varepsilon)\, \tilde{w}, \quad \tilde{A}(z, \varepsilon) = A(z, \varepsilon) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A_0(z)\, I, \tag{15}$$

de sorte que Tr $\tilde{A}_0(z) \equiv 0$. Il est immédiat de vérifier que la condition (14) reste en vigueur, c'est-à-dire que $\tilde{D}(0) = 0$ et $\tilde{D}'(0) \neq \neq 0$. On a

$$\tilde{A}_0(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & -a(z) \end{bmatrix},$$
$$a^2(0) + b(0)c(0) = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}_0(0)$ sont nulles, mais $\tilde{A}_0(0) \neq 0$. En effet, dans le cas contraire $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ et $\tilde{D}(z)$ possèderait en $z = 0$ un zéro de multiplicité $\geqslant 2$, ce qui contredit la condition $\tilde{D}'(0) \neq 0$. La matrice $\tilde{A}_0(0)$ se ramène à la forme normale de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrons qu'il existe une matrice $T(z)$ holomorphe en $z = 0$ telle que $\det T(0) \neq 0$ et

$$T^{-1}(z)\tilde{A}_0(z)T(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{D}(z) & 0 \end{bmatrix} \equiv \tilde{B}_0(z). \tag{16}$$

Cette relation entraîne que

$$T(z) = \begin{bmatrix} ay + bt & y \\ cy - at & t \end{bmatrix}, \tag{17}$$

où $y(z)$ et $t(z)$ sont des fonctions.

1) Supposons que $a(0) = 0$; alors ou bien $b(0) \neq 0$, $c(0) = 0$, ou bien $b(0) = 0$, $c(0) \neq 0$. Bornons-nous au premier cas. On peut poser dans ces conditions

$$t(z) = 1, \quad y(z) = 0.$$

2) Soit $a(0) \neq 0$; alors $b(0) \neq 0$, $c(0) = 0$. Posons

$$y(z) = 1, \quad t(z) = 0;$$

alors $\det T(0) \neq 0$.

La substitution $\tilde{w}(z) = T(z)v(z)$, où $T(z)$ est de la forme (17), ramène le système (15) à la forme $v' = \tilde{B}(z, \varepsilon)v$, où $\tilde{B}_0(z)$ est de la forme (16). Faisons le changement

$$v = P(z)u, \quad \xi = \xi(z),$$

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi(z) \end{bmatrix}, \quad \xi(z) = \left(\frac{3}{2}\int_0^z \sqrt{-D(t)}\,dt\right)^{2/3}. \tag{18}$$

Par hypothèse $D(z) \sim az$, $z \to 0$, $a \neq 0$, de sorte que

$$\xi(z) \sim (-D'(0))^{1/3} z, \quad z \to 0.$$

Fixons une valeur de la racine cubique ; la détermination de la fonction $\xi(z)$ ainsi obtenue sera alors holomorphe et à un feuillet au point $z = 0$, de sorte que $\xi(z)$ envoie bijectivement un petit voisinage U du point $z = 0$ sur un petit voisinage V du point $\xi = 0$. Le système devient

$$\frac{du}{d\xi} = B(\xi, \varepsilon) u, \quad B_0(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

où la matrice $B(\xi, \varepsilon)$ possède les mêmes propriétés analytiques par rapport à ξ et ε que la matrice $A(z, \varepsilon)$ par rapport à z et ε. Les solutions du système (19) sont de la forme (13), où z doit être remplacé par ξ. Indiquons la relation liant w à u:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^z \operatorname{Tr} A_0(t)\, dt\right\} \begin{bmatrix} ay+bt & \xi \\ cy-at & t\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$a = (a_{11} - a_{22})/2, \quad b = a_{12}, \quad c = a_{21}$$

et $a_{jk}(z)$ sont les éléments de la matrice $A_0(z)$. La forme des fonctions $y(z)$, $t(z)$ et $\xi(z)$ a été indiquée plus haut.

1.3. *Equation* (1). Le changement $\xi = \xi(z)$, $w = \tilde{w}/\xi'$, où $\xi(z)$ est de la forme (18), ramène l'équation (1) à la forme

$$\tilde{w}_{\xi\xi} - [\lambda^2\xi + f(\xi)]\,\tilde{w} = 0, \quad f(\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{\xi'''}{\xi'^3} - \frac{3}{4}\,\frac{\xi''^2}{\xi'^4}. \tag{21}$$

L'équation obtenue est équivalente au système de la forme (3), (4):

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \varepsilon\tilde{w}' \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^2 f(\xi) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{w}' \end{bmatrix}, \tag{22}$$

où $\varepsilon = \lambda^{-1}$. Les formules asymptotiques établies au § 1 (par exemple les formules (13), (14)) sont valables dans un petit voisinage du point de retour $z = 0$.

2. Représentation asymptotique globale des solutions. Considérons l'équation (1), où $q(z)$ est un polynôme de degré $n \geqslant 1$ pour souci de simplicité, et $z = 0$, un point de retour simple. Du point $z = 0$ sont issues trois lignes de Stokes: l_1, l_2 et l_3 ; l_2 est située à gauche de l_1 et l_3, à gauche de l_2.

Soient D un domaine canonique contenant l_1, $\partial D \supset l_2 \cup l_3$, U est un petit voisinage du point $z = 0$. La fonction $\xi = \xi(z)$

applique bijectivement le domaine D sur le secteur S dans le plan complexe, de sommet au point $\xi = 0$, d'angle $4\pi/3$, muni d'un nombre fini de coupures, images des lignes de Stokes frontières. Normalisons la fonction $\xi(z)$ avec la condition : S est le secteur $\pi/3 < \operatorname{Arg} \xi < 5\pi/3$. Les lignes l_1, l_2 et l_3 ont pour images respectives les rayons $\operatorname{Arg} \xi = \pi$, $\operatorname{Arg} \xi = 5\pi/3$ et $\operatorname{Arg} \xi = \pi/3$. Soit D_ε le domaine obtenu en retirant de D les voisinages de toutes les lignes de Stokes frontières (chap. III, § 3, n° 2.1), $\tilde{D} = D_\varepsilon \cup U$, où U est un petit voisinage du point $z = 0$.

L'équation (1) admet dans le domaine $\tilde{D}$ le système fondamental de solutions

$$w_j(z, \lambda) = w_j(\lambda^{2/3}\xi(z)) A_{jN}(z, \lambda) + \lambda^{-1/3} w_j'(\lambda^{2/3}\xi(z)) B_{jN}(z, \lambda), \quad (23)$$

où $w_1(t)$ et $w_2(t)$ sont des fonctions d'Airy-Fock (§ 1), le choix de la branche de la fonction $\xi(z)$ étant indiqué ci-dessus. Par ailleurs,

$$A_{jN}(z, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k} A_k(z) + \lambda^{-N-1} R_{jN}(z, \lambda),$$

$$B_{jN}(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^{-k} B_k(z) + \lambda^{-N-1} \tilde{R}_{jN}(z, \lambda),$$

les fonctions $A_k(z)$ et $B_k(z)$ sont les mêmes que dans (2), § 1. Pour $z \in \tilde{D}$ on a les majorations

$$|A_k(z)| \leqslant c_k (1 + |z|)^{-\alpha_k}, \quad |B_k(z)| \leqslant c_k (1 + |z|)^{-\alpha_k - (n+2)/6},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{3} + k\right).$$

Pour $z \in \tilde{D}$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 1$, les résidus admettent les majorations

$$|R_{jN}| \leqslant c_{N+1} (1 + |z|)^{-\alpha_{N+1}},$$

$$|\tilde{R}_{jN}| \leqslant c_{N+1} (1 + |z|)^{-\alpha_{N+1} - (n+2)/6}.$$

Le nombre $N \geqslant 0$ peut être arbitrairement choisi et ces développements asymptotiques peuvent être dérivés par rapport à z et à λ autant de fois qu'on le veut.

Le comportement qualitatif des solutions est le suivant. Si $z \in D$, $z \to \infty$ et $\pi < \operatorname{Arg} \xi(z) < 5\pi/3$, la solution $w_1(z, \lambda)$ décroît exponentiellement pour chaque $\lambda > 0$ fixe. Pour $z \to \infty$, $\pi/3 < \operatorname{Arg} \xi(z) < \pi$ la solution $w_1(z, \lambda)$ croît exponentiellement. Ces assertions sont valables pour la solution $w_2(z, \lambda)$ si l'on permute les secteurs indiqués.

Les développements asymptotiques (23) sont valables dans le cas aussi où $q(z)$ est une fonction entière et les conditions du § 4, chap. III, sont satisfaites.

14—01011

§ 3. Quelques équations modèles

1. Solutions de première espèce. Considérons l'équation

$$w'' - \frac{m^2}{4} z^{m-2} w = 0, \quad m > 0. \tag{1}$$

Les branches de toutes les fonctions de la forme z^α sont choisies dans le plan muni de la coupure $]-\infty, 0]$ de telle sorte que $z^\alpha > 0$ pour $z \in]0, +\infty[$. Le nombre m peut ne pas être entier.

Pour $m = 3$ cette équation est une équation d'Airy qui se présente lors de l'étude de la représentation asymptotique des solutions d'une équation du deuxième ordre au voisinage d'un point de retour simple (§ 1). Pour $m \geqslant 4$ entier, le point $z = 0$ est un point de retour d'ordre $m - 2$ pour l'équation (1) et pour $m = 1$, un point de retour d'ordre -1 et en même temps un point singulier régulier de type R_1.

L'équation (1) admet la solution

$$U(z) = \sqrt{2z/\pi}\, K_{1/m}(z^{m/2}), \tag{2}$$

où K est la fonction de Macdonald [11].

Indiquons les formules asymptotiques de la solution $U(z)$. On a

$$U(0) = \frac{2^{(2-m)/(2m)}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right). \tag{3}$$

Le terme principal de la représentation asymptotique de $U'(z)$, $z \to 0$, est égal à

$$\begin{gathered} -\frac{2^{(2-5m)/(2m)}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{1}{m} - 1\right) z^{m-1}, \quad 0 < m < 1; \\ \frac{\ln z}{(8\pi)^{1/2}}, \quad m = 1; \quad \frac{2^{-(2+m)/(2m)}}{\pi^{1/2}}, \quad m > 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Si $z \to \infty$, $|\operatorname{Arg} z| \leqslant (3-\delta)\pi/m$, alors

$$\begin{gathered} U(z) \sim z^{1/2-m/4} \exp\{-z^{m/2}\}, \\ U'(z) \sim -\frac{m}{2} z^{m/4-1/2} \exp\{-z^{m/2}\}, \end{gathered} \tag{5}$$

où δ est une constante telle que $0 < \delta < 1$.

Dans le secteur $|\operatorname{Arg} z| \leqslant 2\pi/m$ on a les majorations plus précises:

$$\begin{gathered} U(z) = z^{1/2-m/4} \exp\{-z^{m/2}\} [1 + \theta_0(z)], \\ \frac{d}{dz}(z^{m/4-1/2} U(z)) = -\frac{m}{2} z^{m/4-1/2} \exp\{-z^{m/2}\} [1 + \theta_1(z)]. \end{gathered} \tag{6}$$

Pour les résidus on a

$$|\theta_j(z)| \leqslant \theta(z^{m/2}), \quad j = 0,\ 1, \tag{7}$$

$$\theta(z) = \exp\left\{\left|\frac{\pi(4-m^2)}{8m^2 z}\right|\right\} - 1.$$

En particulier, pour $j = 0,\ 1$

$$\theta_j(z) = O(z^{-m/2}), \quad z \to \infty, \quad |\mathrm{Arg}\, z| \leqslant 2\pi/m.$$

La solution $U(x)$ décroît exponentiellement pour x réel, $x \to +\infty$, et pour $m = 3$ s'exprime au moyen de la fonction d'Airy-Fock $v(x)$ (§ 1). Toute solution de l'équation (1) non proportionnelle à $U(x)$ croît exponentiellement pour $x \to +\infty$.

2. Solutions de deuxième espèce. Les fonctions

$$U_j(z) = U(ze^{-2j\pi i/m}), \quad j = 0,\ \pm 1,\ \ldots, \tag{8}$$

sont solutions de l'équation (1) et tendent vers 0 lorsque $z \to \infty$, $z \in S_j$, où S_j est le secteur

$$(2j-1)\,\pi/m \leqslant \mathrm{Arg}\, z \leqslant (2j+1)\,\pi/m. \tag{9}$$

Les rayons $\mathrm{Arg}\, z = (2j-1)\pi/m$ sont les lignes de Stokes de l'équation (1). On a les formules asymptotiques

$$\begin{gathered} U_j(z) = \exp\left\{ij\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right\} z^{1/2-m/4} \exp\{-(ze^{-2\pi ji/m})^{m/2}\}[1+\theta_j^0(z)], \\ \frac{d}{dz}[z^{m/4-1/2}U_j(z)] = \\ = -\frac{m}{2}\exp\left\{-ij\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m}\right)\right\} z^{m/2-1/4}\exp\{-(ze^{-2\pi ji/m})^{m/2}\} \times \\ \times [1+\theta_j^1(z)] \end{gathered} \tag{10}$$

dans le secteur

$$(2j-2)\,\pi/m \leqslant \mathrm{Arg}\, z \leqslant (2j+2)\,\pi/m. \tag{11}$$

Les résidus $\theta_j^k(z)$ sont justiciables de la majoration (7).

Le wronskien d'un couple de telles solutions est égal à

$$W(U_j(z),\ U_k(z)) = im\exp\{-(j+k)\,\pi i/m\}\,\lambda_{jk}, \tag{12}$$

$$\lambda_{jk} = \frac{\sin((k-j)\,\pi/m)}{\sin(\pi/m)}.$$

Cette formule est valable pour tous les m; si $1/m$ est entier, alors

$$\lambda_{jk} = (-1)^{(k-j-1)m}\,(k-j).$$

Les solutions $U_j(z)$ et $U_k(z)$ forment un système fondamental si

1) $1/m$ est entier, $k \neq j$;

2) $1/m$ n'est pas entier, $k \neq j \pmod m$.

Si $m \geqslant 2$ est entier, il existe exactement m secteurs S_j de la forme (9) et exactement m solutions $U_j(z)$ distinctes.

3. Formules de raccordement. Tout triplet de solutions $U_j(z)$, $U_k(z)$ et $U_l(z)$ est lié par la relation

$$\sin\frac{(k-l)\pi}{m}e^{j\pi i/m}U_j(z)+\sin\frac{(l-j)\pi}{m}e^{k\pi i/m}U_k(z)+$$
$$+\sin\frac{(j-k)\pi}{m}e^{l\pi i/m}U_l(z)=0. \quad (13)$$

Signalons un cas particulier important:

$$U_j(z)=\mp e^{(k-j\pm 1)\pi i/m}\lambda_{jk}U_{k\pm 1}(z)\pm e^{(k-j)\pi i/m}\lambda_{j,\,k\pm 1}U_k(z). \quad (14)$$

Combinées aux formules (10) les formules de raccordement permettent de déterminer la représentation asymptotique de toute solution $U_j(z)$, $z\to\infty$, dans tout secteur S_j.

§ 4. Points de retour multiples et fractionnaires

1. Solutions asymptotiques formelles. Considérons l'équation

$$y''-[\lambda^2 q(x)+r(x)]\,y=0 \quad (1)$$

sur l'intervalle $I=]0,\,a]$, $a>0$. Posons les conditions:

1) La fonction $q(x)$ est réelle, $q(x)\in C^\infty(I)$, $r(x)\in C^\infty$ pour $x\in[0,\,a]$.

2) $q(x)=x^{m-2}q_1(x)$, $m>0$, la fonction $q_1(x)$ ne s'annule pas pour $x\in[0,\,a]$.

Le nombre m peut ne pas être entier. Si $m\geqslant 3$ est entier, alors $x=0$ est un point de retour d'ordre $m-3$. Généralisons cette définition à toutes les valeurs $m>0$.

Pour $x>0$ petit, l'équation (1) peut être approximativement remplacée par l'équation

$$y''-\lambda^2x^{m-2}q_1(0)\,y=0.$$

On cherchera donc une solution asymptotique formelle de l'équation (1) sous la même forme qu'au § 1, (2):

$$y=Aw(\lambda^{2/m}\xi)+\lambda^{-1+2/m}Bw'(\lambda^{2/m}\xi),$$
$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}A_n(x),\quad B=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}B_n(x), \quad (2)$$

où $\xi(x)$, $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des fonctions inconnues. Pour $w(t)$ prenons une solution de l'équation modèle (1) du § 3:

$$w'' = \frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \tag{3}$$

En portant (2) dans (1) et égalant à zéro les coefficients de w et de w', on obtient

$$\lambda^2 A \left(q - \frac{m^2}{4} \xi'^2 \xi^{m-2}\right) + \lambda \frac{m^2}{4} (2B'\xi'\xi^{m-2} + B(\xi'\xi^{m-2})') + (A'' - rA) = 0,$$

$$\lambda^2 B \left(\frac{m^2}{4} \xi'^2 \xi^{m-2} - q\right) + \lambda (2A'\xi' + A\xi'') + B'' = 0.$$

Choisissons la fonction $\xi(x)$ de telle sorte que le coefficient de $\lambda^2 A$ soit nul ; on obtient alors une équation pour $\xi(x)$. Prenons cette fonction de la forme

$$\xi(x) = \left[\int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt\right]^{2/m} \equiv (S(0, x))^{2/m}, \tag{4}$$

où $S(0, x)$ est la fonction introduite au chap. II, § 1. On a

$$\xi(x) \sim \left(\frac{2}{m} q_1(0)\right)^{1/m} x, \quad x \to +0. \tag{5}$$

Le choix de la branche de la fonction $\xi(x)$ est défini par celui de la valeur $(q_1(0))^{1/m}$. La fonction $\xi(x)$ est indéfiniment dérivable pour $0 \leqslant x \leqslant a$, la fonction $|\xi(x)|$ est strictement croissante.

Pour les fonctions $A_n(x)$ et $B_n(x)$, on obtient le système récurrentiel d'équations

$$\begin{gathered} 2\sqrt{f}(B_n\sqrt{f})' + A''_{n-1} - rA_{n-1} = 0, \\ 2\sqrt{\xi'}(A_n\sqrt{\xi'})' + B''_{n-1} - rB_{n-1} = 0, \\ f = \frac{m^2}{4} \xi'(x) \xi^{m-2}(x) = \frac{q(x)}{\xi'(x)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Ce système est du même type que celui du § 1, donc

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{c_0}{\sqrt{\xi'(x)}}, \\ A_n(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\xi'(x)}} \left[c_n + \int_0^x \frac{B''_{n-1}(t) - r(t) B_{n-1}(t)}{\sqrt{\xi'(t)}}\, dt\right], \\ B_n(x) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi'(x)}{q(x)}} \int_0^x \frac{A''_{n-1}(t) - r(t) A_{n-1}(t)}{\sqrt{q(t)}} \sqrt{\xi'(t)}\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Supposons que la fonction $q_1(z)$ est holomorphe dans un petit voisinage U du point $z = 0$, $\mathbf{R}^-$ est le demi-axe $]-\infty, 0]$. Dans le

domaine $U \setminus \mathbf{R}^-$ on choisit la branche de la fonction z^{m-2}, m non entier, strictement positive pour $z \in U$, $z > 0$. La fonction $\xi(z)$ construite ci-dessus est alors holomorphe dans $U \setminus \mathbf{R}^-$. Si m est entier, la fonction $\xi(z)$ est holomorphe dans le domaine U.

2. Solutions oscillantes. Considérons l'équation

$$y'' + [\lambda^2 x^{m-2} p(x) + q(x)]\, y = 0 \tag{8}$$

sous les conditions suivantes:

1) $m > 0$, $p(x) > 0$ pour $x \in I = [0, a]$, $a > 0$;
2) $p(x) \in C^2(I)$, $q(x) \in C^1(I)$.

Indiquons les formules asymptotiques de A. Dorodnitsyne [55]. Au lieu de $\xi(x)$ prenons la fonction

$$\omega(x) = \left(\frac{m}{2} \int_0^x \sqrt{t^{m-2} p(t)}\, dt\right)^{2/m}. \tag{9}$$

2.1. *Solutions de l'équation modèle.* L'équation

$$U'' + t^{m-2} U = 0$$

admet le système fondamental de solutions

$$\begin{aligned} U_1(t) &= m^{-1/m}\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\sqrt{t}\, J_{-1/m}\left(\frac{2}{m} t^{m/2}\right), \\ U_2(t) &= m^{-1/m}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)\sqrt{t}\, J_{1/m}\left(\frac{2}{m} t^{m/2}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Pour $m = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, prenons pour $U_1(t)$ la fonction

$$U_1(t) = -\frac{\pi n^n}{(n-1)!}\sqrt{t}\, N_n(2nt^{1/(2n)}). \tag{11}$$

Ces solutions admettent les développements en séries

$$U_2(t) = t\left[1 - \frac{t^m}{1!\, m(m+1)} + \frac{t^{2m}}{2!\, m^2(m+1)(2m+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{t^{3m}}{3!\, m^3(m+1)(2m+1)(3m+1)} + \ldots\right],$$

$$U_1(t) = 1 - \frac{t^m}{1!\, m(m-1)} + \frac{t^{2m}}{2!\, m^2(m-1)(2m-1)} -$$
$$- \frac{t^{3m}}{3!\, m^3(m-1)(2m-1)(3m-1)} + \ldots, \quad m \neq \frac{1}{n}, \tag{12}$$

$$U_1(t) = 1 + \frac{n^2}{1!\,(n-1)} t^{1/n} + \frac{n^4 t^{2/n}}{2!\,(n-1)(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n^{2(n-1)} t^{1-1/n}}{(n-1)!\,(n-1)!} + \frac{n^{2n} t}{n!\,(n-1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots - \frac{2n^{2n}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2n}\ln t + \ln n + C\right) t\left[\frac{1}{n!} - \frac{n^2}{1!\,(n-1)!} t^{1/n} + \ldots\right],$$
$$m = \frac{1}{n},$$

où C est la constante d'Euler. Pour $t \to +\infty$, on a les formules asymptotiques

$$U_1(t) = m^{(m-2)/(2m)}\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,t^{-(m-2)/4}\times$$
$$\times\left\{\cos\theta_-(t)\,[1+O(t^{-m})]+\frac{m^2-4}{16m}\,t^{-m/2}\sin\theta_-(t)\,[1+O(t^{-m})]\right\},$$
$$m\neq\frac{1}{n},\tag{13}$$
$$U_2(t) = m^{-(m-2)/(2m)}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,t^{-(m-2)/4}\left\{\sin\theta_+(t)\,[1+O(t^{-m})]-\right.$$
$$\left.-\frac{m^2-4}{16m}\,t^{-m/2}\cos\theta_+(t)\,[1+O(t^{-m})]\right\},$$

où

$$\theta_\pm(t) = \frac{2}{m}\,t^{m/2}\pm\frac{\pi(m-2)}{4m}.$$

Pour $m = 1/n$, on a

$$U_1(t) =$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}\,n^{n-1/2}}{(n-1)!}\,t^{1/2-1/(4n)}\left[\sin\left(2nt^{1/(2n)}-\frac{1}{2}\pi n-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(t^{-1/n})]+\right.$$
$$\left.+\frac{4n^2-1}{16n}\,t^{-1/(2n)}\cos\left(2nt^{1/(2n)}-\frac{1}{2}\pi n-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(t^{-1/n})]\right].\tag{14}$$

Notons

$$Y_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\,U_j(\lambda^{2/m}\omega(x)),\tag{15}$$
$$U = \sqrt{U_1^2+U_2^2},\quad Y' = \sqrt{Y_1'^2+Y_2'^2},$$
$$f(x) = q(x)+\sqrt{\omega'(x)}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}.\tag{16}$$

2.2. *Méthode de recherche.* En posant $y(x) = Y_j(x) + u_j(x)$, on obtient pour $u_j(x)$ l'équation intégrale

$$u_j(x) = \lambda^{-2/m}\int_0^x K(x,\tau)\,Y_j(\tau)\,d\tau+\lambda^{-2/m}\int_0^x K(x,\tau)\,u_j(\tau)\,d\tau,\quad j=1,2,$$

dont le noyau est de la forme

$$K(x,\tau) = f(\tau)\,[Y_1(x)\,Y_2(\tau)-Y_1(\tau)\,Y_2(x)].$$

De la représentation asymptotique des fonctions $U_1(t)$ et $U_2(t)$ il s'ensuit que ces fonctions sont bornées sur le demi-axe $0 \leqslant t < \infty$ pour $m \geqslant 2$ et cette équation intégrale peut être résolue par la méthode des approximations successives. Si $0 < m < 2$, les fonctions $U_1(t)$ et $U_2(t)$ ne sont pas bornées sur $0 \leqslant t < \infty$, par contre, les fonctions $\lambda^{(m-2)/(2m)} U_{1,\,2}(\lambda^{2/m}\omega(x))$ le sont pour $\lambda > 0$, $x \geqslant 0$. Dans ce cas aussi l'équation intégrale s'intègre par la méthode des approximations successives.

Dans les premières approximations interviennent les intégrales

$$Y_{jk}(x) = \int_0^x U_j(t)\, U_k(t)\, dt. \tag{17}$$

Les formules asymptotiques des solutions dépendent essentiellement de la convergence de ces intégrales pour $x > 0$ et de la finitude ou l'infinitude des quantités $Y_{jk}(+\infty)$. On distingue cinq cas: 1) $m > 4$; 2) $m = 4$; 3) $2 \leqslant m < 4$; 4) $1 < m \leqslant 2$; 5) $0 < m \leqslant 1$.

2.3. $m > 4$. L'équation (8) admet un système fondamental de la forme

$$y_j(x) = Y_j(x) + \lambda^{-4/m} \left\{ \frac{f(x)}{[\omega'(x)]^2} [Y_1(t) V_{j2}(t) - Y_2(t) V_{j1}(t)] + \right.$$
$$\left. + \frac{f(0)}{[\omega'(0)]^2} [C_{j2} Y_1(t) - C_{j1} Y_2(t)] \right\} + o(\lambda^{-4/m} U(t)), \tag{18}$$

où

$$t = \lambda^{2/m}\omega(x), \quad V_{jk}(t) = Y_{jk}(t) - Y_{jk}(\infty), \quad C_{jk} = Y_{jk}(\infty),$$

$$C_{11} = \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m}\, m^{-(m-2)/m} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-3}{m}\right)}, \tag{19}$$

$$C_{12} = C_{21} = \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m}\, m^{-2(m-2)/m} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-3}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)},$$

$$C_{22} = m^{(3m-4)/m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{3}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-4}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m-2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}.$$

On a des formules analogues pour y_j': il faut remplacer Y_j par Y_j' dans (18) et U par Y' dans le résidu.

2.4. $2 \leqslant m < 4$. La représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions s'écrit alors

$$y_j(x) = Y_j(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{p(t)}} [C_{j1} Y_1(x) + C_{j2} Y_2(x)] +$$
$$+ O[\lambda^{-4/m} U(\lambda^{2/m} \omega(x))], \quad j = 1, 2, \quad (20)$$
$$C_{11} = -C_{22} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{m},$$
$$C_{12} = -\frac{1}{2\pi} m^{-(m-2)/m} \Gamma^2 \left(\frac{m-1}{m}\right),$$
$$C_{21} = \frac{1}{2\pi} m^{-(m-2)/m} \Gamma^2 \left(\frac{1}{m}\right).$$

Les formules asymptotiques de y_j' se déduisent des formules (20) par substitution de Y_j' à Y_j et de Y' à U dans le résidu.

2.5. $1 < m \leqslant 2$. Les formules asymptotiques (19) restent alors en vigueur sauf que le résidu est de la forme $O(\lambda^{-2} U(\lambda^{2/m} \omega(x)))$ et $O(\lambda^{-2} Y'(x))$ respectivement pour les solutions et leurs dérivées.

2.6. $0 < m \leqslant 1$. Dans ce cas

$$y_1(x) = Y_1(x) + O(\lambda^{-1} U(\lambda^{2/m} \omega(x))). \quad (21)$$

La solution $y_2(x)$ est justiciable des mêmes formules qu'au n° 2.5 si $1/m$ n'est pas entier. Si $m = 1/n$, $n \geqslant 1$, est entier, on a

$$y_2(x) = Y_2(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{(n!)^2}{2\pi n^{2n-1}} Y_1(x) \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{p(t)}} + O(\lambda^{-2} U(\lambda^{2n} \omega(x))). \quad (22)$$

2.7. $m = 4$. Dans ce cas les intégrales $Y_{jk}(t)$ divergent aussi bien pour $t = 0$ que pour $t \to \infty$, ce qui conduit à une complication des formules asymptotiques [55]. Au n° 3 on donne une autre version de ces formules.

Si les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ sont indéfiniment dérivables pour $x \in I$, la méthode développée au n° 2.2 nous permet de trouver les séries asymptotiques des solutions (2).

3. Valeurs entières de $m \geqslant 1$ [107, 109].

3.1. *Equations modèles et leurs solutions.* Il existe trois variantes.

I. $m > 0$ est pair et l'équation modèle est de la forme

$$w'' = \frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \quad (23)$$

II. $m > 0$ est pair et l'équation modèle est de la forme

$$w'' = -\frac{m^2}{4} t^{m-2} w. \qquad (24)$$

III. $m > 0$ est impair et l'équation modèle est de la forme (23).

Traitons ces cas plus en détail.

I. L'équation modèle (23) admet le système fondamental de solutions $\{U_m(t),\ U_m(-t)\}$, où

$$U_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\, K_{1/m}(t^{m/2}), \quad t > 0, \qquad (25)$$

K est la fonction de Macdonald. Le wronskien de ces solutions est égal à

$$W(U_m(t),\ U_m(-t)) = m \operatorname{cosec} \pi/m.$$

Cas particuliers:

$$U_2(t) = e^{-t}, \quad U_4(t) = \sqrt{2}\, U(0,\ 2t),$$

où $U(a, t)$ est la fonction du cylindre parabolique (ou fonction de Weber). Pour $t = 0$ on a

$$U_m(0) = \pi^{-1/2} 2^{(2-m)/(2m)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$U_m'(0) = \pi^{-1/2} 2^{-(2+m)/(2m)} \Gamma\left(-\frac{1}{m}\right).$$

Pour $t \to +\infty$ la fonction $U_m(t)$ décroît exponentiellement:

$$U_m(t) \sim t^{(2-m)/4} e^{-t^{m/2}}.$$

Pour $t < 0$, on a

$$U_m(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}} \left[\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} I_{1/m}(|t|^{m/2}) + K_{1/m}(|t|^{m/2})\right], \qquad (26)$$

où $I_{1/m}$ est une fonction de Bessel d'un argument imaginaire et la fonction $U_m(t)$ croît exponentiellement lorsque $t \to -\infty$:

$$U_m(t) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{m} |t|^{(2-m)/4} \exp\{|t|^{m/2}\} [1 + O(t^{-m/2})].$$

II. L'équation modèle (24) admet le système fondamental de solutions $\{W_m(t),\ W_m(-t)\}$, où

$$W_m(t) = -\sqrt{\frac{\pi t}{2}} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(t^{m/2}) + Y_{1/m}(t^{m/2})\right], \quad t > 0,$$
$$W_m(t) = \sqrt{\frac{\pi |t|}{2}} \left[\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2m} J_{1/m}(|t|^{m/2}) - Y_{1/m}(|t|^{m/2})\right], \quad t < 0, \qquad (27)$$

$Y_{1/m}$ est la fonction de Neumann. Le wronskien de ces solutions est

$$W\left(W_m(t),\ W_m(-t)\right) = \frac{m}{\cos \pi/m}.$$

Cas particuliers:

$$W_2(t) = \sqrt{2}\cos(t+\pi/4), \quad W_4(t) = 2^{3/4}W(0,\ 2t),$$

où $W(a,\ t)$ est une modification de la fonction du cylindre parabolique. La solution $W_m(t)$ oscille pour $t \to \pm\infty$:

$$W_m(t) = \frac{t^{(2-m)/4}}{\cos \pi/(2m)}\left[\cos\left(t^{m/2}+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(t^{-m/2}\right)\right], \qquad t \to +\infty,$$

$$W_m(t) = \frac{|t|^{(2-m)/4}}{\sin \pi/(2m)}\left[\cos\left(|t|^{m/2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(t^{-m/2}\right)\right], \quad t \to -\infty.$$

Estimons le système fondamental de solutions. Soit $t = q_m$ la plus petite racine strictement positive de l'équation

$$W_m(t) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}\, W_m(-t).$$

Introduisons une fonction de poids $E_m(t)$ égale à

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\pi/(2m)}, \quad t \geqslant q_m; \quad \sqrt{\operatorname{tg}\pi/(2m)}, \quad t \leqslant -q_m; \\ \sqrt{\frac{W_m(-t)}{W_m(t)}}, \quad -q_m \leqslant t \leqslant q_m. \tag{28}$$

Les fonctions $W_m(t)$, $W_m(-t)$ ne présentent pas de zéros sur l'intervalle $[-q_m,\ q_m]$, de sorte que $E_m(t)$ est une fonction croissante continue sur l'axe tout entier, $E_m(-t) = E^{-1}(t)$. Introduisons les fonctions paires strictement positives $M_m(t)$ et $N_m(t)$ au moyen desquelles s'expriment les modules des solutions du système fondamental et de leurs dérivées:

$$W_m(t) = E_m^{-1}(t)\, M_m(t) \sin\theta_m(t), \\ W_m'(t) = E_m^{-1}(t)\, N_m(t) \sin\omega_m(t). \tag{29}$$

Pour $t \to \pm\infty$

$$M_m(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\sin\frac{\pi}{m}}}\,|t|^{(2-m)/4}, \quad N_m(t) \sim m\sqrt{\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{m}}}\,|t|^{(m-2)/4}. \tag{30}$$

III. L'équation modèle (23) admet le système fondamental de solutions $\{V_m(t),\ \overline{V}_m(t)\}$, où

$$V_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\, K_{1/m}\left(t^{m/2}\right), \\ \overline{V}_m(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}} I_{1/m}\left(t^{m/2}\right)+K_{1/m}\left(t^{m/2}\right)\right], \quad t > 0. \tag{31}$$

Le wronskien de ces solutions est égal à $m/\sin \pi/m$. On a $V_m(0) = \pi^{-1/2}2^{(2-m)/(2m)}\Gamma(1/m)$, $V'_m(0) = \pi^{-1/2}2^{-(2+m)/(2m)}\Gamma(-1/m)$, $\overline{V}_m(0) = V_m(0)$, $\overline{V}'_m(0) = -V_m(0)$. Pour $m = 3$ ces solutions s'expriment au moyen des fonctions d'Airy:

$$V_3(t) = 2^{5/6}3^{1/6}\pi^{1/2}\mathrm{Ai}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}t\right),$$
$$\overline{V}_3(t) = 2^{5/6}3^{-1/3}\pi^{1/2}\mathrm{Bi}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}t\right).$$

Pour $t \geqslant 0$ les fonctions $V_m(t)$ et $\overline{V}_m(t)$ sont strictement positives, $V_m(t)$ strictement décroissante, $\overline{V}_m(t)$ strictement croissante et

$$V_m(t) = t^{(2-m)/4}e^{-t^{m/2}}[1 + O(t^{-m/2})],$$
$$\overline{V}_m(t) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{m}}t^{(2-m)/4}e^{t^{m/2}}[1 + O(t^{-m/2})]$$

lorsque $t \to +\infty$. Pour $t < 0$ on a

$$\begin{aligned} V_m(t) &= \sqrt{\frac{\pi|t|}{2}}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2m}J_{1/m}(|t|^{m/2}) - Y_{1/m}(|t|^{m/2})\right], \\ \overline{V}_m(t) &= -\sqrt{\frac{\pi|t|}{2}}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}J_{1/m}(|t|^{m/2}) + Y_{1/m}(|t|^{m/2})\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Ces deux solutions oscillent pour $t \to -\infty$ avec un décalage de phase de $\pi/2$:

$$V_m(t) = \frac{1}{\sin\pi/(2m)}|t|^{(2-m)/4}\left[\cos\left(|t|^{m/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-m/2})\right],$$
$$\overline{V}_m(t) = \frac{1}{\cos\pi/(2m)}|t|^{(2-m)/4}\left[\cos\left(|t|^{m/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-m/2})\right].$$

Supposons que $t = -q_m$ est la plus petite racine en module de l'équation

$$\overline{V}_m(t) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}V_m(t).$$

Considérons la fonction de poids

$$E_m(t) = \begin{cases} \sqrt{\overline{V}_m(t)/V_m(t)}, & t \geqslant -q_m, \\ \sqrt{\operatorname{tg}\pi/(2m)}, & t \leqslant -q_m. \end{cases} \tag{33}$$

Cette fonction est strictement positive, continue sur l'axe tout entier et croissante. Introduisons les fonctions $M_m(t)$ et $N_m(t)$ par des formules analogues à (29):

$$\begin{aligned} V_m(t) &= E_m^{-1}(t)M_m(t)\sin\theta_m(t), & \overline{V}_m(t) &= E_m(t)M_m(t)\cos\theta_m(t), \\ V'_m(t) &= E_m^{-1}(t)N_m(t)\sin\omega_m(t), & \overline{V}'_m(t) &= E_m(t)N_m(t)\sin\omega_m(t). \end{aligned} \tag{34}$$

Lorsque $|t| \to \infty$ les fonctions M_m et N_m sont justiciables des formules asymptotiques (30) dans lesquelles il faut remplacer t par $|t|$. Indiquons les valeurs approchées de q_m: $q_2 = 0{,}000$, $q_3 = 0{,}279$, $q_4 = 0{,}431$, $q_5 = 0{,}528$, $q_6 = 0{,}596$.

3.2. *Fonctions auxiliaires.* Considérons l'équation

$$w'' = [\lambda^2 f(x, \lambda) + g(x, \lambda)]\, w \tag{35}$$

sur un intervalle fini ou infini $I =]a_1, a_2[$, $0 \in I$, où $\lambda > 0$ est un paramètre. Posons les conditions:

1) La fonction $x^{-2+m} f(x, \lambda)$ est réelle pour λ réel, ne s'annule pas sur I et appartient à la classe $C^2(I)$ pour tout $\lambda > 0$ fixe.

2) La fonction $g(x, \lambda)$ est continue sur I pour tout $\lambda > 0$ fixe.

Posons

$$\begin{aligned} \xi(x, \lambda) &= -\Big(\int_x^0 \sqrt{|f(t, \lambda)|}\, dt\Big)^{2/m}, \quad x \leqslant 0, \\ \xi(x, \lambda) &= \Big(\int_0^x \sqrt{|f(t, \lambda)|}\, dt\Big)^{2/m}, \quad x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{36}$$

La fonction $\xi(x, \lambda)$ est strictement croissante en x et appartient à $C^2(I)$. Introduisons les fonctions

$$\tilde{f}(x, \lambda) = \frac{4}{m^2} |f(x, \lambda)|\, |\xi|^{2-m}, \quad \Omega_m(t) = 1 + |t|^{(m-2)/2} \tag{37}$$

et la fonction de contrôle d'erreur

$$H_m(x, \lambda) = \int \left[\frac{1}{\tilde{f}^{1/4}(x, \lambda)} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\tilde{f}^{1/4}(x, \lambda)} - \frac{g(x, \lambda)}{\tilde{f}^{1/2}(x, \lambda)} \right] \frac{dx}{\Omega_m(\lambda^{2/m}\xi)}, \tag{38}$$

où les limites d'intégration ne sont pas essentielles. Pour l'équation (23), on a

$$f(x, \lambda) = \frac{m^2}{4} x^{m-2}, \quad g(x, \lambda) \equiv 0, \quad \xi = x,$$

$$\tilde{f}(x, \lambda) \equiv 1, \quad H_m(x, \lambda) \equiv 0.$$

3.3. *Représentation asymptotique des solutions de l'équation* (35) *dans le cas* I. Supposons que m est pair et que la fonction $f(x, \lambda)\, x^{2-m}$ est strictement positive sur I. L'équation (35) admet alors les solutions

$$\begin{aligned} w_1(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\, [U_m(-\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_1(x, \lambda)], \\ w_2(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\, [U_m(\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_2(x, \lambda)]. \end{aligned} \tag{39}$$

La fonction U_m est définie par les formules (25) et (26) et pour $x \in I$, $\lambda > 0$, on a les majorations

$$\frac{|\varepsilon_1|}{U_m(-\lambda^{2/m}\xi)}, \frac{|\partial\varepsilon_1/\partial x|}{\mu_m\left|\frac{\partial}{\partial x}U_m(-\lambda^{2/m}\xi)\right|} \leqslant \exp\left\{\frac{\lambda_m}{\lambda^{2/m}}V_{a_1,x}(H_m)\right\} - 1. \quad (40)$$

Les constantes λ_m et μ_m sont égales à

$$\lambda_m = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left[\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{m}\Omega_m(t)U_m(t)U_m(-t)\right],$$
$$\mu_m = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left[\frac{m}{\sin\frac{\pi}{m}}\frac{1}{|U'_m(t)|U_m(-t)}\right], \quad (41)$$

et $V_{a,b}(H_m)$ est la variation de la fonction H_m sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire que

$$V_{a,b}(H_m) = \int_a^b |H'_m(x)|\,dx. \quad (42)$$

Les majorations (40) sont valables pour $|\varepsilon_2|$ et $|\partial\varepsilon_2/\partial x|$ à condition de changer $U_m(-t)$ en $U_m(t)$ et $V_{a_1,x}$ en V_{x,a_2}.

3.4. *Représentation asymptotique des solutions de l'équation* (35) *dans le cas* II. Supposons que m est pair et que la fonction $f(x)x^{2-m}$ est négative pour $x \in I$. L'équation (35) admet les solutions

$$w_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\,[W_m(\mp\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_{1,2}(x, \lambda)]. \quad (43)$$

La fonction $\xi(x, \lambda)$ est définie par les formules (27) et pour $x \in I$, $\lambda > 0$, on a les majorations

$$\frac{|\varepsilon_j(x,\lambda)|}{M_m(\lambda^{2/m}\xi)}, \frac{|\partial\varepsilon_j(x,\lambda)/\partial x|}{\lambda^{2/m}\tilde{f}^{1/2}(x,\lambda)N_m(\lambda^{2/m}\xi)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sigma_m}{\rho_m}E_m^{\pm 1}(\lambda^{2/m}\xi)\left[\exp\left\{\frac{\rho_m}{\lambda^{2/m}}|V_{a_j,x}(H_m)|\right\} - 1\right], \quad (44)$$

où le signe plus est pris pour $j = 1$. Les constantes σ_m et ρ_m sont égales à

$$\rho_m = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left[\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{m}\Omega_m(t)M_m^2(t)\right],$$
$$\sigma_m = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left[\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{m}\Omega_m(t)|W_m(t)|E_m(t)M_m(t)\right]. \quad (45)$$

Remarquons que $\sigma_m \leqslant \rho_m$, de sorte que dans les majorations (44) le rapport σ_m/ρ_m peut être remplacé par l'unité.

3.5. *Représentation asymptotique des solutions de l'équation* (35) *dans le cas* III. Supposons que m est impair et que la fonction $f(x)\, x^{2-m}$ est strictement positive pour $x \in I$. L'équation (35) admet alors les solutions

$$\begin{aligned} w_1(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\, [\overline{V}_m(\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_1(x, \lambda)], \\ w_2(x, \lambda) &= \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\, [V_m(\lambda^{2/m}\xi) + \varepsilon_2(x, \lambda)]. \end{aligned} \tag{46}$$

Les fonctions V_m et $\overline{V}_m$ sont définies par les formules (31) et (32) et pour $x \in I$, $\lambda > 0$, on a les majorations

$$\frac{|\varepsilon_j(x, \lambda)|}{M_m(\lambda^{2/m}\xi)}, \quad \frac{|\partial\varepsilon_j(x, \lambda)/\partial x|}{\lambda^{2/m}\tilde{f}^{1/2}(x, \lambda) N_m(\lambda^{2/m}\xi)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_{m,j}}{\rho_m} E_m^{\pm 1}(\lambda^{2/m}\xi) \left[\exp\left\{\frac{\rho_m}{\lambda^{2/m}} |V_{a_j, x}(H_m)|\right\} - 1\right], \tag{47}$$

où ρ_m est de la forme (45)

$$\begin{aligned} \sigma_{m1} &= \sup_{t \in \mathbf{R}} \left[\frac{1}{m} \sin\frac{\pi}{m}\, \Omega_m(t)\, |\overline{V}_m(t)|\, E_m^{-1}(t)\, M_m(t)\right], \\ \sigma_{m2} &= \sup_{t \in \mathbf{R}} \left[\frac{1}{m} \sin\frac{\pi}{m}\, \Omega_m(t)\, |V_m(t)|\, E_m(t)\, M_m(t)\right], \end{aligned} \tag{48}$$

où E_m et E_m^{-1} correspondent à $\overline{V}_m$ et V_m. Comme $\sigma_{mj}/\rho_j \leqslant 1$, ces rapports peuvent être remplacés par l'unité.

Les majorations précédentes des résidus ε_j et $\partial\varepsilon_j/\partial x$ sont valables dans une situation plus générale, mais elles sont assez volumineuses. Elles généralisent les estimations WKB (chap. II, § 2). Comme au chap. II, de ces estimations générales on peut déduire des estimations plus simples en imposant des conditions auxiliaires à la dépendance des fonctions f et g par rapport à λ.

3.6. *Estimations asymptotiques des résidus.* Considérons l'équation

$$y'' - [\lambda^2 f(x) + g(x, \lambda)]\, y = 0 \tag{49}$$

sous les conditions suivantes:

1) La fonction $f(x)/x^{m-2}$ est réelle, ne s'annule pas sur I et appartient à la classe $C^2(I)$, la fonction $g(x, \lambda)$ est de classe $C(I)$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$.

2) Les intégrales

$$\int^{a_j} (|f'|^2 |f|^{-5/2} + |f''|\, |f|^{-3/2})\, dx$$

convergent.

Cette condition est confondue avec la condition de validité de l'approximation WKB (chap. II, § 3).

3) Pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ et pour un $\delta > 0$, on a

$$\int_{|x|>\delta} |g(x, \lambda)|\, |f(x)|^{-1/2}\, dx \leqslant c\lambda^{\omega}.$$

Si $J \subset I$ est un intervalle fini, il vient

$$|g(x, \lambda)|\, |f(x)|^{-1/2} \leqslant c\lambda^{\omega}.$$

Cette condition est satisfaite, par exemple, si $g(x, \lambda) = \lambda^{\omega} h(x)$ et si converge l'intégrale

$$\int_{|x|>\delta} |g(x)|\, |f(x)|^{-1/2}\, dx.$$

Posons $\omega_0 = \max(\omega, 0)$; la variation $V_{a_1, a_2}(H_m)$ admet les ordres suivants pour $\lambda \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &O(\lambda^{\omega_0 - 1 + 2/m}), && m = 2, 3, \\ &O(\lambda^{\omega_0 - 1/2} \ln \lambda), && m = 4, \\ &O(\lambda^{\omega_0 - 4/m}), && m > 4. \end{aligned} \tag{50}$$

Combiné aux majorations ci-dessus, ceci permet d'améliorer les estimations des résidus. Dans le cas I par exemple, les rapports

$$\varepsilon_1(x, \lambda)/U_m(-\lambda^{2/m}\xi), \quad \varepsilon_2(x, \lambda)/U_m(\lambda^{2/m}\xi)$$

admettent pour $\lambda \to +\infty$ les ordres suivants uniformes en $x \in I$:

$$\begin{aligned} &O(\lambda^{\omega_0 - 1}), && m = 2, 3, \\ &O(\lambda^{\omega_0 - 1} \ln \lambda), && m = 4, \\ &O(\lambda^{\omega_0 - 4/m}), && m > 4. \end{aligned} \tag{51}$$

3.7. *Formules de raccordement.* Supposons que les conditions 1) à 3) du n° 3.6 sont satisfaites et que les intégrales

$$\int^{a_j} |f(x)|\, dx, \quad j = 1, 2,$$

divergent. Sur les intervalles $J_1 =]a_1, -\delta[$, $J_2 =]\delta, a_2[$, où $\delta > 0$, l'équation (49) admet alors des solutions de type WKB. Indiquons les formules de raccordement de ces solutions. On admet que $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$.

I. L'équation (49) a pour solutions

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) \sim f^{-1/4}(x) \exp\left\{-\lambda \int_x^0 f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \qquad x \to a_1,$$
$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \sim f^{-1/4}(x) \exp\left\{-\lambda \int_0^x f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \qquad x \to a_2. \tag{52}$$

Ces solutions décroissent exponentiellement respectivement pour $x \to a_1$ et $x \to a_2$ et sont définies de façon unique par leurs représentations asymptotiques. La comparaison des représentations asymptotiques des solutions w_2 et $\tilde{w}_2$ lorsque $x \to a_2$ montre que

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \equiv \sqrt{\frac{2}{m}}\, \lambda^{(m-2)/m} w_2(x, \lambda),$$

une identité analogue relie les solutions w_1 et $\tilde{w}_1$. La représentation asymptotique des solutions w_1 et w_2 étant connue, il vient

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) \sim \frac{1+k_1}{\sin\frac{\pi}{m}} f^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda \int_0^x f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \qquad x \to a_2,$$
$$\tilde{w}_2(x, \lambda) = \frac{1+k_2}{\sin\frac{\pi}{m}} f^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda \int_x^0 f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \qquad x \to a_1. \tag{53}$$

Pour les résidus k_1 et k_2, on a les estimations (51).

II. L'équation (49) possède des solutions qui sont définies de façon unique par leurs représentations asymptotiques:

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) = |f(x)|^{-1/4}\left[\cos\left(\lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2}\, dt + \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right], \qquad x \to a_1,$$
$$\tilde{w}_2(x, \lambda) = |f(x)|^{-1/4}\left[\cos\left(\lambda \int_0^x |f(t)|^{1/2}\, dt + \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right], \qquad x \to a_2.$$

Aux extrémités « opposées » de l'intervalle, on a

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) = (1+\gamma_1) \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2m} |f(x)|^{-1/4} \times$$
$$\times \left[\cos\left(\lambda \int_0^x |f(t)|^{1/2}\, dt - \frac{\pi}{4} + \delta_1\right) + o(1)\right], \qquad x \to a_2,$$

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) = (1+\gamma_2) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2m} |f(x)|^{-1/4} \times$$
$$\times \left[\cos\left(\lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} + \delta_2\right) + o(1)\right], \quad x \to a_1.$$

Les estimations des résidus sont les mêmes.

III. Dans ce cas il existe un système fondamental de solutions de la forme

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) = |f(x)|^{-1/4} \left[\cos\left(\lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt + \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right], \quad x \to a_1,$$

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) \sim \frac{1}{2}(1+k) \frac{f^{-1/4}(x)}{\sin \pi/(2m)} \exp\left\{\lambda \int_0^x f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \quad x \to a_2,$$

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \sim f^{-1/4}(x) \exp\left\{-\lambda \int_0^x f^{1/2}(t)\, dt\right\}, \quad x \to a_2,$$

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) = \frac{1+k}{\sin \pi/(2m)} |f(x)|^{-1/4} \times$$
$$\times \left[\cos\left(\lambda \int_x^0 |f(t)|^{1/2} dt - \frac{\pi}{4} + \delta\right) + o(1)\right], \quad x \to a_1.$$

Les estimations des résidus sont données par la formule (51).

§ 5. Confluence d'un point de retour et d'un point singulier régulier

1. Transformation de l'équation. Considérons l'équation

$$w'' - \left[\lambda^2 x^{\mu-2} f(x, \lambda) + \frac{g(x, \lambda)}{x^2}\right] w = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle fini ou infini $I = [0, a[$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre. Posons les conditions suivantes pour $x \in I$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$:

1) Les fonctions $f(x, \lambda)$ et $g(x, \lambda)$ sont réelles, la fonction $f(x, \lambda)$ ne s'annule pas.

2) Les fonctions $f''_{xx}(x, \lambda)$ et $g(x, \lambda)$ sont continues.

On admet que $\mu > 0$. Le nombre a et le paramètre μ peuvent dépendre de λ.

Dans ce cas le point $x = 0$ est un point de retour d'ordre $\mu - 2$ (éventuellement non entier) et un pôle d'ordre deux pour le coefficient de w, c'est-à-dire un point singulier régulier de l'équation (1).

La représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions s'exprime au moyen des fonctions de Bessel. Considérons les deux cas suivants.

I. $f(x, \lambda) > 0$ pour $x \in I$.

II. $f(x, \lambda) < 0$ pour $x \in I$.

La transformation de Liouville (chap. II, § 1)

$$w = \tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\, W(\zeta), \quad \tilde{f}(x, \lambda) = \frac{x^{\mu-2}\,|f(x, \lambda)|}{\zeta^{\mu-2}}, \tag{2}$$

$$\zeta = \left(\int_0^x t^{(\mu-2)/2}\sqrt{|f(t, \lambda)|}\, dt\right)^{2/\mu}$$

ramène l'équation (1) à la forme

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} = \left[\pm \frac{1}{4}\mu^2\lambda^2\zeta^{\mu-2} + \frac{\varphi(\zeta, \lambda)}{\zeta^2}\right] W, \tag{3}$$

où le signe plus (resp. moins) est pris dans le cas I (resp. II),

$$\varphi(\zeta, \lambda) = \frac{\mu^2\zeta^2 g(x, \lambda)}{4x^2\tilde{f}(x, \lambda)} + \zeta^2\tilde{f}^{-1/4}(x, \lambda)\frac{d^2}{d\zeta^2}\tilde{f}^{1/4}(x, \lambda). \tag{4}$$

L'intervalle I s'applique bijectivement sur l'intervalle $J = [0, \beta[$, $\beta > 0$. De plus, la fonction ζ/x est strictement positive et appartient à la classe $C^2(J)$, $\varphi(\zeta, \lambda) \in C(J)$.

Introduisons le paramètre ν à l'aide de la formule

$$\frac{1}{4}(\mu^2\nu^2 - 1) = \varphi(0, \lambda) \tag{5}$$

et écrivons l'équation (3) sous la forme

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} = \left(\pm \frac{\mu^2\lambda^2}{4}\zeta^{\mu-2} + \frac{\mu^2\nu^2 - 1}{4\zeta^2} + \frac{\psi(\zeta, \lambda)}{\zeta}\right) W. \tag{6}$$

2. Cas I. On prend le signe plus dans l'équation (6). Prenons l'équation modèle de la forme

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} = \left(\frac{\mu^2\lambda^2}{4}\zeta^{\mu-2} + \frac{\mu^2\nu^2 - 1}{4\zeta^2}\right) W. \tag{7}$$

Un système fondamental de solutions de cette équation est formé par les fonctions de Bessel $\zeta^{1/2} I_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})$, $\zeta^{1/2}K_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})$. On admettra que $\nu \geqslant 0$ (c'est-à-dire que $\varphi(0, \lambda) \geqslant -1/4$). Indiquons les formules asymptotiques de ces fonctions:

$$I_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \qquad K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}, \qquad x \to +\infty,$$

$$I_\nu(x) \sim \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \qquad K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \to +0, \quad \nu > 0,$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^4), \quad K_0(x) \sim -\ln x, \qquad x \to +0.$$

Le wronskien de ces solutions est égal à

$$W(K_\nu(x),\ I_\nu(x)) = 1/x.$$

Le système fondamental de solutions de l'équation (6) admet des majorations asymptotiques du même type qu'au § 4, n° 3.3. On se bornera à donner les majorations de ce système sous des conditions plus fortes. Supposons que $\nu \geqslant 0$, $\beta = +\infty$, la fonction $\psi(\zeta)$ ne dépend pas de λ et que sont satisfaites les conditions:

1) $\psi(\zeta)$ est continue pour $0 < \zeta < \infty$;

2) $\psi(\zeta) = O(\zeta^{\rho-1})$, $\zeta \to +0$, $\rho > 0$;

3) $\int^{+\infty} \zeta^{-\mu/2} |\psi(\zeta)|\, d\zeta < \infty$.

L'équation (6) admet alors un système fondamental de solutions de la forme

$$\begin{aligned} W_1(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} I_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})(1+\varepsilon_1), \\ W_2(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2} K_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})(1+\varepsilon_2), \end{aligned} \tag{8}$$

où ε_1 et ε_2 ont pour ordres respectifs

$$O(\lambda^{-1}),\quad \mu < 2\rho;\quad O(\lambda^{-1}\ln\lambda),\quad \mu = 2\rho;\quad O(\lambda^{-2\rho/\mu}),\quad \mu > 2\rho. \tag{9}$$

Ces résultats sont valables aussi pour $\beta < \infty$.

3. Cas II. On prend le signe moins dans l'équation (6) et l'équation modèle est de la forme

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} = \left(-\frac{\mu^2\lambda^2}{4}\zeta^{\mu-2} + \frac{\mu^2\nu^2-1}{4\zeta^2}\right) W. \tag{10}$$

Avec les mêmes conditions que plus haut sur la fonction $\psi = \psi(\zeta)$, l'équation (6) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$\begin{aligned} W_1(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2}[J_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2}) + \varepsilon_1(\zeta, \lambda)], \\ W_2(\zeta, \lambda) &= \zeta^{1/2}[Y_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2}) + \varepsilon_2(\zeta, \lambda)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Dans ce cas les majorations se compliquent, car les fonctions $J_\nu(x)$ et $Y_\nu(x)$ présentent une infinité de zéros sur le demi-axe $x > 0$. Faisons usage de la représentation

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= E_\nu^{-1}(x)\, M_\nu(x) \cos\theta_\nu(x), \\ Y_\nu(x) &= E_\nu(x)\, M_\nu(x) \sin\theta_\nu(x), \end{aligned}$$

où E et M sont des fonctions strictement positives. Les quantités

$$\frac{\varepsilon_1(\zeta,\lambda)}{E_\nu^{-1}(\lambda\zeta^{\mu/2})\,M_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})},\quad \frac{\varepsilon_2(\zeta,\lambda)}{E_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})\,M_\nu(\lambda\zeta^{\mu/2})}$$

admettent l'ordre (9) pour $\lambda\to+\infty$. Dans les cas I et II on a des majorations analogues pour les dérivées des solutions [108].

§ 6. Point de retour multiple. Cas complexe

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$w'' - [\lambda^2 f(z) + g(z)]\,w = 0 \tag{1}$$

dans un domaine D (éventuellement non borné) du plan de la variable complexe z. Ici $\lambda > 0$ est un grand paramètre, le domaine D contient le point $z = 0$. Posons les conditions:

1) Les fonctions $z^{2-m} f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans D et de plus la première n'y présente pas de zéros.

2) $g(z) = O(z^{\gamma-1})$, $z\to 0$, où $\gamma > 0$. Le nombre $m \geqslant 0$ peut ne pas être entier, de sorte que $z = 0$ peut être un point de branchement des fonctions f et g.

Introduisons les fonctions

$$S(z) = \int_0^z \sqrt{f(t)}\,dt,\quad \zeta(z) = S^{2/m}(z). \tag{2}$$

Pour les petits $|z|$

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots,\quad f_0 \neq 0,$$
$$\zeta(z) = \left(\frac{2}{m}\right)^{2/m} f_0^{1/m} z\left[1 + \frac{z}{m+2}\,\frac{f_1}{f_0} + \ldots\right],$$

de sorte qu'on peut envisager une détermination de la fonction $\zeta(z)$ qui est holomorphe au point $z = 0$. Posons encore une condition:

3) La fonction $\zeta(z)$ est à un feuillet dans le domaine D.

Soient S_j les secteurs du plan de z complexe envisagés au § 3. Désignons par Δ l'image du domaine D par l'application $\zeta = \zeta(z)$ et par D_j la contre-image de $\Delta \cap S_j$. Les domaines D_j sont tous simplement connexes.

Exemple. Soient $f(z) = z^2(1-z)^6$ et D le plan de z muni de la coupure $l = [1, +\infty[$; alors

$$\zeta(z) = \frac{z}{\sqrt{2}\,(1-z)}$$

et Δ est le plan de ζ muni de la coupure $\tilde{l} =]-\infty, -1/\sqrt{2}]$. Dans ce cas $m = 4$, S_0 est le secteur $|\operatorname{Arg} \zeta| < \pi/4$, S_1 est le secteur $|\operatorname{Arg} \zeta - \pi/2| < \pi/4$, le secteur S_2 (resp. S_3) est symétrique du secteur S_0 (resp. S_1) par rapport au point $\zeta = 0$. Menons par les points $z = 0$ et $z = 1$ deux cercles l_1 et $l_2 = l_1^*$, le centre de l_1 étant le point $z = (1 + i\sqrt{2})/2$. Alors D_0 est la lunule formée par leur intersection, $D_3 = D_1^*$, le domaine D_1 est borné par le grand arc du cercle l_1 et un arc de l_2, D_2 est l'extérieur de la réunion des cercles, muni de la coupure le long de l.

Supposons que $a_j \in [D_j]$, le cas $a_j = \infty$ n'étant pas exclu. Désignons par $H_k(a_j)$, $k \neq j$, l'ensemble des points $z \in [D_j] \cup [D_k]$ susceptibles d'être reliés au point a_j par un chemin canonique γ. Plus exactement, lorsque t se déplace le long de γ du point a_j vers le point z, la fonction $\operatorname{Re} S(z)$ est croissante. La branche de cette fonction est choisie de telle sorte que $\operatorname{Re} S(z) \leqslant 0$ dans le domaine D_j, $\operatorname{Re} S(z) \geqslant 0$ dans le domaine D_k.

On admet que k et j sont des entiers, $k \neq j$, et si $m = m_1/m_2$, où m_1 et m_2 sont des nombres entiers premiers entre eux, $m_1 \neq 1$, on exige que $|k - j| < m_1$. Pour les autres valeurs de m, aucune condition n'est imposée sur les valeurs de j et k. En particulier, on peut toujours poser $k = j \pm 1$; dans ce cas les secteurs S_j et S_k sont voisins. On remarquera que la réunion $D_k \cup D_j \cup \{0\}$ est connexe, mais peut ne pas être un domaine.

2. Fonctions auxiliaires. Posons

$$e(t) = |\exp\{(-1)^j t^{m/2}\}|, \quad t \in [S_j],$$

la branche de la fonction $t^{m/2}$ étant choisie de telle sorte que $t^{m/2} = |t|^{m/2} \exp\{(1/2)\, im \operatorname{Arg} t\}$. Donc

$$e(t) \equiv 1, \quad t \in \partial S_j; \quad e(t) > 1, \quad t \in S_j,$$

et la fonction $e(t)$ croît exponentiellement à l'intérieur du secteur S_j. Dans le domaine $[S_j] \cup [S_k]$ considérons les fonctions

$$E_{jk}(t) = 1/e(t), \quad t \in [S_j], \quad E_{jk}(t) = e(t), \quad t \in [S_k],$$

de sorte que $E_{kj}(t) = E_{jk}^{-1}(t)$. Supposons que $U_j(t)$ et $U_k(t)$ sont les solutions de l'équation modèle envisagées au § 3. On rappelle que $U_j(t) \to 0$ si $t \to \infty$ le long de tout rayon contenu dans le secteur S_j et $U_j(t) \to \infty$ si $t \to \infty$ le long de tout rayon situé dans le secteur S_k. La solution $U_k(t)$ possède les mêmes propriétés. Introduisons

les fonctions

$$M_{jk}(t) = [|U_j(t)|^2 E_{jk}^{-2}(t) + |U_k(t)|^2 E_{jk}^2(t)]^{1/2},$$

$$N_{jk}(t) = [|U'_j(t)|^2 E_{jk}^{-2}(t) + |U'_k(t)|^2 E_{jk}^2(t)]^{1/2},$$

$$\widetilde{N}_{jk}(t) = |t|^{(2-m)/4}\left[E_{jk}^{-2}(t)\left|\frac{d}{dt}(t^{(m-2)/4}U_j(t))\right|^2 + \right.$$

$$\left. + E_{jk}^2(t)\left|\frac{d}{dt}(t^{(m-2)/4}U_k(t))\right|^2\right]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\Omega_m(t) = (1 + |t|^{m/2})(1 + |t|)^{-1}.$$

Si $t \to \infty$ le long de tout rayon situé à l'intérieur de l'un des secteurs S_j ou S_k, alors

$$M_{jk}(t) \sim (1 + \lambda_{jk}^2)^{1/2} |t|^{(2-m)/4},$$

$$N_{jk}(t) \sim \frac{m}{2}(1 + \lambda_{jk}^2)^{1/2} |t|^{(m-2)/4} \sim \widetilde{N}_{jk}(t),$$

les nombres λ_{jk} sont définis au § 3. Posons

$$H(z_1, z_2, \lambda) = \int_{z_1}^{z_2} \left| \tilde{f}^{-1/4}(z) \frac{d^2}{dz^2} \tilde{f}^{-1/4}(z) - \frac{g(z)}{\tilde{f}^{1/2}(z)} \right| \frac{|dz|}{\Omega_m(\lambda^{2/m}\zeta(z))},$$

$$\tilde{f}(z) = z^{2-m} f(z).$$

3. Estimations des solutions [110]. Supposons que les conditions formulées ci-dessus sont satisfaites et que la quantité $H(z_1, z_2, \lambda)$ est finie pour tout $z \in H_k(a_j)$, $\lambda > 0$, où l'intégrale est prise le long d'un chemin canonique. Soient A et B des constantes arbitraires. L'équation (1) admet alors une solution $w(z, \lambda)$ de la forme

$$w(z, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(z)\,[AU_j(\lambda^{2/m}\zeta(z)) + BU_k(\lambda^{2/m}\zeta(z)) + \varepsilon(\lambda, \zeta)], \quad (4)$$

où pour $z \in H_k(a_j)$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ on a les estimations

$$\frac{|\varepsilon(\lambda, \zeta)|}{M_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)}, \quad \frac{|\partial\varepsilon(\lambda, \zeta)/\partial\zeta|}{\lambda^{2/m} N_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)}, \quad \frac{|\partial(\zeta^{(m-2)/4}\varepsilon)/\partial\zeta|}{\lambda^{2/m}|\zeta|^{(m-2)/4}\widetilde{N}_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sigma_{jk}(\lambda) E_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)\left[\exp\left\{\frac{c_2}{\lambda^{2/m}} H(a_j, z, \lambda)\right\} - 1\right]. \quad (5)$$

Ici $c_1, c_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de λ,

$$\sigma_{jk}(\lambda) = \sup_{t \in \tilde{\gamma}} [\Omega(\lambda^{2/m}t) E_{jk}^{-1}(\lambda^{2/m}t) M_{jk}(\lambda^{2/m}t)] \times$$

$$\times [|AU_j(\lambda^{2/m}t) + BU_k(\lambda^{2/m}t)|], \quad (6)$$

où $\tilde{\gamma}$ est l'image par l'application $\zeta = \zeta(z)$ du chemin canonique γ reliant les points z et a_j et l'intégrale $H(a_j, z, \lambda)$ est prise le long de γ.

La majoration (5) revêt un caractère assez général, mais contient des expressions assez volumineuses de $\sigma_{jk}(\lambda)$ et de $H(a_j, z, \lambda)$. D'autre part, elle est intéressante lorsqu'on a affaire à la représentation asymptotique des solutions dans le cas seulement où le second membre de la formule (6) (sans le facteur E_{jk}^{-1}) est petit pour $\lambda \gg 1$. Dans la formule (6) l'expression entre crochets est bornée sur tout compact contenu dans $[S_j \cup S_k]$, ainsi que pour $t \to \infty$, $t \in S_k$. Si $t \to \infty$ à l'intérieur du secteur S_j, cette expression est illimitée sauf pour $B = 0$. Si donc $a_j = \infty$ est un point intérieur du secteur S_j, la majoration (5) n'est valable que pour $B = 0$.

4. Représentation asymptotique des solutions. Posons $A = 1$ et $B = 0$ dans la formule (5) ; alors $|\sigma_{jk}(\lambda)| \leqslant c$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$. Supposons que les points $a_j \in S_j$ et $a_k \in S_k$ sont reliables par un chemin canonique γ ne passant pas par le point $z = 0$ (par exemple S_j et S_k sont des secteurs voisins). Les points a_j et a_k peuvent être finis ou infinis. Supposons que les intégrales

$$\int^{a} |\delta(z)|\,|dz|, \quad \int^{a} \frac{|dz|}{|S(z)|},$$

où $a = a_j$ ou $a = a_k$, convergent le long de γ,

$$\delta(z) = f^{-1/4}(z) \frac{d^2}{dz^2} f^{-1/4} - \frac{g(z)}{f^{1/2}(z)}.$$

On a alors les majorations suivantes

$$\begin{aligned} &\lambda^{-2/m} H(a_j, a_k, \lambda) = O(\psi_m), \quad \lambda \to +\infty, \\ &\psi_m = \lambda^{-1}, \quad 0 < m < 2(1+\gamma_1), \\ &\psi_m = \lambda^{-1}\ln\lambda, \quad m = 2(1+\gamma_1), \\ &\psi_m = \lambda^{-2(1+\gamma_1)/m}, \quad m > 2(1+\gamma_1), \quad \gamma_1 = \min(\gamma, 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Si de plus la fonction $g(z)$ est holomorphe au point $z = 0$, pour ψ_m on peut prendre les fonctions

$$\lambda^{-1}, \quad 0 < m < 4; \quad \lambda^{-1}\ln\lambda, \quad m = 4; \quad \lambda^{-4/m}, \quad m > 4. \tag{8}$$

Toutes ces conditions sont satisfaites si les fonctions $z^{2-m} f(z)$ et $g(z)$ sont des polynômes de degré n_f et n_g, $n_g < n_f/2 + 1$.

En définitive, l'équation (1) admet une solution $w(z, \lambda)$ telle que pour $z \in H_j(a_k)$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$,

$$\begin{aligned} &w(z, \lambda) = \tilde{f}^{-1/4}(z)\, U_j(\lambda^{2/m}\zeta(z)) + \varepsilon_{jk}(\zeta, \lambda), \\ &|\varepsilon_{jk}(z, \lambda)| \leqslant c E_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta) M_{jk}(\lambda^{2/m}\zeta)\, \psi_m(\lambda). \end{aligned} \tag{9}$$

On a des majorations analogues pour les autres fonctions du premier membre de l'inégalité (5).

On rappelle que $U_j(t) \to 0$ si $t \to \infty$ à l'intérieur du secteur S_j.

5. Formules de raccordement. Supposons satisfaites les conditions énoncées ci-dessus et soit $S(a_j) = \infty$, de sorte que $a_j = \infty$ ou a_j est un point singulier de l'équation (1). Choisissons la branche de la fonction $S(z)$ telle que $\operatorname{Re} S(z) \geqslant 0$, $z \in D_j$. Pour chaque $\lambda > 0$ fixe, l'équation (1) admet alors une seule solution $w_0(z, \lambda)$ telle que

$$w_0(z, \lambda) \sim f^{-1/4}(z)\, e^{-\lambda S(z)} \tag{10}$$

pour $z \in D_j$, $z \to a_j$. Indiquons les formules asymptotiques de la solution w_0 dans le domaine D_k. Prolongeons analytiquement les fonctions $S(z)$ et $f^{1/4}(z)$ de D_j à D_k le long d'un chemin canonique ne passant pas par le point $z = 0$; alors $\operatorname{Re} S(z) \leqslant 0$, $z \in D_k$. Supposons que $b_k(\theta) \in D_k$, $\tilde{\gamma}$ est un chemin canonique reliant les points $b_k(\theta)$ et $a_k \in D_k$, et $\operatorname{Arg} S(z) = \theta$ sur $\tilde{\gamma}$, où $|\theta| \leqslant \pi/2$. Alors, pour $\lambda \to +\infty$, $z \in \tilde{\gamma}$,

$$\begin{aligned} w_0(z, \lambda) = f^{-1/4}(z)\, [i^{k-j-1}(\lambda_{jk} + O(\psi_m))\, e^{\lambda S(z)} \pm \\ \pm i^{k-j}(\lambda_{j,\,k\pm 1} + O(\psi_m))\, e^{-\lambda S(z)}]. \end{aligned} \tag{11}$$

La fonction ψ_m est définie par les formules (7), (8), le signe plus (resp. moins) est pris pour $\theta \geqslant 0$ (resp. $\theta \leqslant 0$). La majoration du résidu est uniforme en z et θ.

Des résultats analogues ont été acquis dans [110] pour l'équation plus générale

$$w'' = [\lambda^2 f(z, \lambda) + g(z, \lambda)]\, w.$$

§ 7. Deux points de retour voisins

1. Position du problème. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 q(x, \alpha)\, y = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, $\alpha \in J = [0, \alpha_0]$, $\alpha_0 > 0$, la fonction $q(x, \alpha)$ est réelle et de classe $C^\infty(I \times J)$. Les paramètres λ et α sont indépendants.

Supposons que pour chaque $\alpha \in]0, \alpha_0]$ fixe l'équation (1) présente exactement deux points de retour: $x_1(\alpha)$ et $x_2(\alpha)$ qui sont simples et qui pour $\alpha = 0$ fusionnent en un seul point de retour double x_0, $a < x_0 < b$. Un exemple type nous est fourni par l'équation de Weber

$$y'' \pm \lambda^2 (x^2 - \alpha)\, y = 0.$$

On demande de construire un système fondamental de solutions de l'équation (1) dont le développement asymptotique soit valable pour $\lambda \to +\infty$ et uniforme en $x \in I$, $\alpha \in J$.

Un autre cas se présente lorsque les deux points de retour voisins $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ sont complexes (pour $\alpha > 0$). La fonction $q(x, \alpha)$ est alors accessoirement supposée holomorphe en $x \in D$, où D est un domaine du plan de x complexe, $D \supset I$, pour chaque $\alpha \in J$ fixe. Un exemple type nous est donné par l'équation de Weber

$$y'' \pm \lambda^2 (x^2 + \alpha) y = 0.$$

Les problèmes de cette nature se présentent, par exemple, en mécanique quantique, lorsque l'énergie de la particule est proche du fond du puits de potentiel ou du sommet de la barrière de potentiel. On admet dans la suite que $x_0 = 0$, $a < 0 < b$, et que $\alpha_0 > 0$ est assez petit mais ne dépend pas de λ.

2. Points de retour réels.

2.1. *Structure de la fonction* $q(x, \alpha)$. Comme le point $x = 0$ est pour $\alpha = 0$ un point de retour d'ordre deux, il vient

$$q(0, 0) = q'_x(0, 0) = 0, \quad q''_{xx}(0, 0) \neq 0. \tag{2}$$

Exigeons accessoirement que soit réalisée la condition

$$q'_\alpha(0, 0) \neq 0. \tag{3}$$

Pour les petits x et α, on a

$$q(x, \alpha) = q'_\alpha(0, 0)\,\alpha + \frac{1}{2}[q''_{xx}(0, 0)\,x^2 + \\ + 2q''_{x\alpha}(0, 0)\,x\alpha + q''_{\alpha\alpha}(0, 0)\,\alpha^2] + \dots$$

La réalité des points de retour conduit à la condition

$$q'_\alpha(0, 0)\, q''_{xx}(0, 0) < 0. \tag{4}$$

Numérotons les points de retour de telle sorte que $x_1(\alpha) < 0 < x_2(\alpha)$ pour $\alpha > 0$. La fonction q peut être mise sous la forme

$$q(x, \alpha) = (x^2 + a(\alpha)\,x + b(\alpha))\,\tilde{q}(x, \alpha), \tag{5}$$

où $\tilde{q}(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$, $\tilde{q}(x, \alpha) \neq 0$ pour $(x, \alpha) \in I \times J$. Les conditions (2) à (4) entraînent

$$a(0) = b'(0) = D(0) = 0, \quad D'(0) > 0, \quad D(\alpha) = a^2(\alpha) - 4b(\alpha). \tag{6}$$

Puisque

$$x_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}\left(-a(\alpha) \pm \sqrt{D(\alpha)}\right),$$

$x_j(\alpha)$ sont des fonctions de $\sqrt{\alpha}$ indéfiniment dérivables pour $\alpha \in J$.

2.2. *Equation transformée.* La substitution

$$y = \sqrt{\varphi'(S)}\, w, \quad x = \varphi(S) \tag{7}$$

ramène l'équation (1) à la forme

$$w''_{SS} - \left[\lambda^2 q(x, \alpha)[\varphi'(S)]^2 - \frac{1}{2}\{\varphi, S\}\right] w = 0, \tag{8}$$

où $\{\varphi, S\}$ est la dérivée de Schwarz (chap. II, § 1). Choisissons la fonction $S(x, \alpha)$ de telle sorte que le coefficient en λ^2 soit de la forme $\pm(\beta(\alpha) - S^2)$. On distinguera deux cas.

I. $q''_{xx}(0, 0) < 0$.

II. $q''_{xx}(0, 0) > 0$.

Dans le premier cas, la fonction $q(x, \alpha)$ est strictement positive pour $\alpha > 0$, $x_1(\alpha) < x < x_2(\alpha)$, dans le second elle est strictement négative. Pour la fonction S on obtient les équations

$$\begin{aligned} S'^2(\beta - S^2) &= q(x, \alpha) \qquad (\mathrm{I}),\\ S'^2(\beta - S^2) &= -q(x, \alpha) \quad (\mathrm{II}). \end{aligned} \tag{9}$$

Etudions le cas I, le cas II se traitant de façon analogue.

2.3. *La fonction* $\beta(\alpha)$. Les conditions de continuité de la fonction S entraînent que $S = \pm\sqrt{\beta}$ pour $x = x_{1,2}(\alpha)$. Exigeons que $S = -\sqrt{\beta} < 0$ pour $x = x_1(\alpha)$; sur l'intervalle $I(\alpha) = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, on a alors

$$\int_{\sqrt{\beta}}^{S} \sqrt{\beta - t^2}\, dt = \int_{x_1(\alpha)}^{x} \sqrt{q(t, \alpha)}\, dt, \tag{10}$$

où les racines sont toutes arithmétiques. La condition $S = \sqrt{\beta}$ nous donne pour $x = x_2(\alpha)$

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{x_1(\alpha)}^{x_2(\alpha)} \sqrt{q(t, \alpha)}\, dt. \tag{11}$$

On démontre que $\beta(\alpha) \in C^\infty(J)$. Supposons accessoirement que la fonction $q(x, \alpha)$ est holomorphe par rapport à x dans un domaine D contenant l'intervalle I; ceci nous conduit à une formule plus commode pour $\beta(\alpha)$. Choisissons dans le domaine $D \setminus I(\alpha)$ la détermination de la fonction $\sqrt{q(x, \alpha)}$ telle que $\sqrt{q(x, \alpha)} = -i\,|\sqrt{q(x, \alpha)}|$ pour $x \in I(\alpha)$, $x > x_2(\alpha)$; alors $\sqrt{q(x, \alpha)} > 0$ sur la lèvre supérieure de la coupure $I(\alpha)$. Soit C un contour fermé

simple orienté dans le sens positif et englobant l'intervalle $I(\alpha)$; alors

$$\beta(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \oint_C \sqrt{q(x, \alpha)}\, dx. \tag{12}$$

L'intégrant étant indéfiniment dérivable par rapport à α pour $x \in C$, on a $\beta(\alpha) \in C^\infty(J)$. Si en outre la fonction $q(x, \alpha)$ est holomorphe par rapport à α pour $\alpha \in J$, il en est de même de la fonction $\beta(\alpha)$. Si l'on développe la fonction $\sqrt{q(x, \alpha)}$ en série de puissances de α pour $x \in C$, on peut obtenir le développement de la fonction $\beta(\alpha)$ en série. En particulier,

$$\beta'(0) = \sqrt{\frac{2}{|q''_{xx}(0, 0)|}}\, |q'_\alpha(0, 0)|. \tag{13}$$

2.4. *La fonction* $S(x, \alpha)$. Fixons $\alpha > 0$ et supposons que $x_1(\alpha) \leqslant \leqslant x \leqslant x_2(\alpha)$, $-\sqrt{\beta} \leqslant S \leqslant \sqrt{\beta}$. Le premier et le second membre de (10) sont des fonctions de S et de x strictement croissantes, de sorte que $S(x, \alpha)$ est une fonction continue strictement croissante. Sur les intervalles $]x_2(\alpha), b]$ et $[a, x_1(\alpha)[$ prolongeons la branche de $\sqrt{q(x, \alpha)}$ le long d'une courbe située dans le demi-plan supérieur de telle sorte que

$$\sqrt{q(x, \alpha)} = -i\,|\sqrt{q(x, \alpha)}|, \quad x > x_2(\alpha);$$
$$\sqrt{q(x, \alpha)} = i\,|\sqrt{q(x, \alpha)}|, \quad x < x_1(\alpha),$$

et faisons de même pour la fonction $\sqrt{\beta - S^2}$. On constate alors que la fonction S est de classe $C(I)$, est strictement croissante et indéfiniment dérivable partout sur I sauf aux points $x_{1,2}(\alpha)$. Pour les x proches de $x_1(\alpha)$, le second membre de (11) peut être mis sous la forme $(x - x_1(\alpha))^{3/2}\, Q(x, \alpha)$, le premier, sous la forme $(S + \sqrt{\beta})^{3/2} \times \times \tilde{Q}(S, \beta)$, où Q et $\tilde{Q}$ sont des fonctions de classe C^∞ qui ne s'annulent pas. D'où il s'ensuit que $S(x, \alpha) \in C^\infty(I)$ pour $\alpha > 0$; pour $\alpha = 0$ ceci se prouve directement. De plus $S(x, \alpha) \in C(I \times J)$.

3. **Points de retour complexes.** Dans ce cas les conditions (2), (3) restent en vigueur et la condition (4) est remplacée par

$$q'_\alpha(0, 0)\, q''_{xx}(0, 0) > 0. \tag{14}$$

La représentation (5) de la fonction q et les conditions (6) restent valables aussi. Les points de retour sont conjugués complexes: $x_2(\alpha) = \overline{x_1(\alpha)}$. Désignons-les par $x(\alpha)$ et $\overline{x(\alpha)}$, $\operatorname{Im} x(\alpha) < 0$.

La substitution (7) ramène l'équation (1) à la forme (8). Comme au n° 2, il faut distinguer deux cas.

III. $q''_{xx}(0, 0) > 0$.

IV. $q''_{xx}(0, 0) < 0$.

Pour la fonction S on obtient les équations

$$\begin{aligned} S'^2(\beta+S^2) &= q(x, \alpha) \quad \text{(III)}, \\ S'^2(\beta+S^2) &= -q(x, \alpha) \quad \text{(IV)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Traitons le cas III ; alors

$$\int_{-i\sqrt{\beta}}^{S} \sqrt{\beta+t^2}\,dt = \int_{x_1(\alpha)}^{x} \sqrt{q(t, \alpha)}\,dt. \tag{16}$$

Choisissons les branches des racines $\sqrt{q(t, \alpha)}$ et $\sqrt{t^2+\beta}$ qui sont strictement positives pour $t \in I$; ces racines sont donc strictement positives sur les intervalles $[x(\alpha), \overline{x(\alpha)}]$, $[-i\sqrt{\beta}, i\sqrt{\beta}]$. Donc

$$\int_{-i\sqrt{\beta}}^{0} \sqrt{\beta+t^2}\,dt = \frac{i\pi\beta}{4}, \qquad \int_{x(\alpha)}^{\operatorname{Re} x(\alpha)} \sqrt{q(t, \alpha)}\,dt = iA, \quad A > 0.$$

De la condition $S = -i\sqrt{\beta}$ on trouve pour $x = \overline{x(\alpha)}$ que

$$\beta(\alpha) = -\frac{2i}{\pi} \int_{x(\alpha)}^{\overline{x(\alpha)}} \sqrt{q(t, \alpha)}\,dt.$$

Soit C un contour fermé simple dans le plan de x complexe contenant l'intervalle $[x(\alpha), \overline{x(\alpha)}]$ à l'intérieur et orienté dans le sens positif. Alors

$$\beta(\alpha) = -\frac{i}{\pi} \oint_C \sqrt{q(x, \alpha)}\,dx, \tag{17}$$

où la branche de la racine est choisie de telle sorte que $\sqrt{q(x, \alpha)} > 0$ pour $x \in C$, $x > \operatorname{Re} x(\alpha)$. La fonction $\beta(\alpha)$ est indéfiniment dérivable pour $\alpha \in J$ et la formule (13) est valable. Pour chaque $\alpha \in J$ fixe, la fonction $S(x, \alpha)$ est holomorphe par rapport à x dans un voisinage complexe de l'intervalle I et continue par rapport à (x, α), ce qui se prouve comme au n° 2.4. Pour $x \in I$ la fonction $S(x, \alpha)$ est réelle et strictement croissante. Ceci découle du choix des branches des racines et du fait que pour $x \in I$

$$\int_0^S \sqrt{t^2+\beta}\,dt = \int_{\operatorname{Re} x(\alpha)}^{x} \sqrt{q(t, \alpha)}\,dt.$$

4. Terme principal de la représentation asymptotique des solutions. L'équation (1) est ramenée à la forme (8) par la transformation (7); il suffit donc d'établir les formules asymptotiques des solutions de l'équation (8). Désignons de nouveau la variable indépendante par x et remplaçons β par α^2 (on rappelle que $\beta(\alpha) \geqslant 0$ pour $\alpha > 0$), où $\alpha \geqslant 0$.

4.1. *Cas* I. Considérons l'équation

$$y'' - \lambda^2 \left(\frac{x^2}{4} - \alpha^2\right) y + f(x, \alpha) y = 0 \tag{18}$$

sur l'intervalle $I = [-a, a]$, $a > 0$, où f est continue par rapport à x et α. L'équation modèle est de la forme

$$w'' - \left(\frac{x^2}{4} - \alpha^2\right) w = 0. \tag{19}$$

Un système fondamental est constitué des fonctions du cylindre parabolique $U(-\alpha^2, x)$, $V(-\alpha^2, x)$ [11]. Dans les notations de Whittaker on a

$$U(a, x) = D_{a-1/2}(x),$$

$$V(a, x) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) [\sin \pi a D_{-a-1/2}(x) + D_{-a-1/2}(-x)].$$

Le wronskien de ces solutions est égal à

$$W(U, V) = \sqrt{2/\pi}.$$

Pour $x \to +\infty$ et a fixe,

$$U(a, x) \sim x^{-a-1/2} e^{-x^2/4},$$

$$V(a, x) \sim \sqrt{2/\pi}\, x^{a-1/2} e^{x^2/4}.$$

Le développement asymptotique de ces solutions est plus compliqué pour $x \to -\infty$ [11]. L'équation (18) admet un système fondamental de la forme

$$y_1(x, \lambda, \alpha) = U(-\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda}) + O(\lambda^{-2/3}) |U(-\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda})|. \tag{20}$$

Les majorations des résidus sont uniformes en x et α, $x \in I$ et $\alpha \in J = [0, \alpha_0]$, $\alpha_0 > 0$. Ceci vaut également pour les majorations ultérieures.

4.2. *Cas* III. L'équation réduite est de la forme

$$y'' - \lambda^2 \left(\frac{x^2}{4} + \alpha^2\right) y + f(x, \alpha) y = 0. \tag{21}$$

Un système fondamental de solutions de l'équation modèle

$$w'' - \left(\frac{x^2}{4} + \alpha^2\right) w = 0 \tag{22}$$

est constitué des fonctions $U(\alpha^2, x)$, $U(-\alpha^2, x)$. L'équation (21) admet un système fondamental de la forme

$$y_{1,2}(x, \lambda, \alpha) = U(\lambda\alpha^2, \pm x\sqrt{\lambda})\,[1 + O(\lambda^{-1}\ln\lambda)]. \qquad (23)$$

En mécanique quantique, les variantes envisagées correspondent au cas où l'énergie de la particule est proche du fond du puits de potentiel. Les deux variantes suivantes correspondent au cas où l'énergie de la particule est voisine du sommet de la barrière de potentiel.

4.3. *Cas* II, IV. Considérons l'équation

$$y'' + \lambda^2\left(\frac{x^2}{4} \pm \alpha^2\right) y + f(x, \alpha)\, y = 0, \qquad (24)$$

où la fonction $f(x, \alpha)$ possède les mêmes propriétés qu'au nº 4.1. L'équation modèle est de la forme

$$w'' + \left(\frac{x^2}{4} \pm \alpha^2\right) w = 0$$

et admet les systèmes fondamentaux de solutions

$$\{W(\alpha^2, x),\ W(\alpha^2, -x)\},\quad \{W(-\alpha^2, x),\ W(-\alpha^2, -x)\}.$$

Le premier (resp. le second) de ces systèmes est associé à α^2 (resp. $-\alpha^2$). Le wronskien de ces solutions est égal à

$$W(W(a, x),\ W(a, -x)) = 1.$$

Pour $x \to +\infty$ on a

$$W(a, x) = \sqrt{\frac{2k}{x}} \cos\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right),$$

$$W(a, -x) = \sqrt{\frac{2}{kx}} \sin\left(\frac{x^2}{4} - a\ln x + \frac{x}{2} + \frac{\Phi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right),$$

où

$$k = \sqrt{1 - e^{2\pi a}} - e^{\pi a},\quad \Phi = \operatorname{Arg}\Gamma(1/2 + ia).$$

L'équation (24) admet le système fondamental de solutions [105, 106]

$$\begin{aligned} w^+_{1,2}(x, \lambda, \alpha) &= W(\pm\lambda\alpha^2, -x\sqrt{\lambda}) + \\ &\quad + O(\lambda^{-1}\ln\lambda\,|W(\pm\lambda\alpha^2, -x\sqrt{\lambda})|), \\ w^-_{1,2}(x, \lambda, \alpha) &= W(\pm\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda}) + \\ &\quad + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda\,|W(\pm\lambda\alpha^2, x\sqrt{\lambda})|). \end{aligned} \qquad (25)$$

Les majorations des résidus sont uniformes en x et α.

§ 8. Confluence de plusieurs points de retour

1. Polygone caractéristique. Considérons l'équation

$$\varepsilon^2 w'' - q(z, \varepsilon) w = 0 \tag{1}$$

sous les conditions suivantes:

1) La fonction $q(z, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à l'ensemble des variables dans le domaine

$$D: \ |z| \leqslant r_0, \ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \ |\operatorname{Arg} \varepsilon| \leqslant \theta_0.$$

2) Pour $\varepsilon \to 0$ et $|\operatorname{Arg} \varepsilon| \leqslant \theta_0$, on a le développement asymptotique

$$q(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(z) \varepsilon^r,$$

uniforme en z, $|z| \leqslant r_0$, où les fonctions $q_r(z)$ sont holomorphes pour $|z| \leqslant r$.

3) $q_0(z) = z^n \tilde{q}_0(z)$, $\tilde{q}_0(0) \neq 0$. La fonction $\tilde{q}_0(z)$ est holomorphe pour $|z| \leqslant r_0$.

Pour $m \geqslant 1$ le point $z = 0$ est un point de retour. Le cas $n = 1$ étant traité dans les §§ 1, 2, et le cas $n = 2$, dans le § 7, on se penchera seulement sur le cas $n \geqslant 3$. Les nombres r_0 et ε_0 sont supposés être strictement positifs et assez petits. Sans nuire à la généralité, on peut admettre que $q(z, 0) = z^n$, puisqu'on peut ramener l'équation (1) à cette forme par un changement de variable et de fonction (chap. II, § 1 ; chap. IV, § 4). L'équation (1) devient alors

$$\varepsilon^2 w'' - [z^n + \varepsilon \tilde{q}(z, \varepsilon)] w = 0.$$

On appellera *point de retour* $z(\varepsilon)$ de l'équation (1) une solution de l'équation $q(z, \varepsilon) = 0$. Si $\tilde{q}(z, \varepsilon) \not\equiv 0$, et $\varepsilon \neq 0$, il existe n points de retour $z_1(\varepsilon), \ldots, z_n(\varepsilon)$ qui fusionnent en un seul point de retour $z = 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. On les appelle *points de retour secondaires.*

Supposons que $q_r(z) \not\equiv 0$; alors

$$q_r(z) = \sum_{k=m_r}^{\infty} q_{rk} z^k, \quad q_{r, m_r} \neq 0. \tag{2}$$

Sur le plan rapporté aux coordonnées cartésiennes X, Y repérons les points

$$Q = (1, -1), \quad P_0 = (0, n/2), \quad P_r = (r/2, m_r/2), \quad r = 1, 2, \ldots$$

Si $q_r(z) \equiv 0$, le point P_r n'existe pas.

Soit Γ une ligne polygonale reliant les points P_0, Q et admettant pour sommets certains points P_r. Supposons que Γ est convexe vers le bas et que tous les points P_r sont situés sur ou au-dessus d'elle. La ligne Γ est alors appelée *polygone caractéristique* du point de re-

tour $z = 0$ [77]. La ligne Γ est composée d'un ou de deux segments. Trois cas sont possibles.

1. Γ est le segment P_0Q. Dans ce cas soit $2m_1 > n - 2$, soit $q_1(z) \equiv 0$, de sorte que $q(z, \varepsilon) = z^m + \varepsilon^2 q(z, \varepsilon)$ (les équations de cette forme ont été étudiées dans les paragraphes précédents).

2. Γ est le segment P_0Q, mais $P_1 \in \Gamma$. Dans ce cas, $2m_1 = n - 2$.

3. Γ est une ligne polygonale de sommets P_0, P_1, Q, le point P_1 est situé au-dessous du segment PQ. Dans ce cas $2m_1 < n - 2$.

La représentation asymptotique des solutions au voisinage du point $z = 0$ est bien plus compliquée dans les cas 2 et 3 que dans le cas 1.

2. Réduction de l'équation (1) dans le cas où Γ est un segment [33].

2.1. *Réduction dans un voisinage complet d'un point de retour.* Remplaçons l'équation (1) par le système équivalent

$$\varepsilon w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q(z, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix} u, \quad u = \begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Supposons remplie la condition: lorsque $z \to 0$

$$q_1(z) = O(z^{(n-1)/2}), \quad n \text{ impair},$$
$$q_1(z) = O(z^{n/2}), \quad n \text{ pair}.$$

Il existe alors une fonction matricielle $T(z, \varepsilon)$ telle que la transformation

$$u = T(z, \varepsilon)\, v \tag{4}$$

ramène le système (3) à la forme

$$\varepsilon v' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z^n + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} \beta_j(\varepsilon) z^{n-j} & 0 \end{bmatrix} v. \tag{5}$$

La matrice $T(z, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à z et ε dans le domaine D (cf. la condition 1)) et admet le développement asymptotique

$$T(z, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} T_r(z)\, \varepsilon^r, \quad \varepsilon \to 0, \quad |\operatorname{Arg} \varepsilon| \leqslant \theta_0, \tag{6}$$

uniforme en z, $|z| \leqslant r$, et de plus $\det T_0(z) \equiv 1$. Les fonctions $\beta_j(\varepsilon)$ sont holomorphes pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\operatorname{Arg} \varepsilon| \leqslant \theta_0$ et admettent dans ce secteur les développements asymptotiques suivants:

$$\beta_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{jk} \varepsilon^k, \quad \varepsilon \to 0.$$

Le système (5) est équivalent à l'équation

$$\varepsilon^2 W'' - \left[z^n + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} \beta_j(\varepsilon) z^{n-j}\right] W = 0 \qquad (7)$$

dans laquelle le coefficient de W est un polynôme en z de degré n.

Donc l'étude de la représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) au voisinage du point de retour $z = 0$ implique nécessairement celle des solutions d'une équation de la forme

$$w'' - Q(z)\, w = 0, \quad Q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Les conditions imposées à la fonction $q_1(z)$ sont équivalentes au fait que le polygone caractéristique Γ est composé d'un seul segment.

2.2. *Réduction de l'équation* (1) *dans un secteur*. Supposons que pour $z \to 0$

$$q_1(z) = O(z^{(n-1)/2}), \quad n \text{ impair},$$
$$q_1(z) = O(z^{(n-2)/2}), \quad n \text{ pair}.$$

Remarquons que si n est pair et $q_1(z) = q_0 z^{(n-2)/2} + \ldots$, alors Γ est constituée de deux segments. Supposons que $\delta > 0$ est assez petit, que le domaine D est le même qu'au n° 1 et que $\theta_0 = (m + 2)\, \delta/4$. Il existe alors une transformation (4) réduisant le système (3) à la forme (5) et jouissant des mêmes propriétés. La seule différence est que la réduction est réalisée pour les z contenus dans le secteur

$$|z| \leqslant r_0, \quad -\frac{\pi}{n+2} + \delta \leqslant \operatorname{Arg} z - \frac{2k\pi}{n+2} \leqslant \frac{3\pi}{m+2} + \delta,$$

où k est un entier fixe.

3. Représentation asymptotique des solutions dans le cas où Γ est constituée d'un seul segment [99]. Dans ce cas l'équation (1) est de la forme

$$\varepsilon^2 w'' + [z^n + \varepsilon z^m q_1(z) + \varepsilon^2 q_2(z, \varepsilon)]\, w = 0, \qquad (8)$$

où soit $q_1(0) \neq 0$, $2m > n - 2$, soit $q_1(z) \equiv 0$.

Le voisinage $|z| \leqslant r$ du point de retour est partagé en deux domaines : un *domaine extérieur*

$$D_e : c_1 \leqslant \varepsilon^{2/(n+2)} \leqslant |z| \leqslant r$$

et un *domaine intérieur*

$$D_1 : |z| \leqslant c_2,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de ε, c_2 est assez petite. Les développements asymptotiques des solutions construits dans ces domaines s'appellent respectivement *développe-*

ments (ou *solutions*) *extérieur* et *intérieur*. Le développement extérieur est tout simplement la modification de l'approximation WKB (chap. II, § 3). Le développement intérieur s'exprime en fonction des solutions de l'équation modèle

$$\varepsilon^2 w'' - z^n w = 0,$$

c'est-à-dire au moyen des fonctions de Bessel (§ 3). L'intersection $D_i \cap D_e$ n'étant pas vide, les deux développements asymptotiques y sont valables, ce qui permet de les « souder » et d'obtenir ainsi la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions de l'équation (1) dans un voisinage complet du point de retour. En fait la situation est légèrement plus compliquée puisqu'il faut partager les domaines D_e et D_i en secteurs, construire dans chacun d'eux la représentation asymptotique du système fondamental correspondant et trouver les formules de raccordement.

3.1. *Développement extérieur.* Faisons la transformation

$$\begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iz^{n/2} & -iz^{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad z = \zeta^2.$$

On obtient alors le système

$$(\zeta^{-(n+2)}\varepsilon)\,\zeta \frac{du}{d\zeta} = B(\zeta, \varepsilon)\,u,$$

$$B(\zeta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\zeta)\,[\zeta^{-(q+2)}\varepsilon]^j.$$

Remarquons que $\rho = \zeta^{-(n+2)}\varepsilon \to 0$ si $|z| \geqslant \varepsilon^{1/(n+2)-\alpha}$, $\alpha > 0$, de sorte qu'il faut chercher la solution asymptotique formelle u sous forme d'une série de ρ. On a

$$B_0(\zeta) = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}, \quad B_1(\zeta) = \begin{bmatrix} -ib_1(\zeta) - n/2 & -ib_1(\zeta) + n/2 \\ ib_1(\zeta) + n/2 & ib_1(\zeta) - n/2 \end{bmatrix},$$

$$B_j(\zeta) = \begin{bmatrix} -ib_j(\zeta) & -ib_j(\zeta) \\ ib_j(\zeta) & ib_j(\zeta) \end{bmatrix}, \quad j \geqslant 2,$$

où $b_j(\zeta)$ sont des séries de ζ. En particulier,

$$b_1(\zeta) = \begin{cases} q_{1k_2}\zeta^2 + q_{1k_4}\zeta^4 + \ldots + q_{1k_{2m}}\zeta^{2m} + \ldots, & n \text{ pair}, \\ q_{1k_1}\zeta + q_{1k_3}\zeta^3 + \ldots + q_{1k_{2m-1}}\zeta^{2m-1} + \ldots, & n \text{ impair}, \end{cases}$$

où $k_{2m} = n/2 + m - 1$, $k_{2m-1} = (n-1)/2 + m - 1$.

Supposons que $D_k = S_k \cap D_e$, où S_k est le secteur

$$\frac{2(k-1)}{n+2}\pi < \operatorname{Arg} z < \frac{2(k+1)}{n+2}\pi.$$

L'équation (9) admet la matrice fondamentale

$$Y=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ \varepsilon w_1' & \varepsilon w_2' \end{bmatrix}=$$

$$=z^{-n/4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ iz^{n/2} & -iz^{n/2} \end{bmatrix}\left[I+\sum_{j=0}^{m} U_j(\zeta)(\varepsilon\zeta^{-n-2})^j+R_m(\zeta,\varepsilon)\right]\times$$
$$\times\exp\{(\varepsilon\zeta^{-n-2})^{-1}\Lambda_0+\Lambda_1\},\qquad (9)$$

où

$$\Lambda_0=\frac{2i}{n+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \Lambda_1=a(\zeta)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$a(\zeta)=i\int_0^{\zeta} t^{-1}b_1(t)\,dt.\qquad (10)$$

Dans le domaine D_k le résidu admet la majoration

$$|R_m(\zeta,\varepsilon)|\leqslant c_m(\varepsilon\zeta^{-n-2})^j.\qquad (11)$$

Lorsque $\rho\to\infty$, le développement extérieur coïncide avec le développement standard WKB (chap. II, § 3), les matrices $U_j(\zeta)$ se déterminent à partir de relations récurrentielles. Dans ces formules $z^{1/2}>0$, $z^{1/4}>0$ pour $z>0$.

3.2. *Développement intérieur.* Dans le domaine D_1 l'équation (1) peut être traitée comme une déformation de l'équation $\varepsilon^2w''+$ $+z^nw=0$ dont les solutions s'expriment au moyen des fonctions de Bessel. La transformation

$$\tilde{z}=\varepsilon^{-2/(n+2)}z,\quad \begin{bmatrix} w \\ \varepsilon w' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix}v,\quad \rho=\varepsilon^{1/(n+2)},$$

nous conduit au système

$$\frac{dv}{dz}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{z}^n+\psi(\tilde{z},\rho) & 0 \end{bmatrix}v,$$
$$\psi(\tilde{z},\rho)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j(\tilde{z})\rho^j.\qquad (12)$$

La nouvelle variable $\tilde{z}$ s'appelle *variable endogène.* On cherchera une solution asymptotique formelle sous la forme

$$v=\sum_{j=0}^{\infty} v_j(\tilde{z})\rho^j;$$

pour v_j on obtient alors le système récurrentiel de solutions

$$\frac{dv_0}{d\tilde{z}} = C_0(\tilde{z})\, v_0, \qquad \frac{dv_j}{d\tilde{z}} = \sum_{k=0}^{j} C_k(\tilde{z})\, v_{j-k}, \quad j \geqslant 1,$$
$$C_0(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{z}^n & 0 \end{bmatrix}, \quad C_j(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_j(\tilde{z}) & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

On traitera l'équation (13) comme une équation matricielle, c'est-à-dire que v est une (2×2)-matrice. La première de ces équations admet la matrice fondamentale

$$v_0(\tilde{z}) = \xi^{\nu} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \tilde{z}^{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\nu}^{(1)}(\xi) & H_{\nu}^{(2)}(\xi) \\ H_{\nu-1}^{(1)}(\xi) & H_{\nu-1}^{(2)}(\xi) \end{bmatrix},$$
$$\xi = \frac{2}{n+2}\, \tilde{z}^{(n+2)/2}, \quad \nu = \frac{1}{n+2}. \tag{14}$$

Les équations suivantes se résolvent par la méthode de variation des constantes. Si les contours d'intégration sont convenablement choisis, on obtient

$$v_j(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{z}^{n/2} \end{bmatrix} \xi^{1/(n+2)} V_j(\tilde{z}) \begin{bmatrix} g_1(\xi) & 0 \\ 0 & g_2(\xi) \end{bmatrix}, \tag{15}$$
$$g_{1,2}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left\{\pm i\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Les représentations asymptotiques et les majorations ultérieures sont toutes valables dans le domaine $D_0(\tilde{z}) = D_1 \cap S_0$. L'équation (9) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y_0(\tilde{z}, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \left[\sum_{j=0}^{m} v_j(\tilde{z})\, \rho^j + O(\rho^{j+1})\right], \quad |\tilde{z}| \leqslant a_0,$$
$$Y_0(\tilde{z}, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \xi^{\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{z}^{n/2} \end{bmatrix} \times$$
$$\times \left[\sum_{j=0}^{m} w_j(\tilde{z})\, (\tilde{z}^{1/2}\rho)^j + O((\tilde{z}^{1/2}\rho)^{m+1})\right] \begin{bmatrix} g_1(\xi) & 0 \\ 0 & g_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad |\tilde{z}| \geqslant a_0, \tag{16}$$

où $w_j(\tilde{z}) = \tilde{z}^{-j/2} V_j(\tilde{z})$, les fonctions matricielles $w_j(\tilde{z})$ sont bornées pour $|\tilde{z}| \geqslant a_0$ et $\xi > 0$ pour $\tilde{z} > 0$. Les matrices $V_j(\xi)$ admettent les développements asymptotiques suivants pour $\xi \to \infty$:

A. n est pair. Alors

$$V_{2m-1}(\xi)=0, \quad 2m-1<n+2,$$

$$V_{2m}(\xi)=\xi^{2m/(n+2)}\sum_{j=0}^{\infty} V_{2m,\,j}\xi^{-j}, \quad 2m<n+2,$$

$$V_k(\xi)=\xi^{k/(n+2)}\left[V_{k0}+\sum_{j=1}^{\infty} V_{kj}\xi^{-j}\ln\xi\right], \quad k\geqslant n+2.$$

En particulier,

$$V_2(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2/(n+2)} q_{1k_2}\xi^{2/(n+2)}V_0(\xi)\left\{\begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}+O(\xi^{-1})\right\}.$$

B. n est impair. Alors

$$V_k(\xi)=\xi^{k/(n+2)}\sum_{j=0}^{\infty} V_{kj}\xi^{-j}, \quad k<n+2,$$

$$V_k(\xi)=\xi^{k/(n+2)}\left[V_{k0}+\sum_{j=1}^{\infty} V_{kj}\xi^{-j}\ln\xi\right], \quad k\geqslant n+2.$$

En particulier,

$$V_1(\xi)=\left(\frac{n+2}{2}\right)^{1/(n+2)} q_{1k_1}\xi^{1/(n+2)}V_0(\xi)\left\{\begin{bmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}+O(\xi^{-1})\right\}.$$

3.3. *Formules de raccordement.* On a

$$W_0(z,\,\varepsilon)\equiv W_0(\tilde{z},\,\rho)\,\Omega_0(\rho).$$

La matrice de liaison est de la forme

$$\Omega_0(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{n/(2(n+2))}\rho^{-n/2}\times$$
$$\times\left\{\begin{bmatrix}\exp\left\{i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\} & 0\\ 0 & \exp\left\{-i\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{bmatrix}+O(\varepsilon)\right\}, \quad (17)$$

$$\nu=\frac{1}{n+2}.$$

Cette formule permet de calculer la valeur prise par le développement extérieur au point de retour $z=0$. On a

$$Y_0(0, \varepsilon)=\begin{cases} v_0(0)\,[I+A\rho^2+O(\rho^4)]\,\Omega_0(\rho), & n \text{ pair},\\ v_0(0)\,[I+B\rho^2+O(\rho^4)]\,\Omega_0(\rho), & n \text{ impair},\end{cases}$$

$$v_0(0)=\begin{bmatrix} \dfrac{i2^{\nu}}{\Gamma(1-\nu)\sin\nu\pi} & 0\\ 0 & \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^{n/(n+2)}\dfrac{i2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)\sin\nu\pi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ e^{-i\nu\pi} & -e^{i\nu\pi}\end{bmatrix},$$

où A et B sont des matrices constantes, $\nu=1/(n+2)$.

Des développements intérieurs pour les systèmes fondamentaux dans les domaines $D_k(\tilde{z})\cap D_1$ et des formules de raccordement analogues sont acquis dans [99].

4. Représentation asymptotique des solutions dans le cas où Γ est composée de deux segments [100]. Dans ce cas il faut partager le voisinage du point de retour $z=0$ en plusieurs régions. Bornons-nous à l'exemple [112]

$$\varepsilon^2 w''-(z^n-\varepsilon)\,w=0,\quad n\geqslant 3. \tag{18}$$

4.1. *Développement extérieur.* Le domaine extérieur D_e est la couronne

$$M\varepsilon^{1/n}\leqslant |z|\leqslant r,$$

où $M>0$ est un nombre assez grand, le développement extérieur de la matrice fondamentale W de l'équation (18) est de la forme

$$W(z, \varepsilon)=\begin{bmatrix} z^{-n/4} & 0\\ 0 & z^{n/4}\end{bmatrix}\tilde{W}(z, \varepsilon)\times$$
$$\times\exp\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{2}{n+2}\,z^{(n+2)/2}+\frac{1}{n-2}\,z^{(2-n)/2}\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\},$$
$$\tilde{W}(z, \varepsilon)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+O(\varepsilon). \tag{19}$$

Le domaine D_e est recouvert par les domaines $D_{e,k}$, $k=0, 1, \ldots$ $\ldots, n+1$, contenus chacun dans un secteur

$$G_{k+3}:\delta+\frac{-\pi+2\pi k}{n+2}\leqslant \operatorname{Arg} z\leqslant \frac{3\pi+2\pi k}{n+2}-\delta,$$
$$M\varepsilon^{1/n}\leqslant |z|\leqslant r,$$

et se construit de la manière suivante. Soit $\tilde{G}_{k+3}$ l'image de G_{k+3} par l'application $\zeta = z^{(n+2)/2}$, de sorte que

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{n+2}{2}\delta\leqslant \operatorname{Arg}\zeta\leqslant\frac{3\pi}{2}+\pi k-\frac{n+2}{2}\delta,$$

$$\zeta_0=r^{(n+2)/2}.$$

Soit $\tilde{D}_{e,k}\subset\tilde{G}_{k+3}$ un domaine tel que chacun de ses points ζ est reliable au point $-\zeta_0$ par une courbe le long de laquelle $\operatorname{Re}\zeta$ est croissante et au point ζ_0 par une courbe le long de laquelle $\operatorname{Re}\zeta$ est décroissante. Le domaine $D_{e,k}$ est la contre-image de $\tilde{D}_{e,k}$. En particulier, si $k=0$, $\tilde{G}_3$ est le secteur

$$M^{(n+2)/2}\varepsilon^{1/n}\leqslant|\zeta|\leqslant\zeta_0,\qquad -\frac{\pi}{2}+\delta\leqslant\operatorname{Arg}\zeta\leqslant\frac{3\pi}{2}-\delta.$$

Menons des tangentes au cercle $C: |\zeta| = M^{(n+2)/2}\varepsilon^{1/n}$ vers le bas jusqu'à leur intersection avec les rayons frontières du secteur $\tilde{G}_3$ et retranchons de $\tilde{G}_3$ les deux petits domaines découpés par ces tangentes ; on obtient alors le domaine $\tilde{D}_{e,3}$. Dans chaque domaine D_e il existe une matrice fondamentale $W_k(z, \varepsilon)$ de la forme (19). On peut établir le développement asymptotique en série de puissances de ε de la matrice $\tilde{W}$.

4.2. *Développement intérieur.* Le changement de variables

$$z=\varepsilon^{1/n}t,\quad \rho=\varepsilon^{(n-2)/(2n)},\tag{20}$$

ramène l'équation (18) à la forme

$$\rho^2\frac{d^2u}{dt^2}-(t^n-1)\,u=0.\tag{21}$$

Pour domaine intérieur D_i prenons le cercle $|t|\leqslant M$ (c'est-à-dire $|x|\leqslant M\varepsilon^{1/n}$) privé de petits voisinages fixes de tous les points de retour $t_k = \exp\{2\pi ik/n\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ces points s'appellent *points de retour secondaires.*

L'équation modèle (21) n'est pas intégrable au contraire du cas envisagé au nº 3, mais on peut déterminer la représentation asymptotique de son système fondamental de solutions pour $\rho\to 0$ dans le domaine D_i tout entier à l'aide des méthodes développées au chap. III, § 3. De chaque point de retour sont issues trois lignes de Stokes qui partagent le plan de t en $(n+2)$ domaines de type demi-plan et en domaines de type bande. Construisons la représentation asymptotique d'une matrice fondamentale intérieure.

Du point de retour $t = 1$ sont issues deux lignes de Stokes l_1, $l_2 = l_1^*$, $\operatorname{Im} t > 0$ pour $t\in l_1$, d'asymptotes $\operatorname{Arg} t = \pm\pi/(n+2)$. Elles bornent un domaine D_1 de type demi-plan contenant le demi-axe

$]1,+\infty[$. Pour n impair, la troisième ligne de Stokes l_0 est le demi-axe $]-\infty, 1]$, pour n pair, c'est le segment $[-1, 1]$. A la ligne l_1 adhère un domaine D_2 de type bande, au domaine D_2, un domaine D_3 de type demi-plan tel que l'une de ses lignes de Stokes frontières, l_3, admet la même asymptote $\operatorname{Arg} t = \pi/(n+2)$ que l_1.

Posons

$$D_0 = D_1 \cup l_1 \cup D_2 \cup l_3 \cup D_3,$$

le domaine D_0 étant canonique (chap. III, § 3, n° 2.1). Retirons de D_0 les petits voisinages des lignes de Stokes frontières et désignons le domaine obtenu par $\widetilde{D}_0$. Supposons qu'un système fondamental de solutions est défini par la donnée de $(1, l_1, D_0)$; l'équation (18) admet alors une matrice fondamentale de la forme

$$W_1(t, \rho) = e^{\frac{n-1}{12}\pi i} \begin{bmatrix} p^{-1/4}(t) & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} p^{1/4}(t) \end{bmatrix} \widetilde{W}(t, \rho) \begin{bmatrix} e^{\rho^{-1} S} & 0 \\ 0 & e^{-\rho^{-1} S} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$S(t) = \int_1^t \sqrt{p(\tau)}\, d\tau, \quad p(t) = t^n - 1,$$

$$\widetilde{W}(t, \rho) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + O(\rho).$$

Désignons par $W_e(z, \varepsilon)$ la matrice fondamentale extérieure correspondant au domaine $D_{e,3}$ (n° 4.1) ; alors

$$W_1(t, \rho) = W_e(z, \varepsilon)\, \Omega(\varepsilon).$$

La matrice de passage $\Omega(\varepsilon)$ étant indépendante de z, on peut dans cette formule prendre n'importe quel $z \in D_1 \cap D_e$ et remplacer les matrices fondamentales W_1 et W_e par leurs représentations asymptotiques (19) et (22). Posons

$$x_0 = \alpha \rho^{1/(n-2)}, \quad t_0 = \alpha \rho^{-1/(n-2)}, \quad |\alpha| = 1,$$

de sorte que $x_0 \in D_{e,3}$; alors

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{n+2} x_0^{(n+2)/2} + \frac{1}{n-2} x_0^{-n/2+1} - \frac{1}{\rho} \int_1^{t_0} \sqrt{p(t)}\, dt = c_1 \rho^{-1} + O\left(\rho^{(n+2)/(2(n-2))}\right).$$

Pour la matrice $\Omega(\varepsilon)$ on a la formule asymptotique

$$\Omega(\varepsilon) = e^{\frac{n-1}{12}\pi i} \varepsilon^{1/4} [I + O(\rho)] \begin{bmatrix} e^{c_1 \rho^{-1}} & 0 \\ 0 & e^{-c_1 \rho^{-1}} \end{bmatrix},$$

où c_1 est une constante.

L'équation

$$\varepsilon^2 w'' - (z^5 - \varepsilon z) w = 0$$

est étudiée en détail dans [113].

CHAPITRE V

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ORDRE n

Dans ce chapitre on se penche sur les équations scalaires

$$y^{(n)} + \lambda q_1(x, \lambda^{-1}) y^{(n-1)} + \ldots + \lambda^n q_n(x) y = 0$$

et les systèmes

$$y' = \lambda A(x, \lambda^{-1}) y, \quad \lambda \to \infty.$$

On établit les formules asymptotiques des solutions sur un intervalle fini, un demi-axe et dans le plan de x complexe.

§ 1. Equations et systèmes sur un intervalle fini

1. Equation d'ordre n. Considérons l'équation

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k q_k(x) y^{(n-k)} = 0 \tag{1}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, les coefficients $q_k(x)$ sont à valeurs complexes et tous les $q_k(x) \in C^\infty(I)$. La représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) pour $\lambda \to +\infty$ s'exprime dans le cas élémentaire en fonction des racines de l'équation caractéristique

$$l(x, p) \equiv p^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) p^{n-k} = 0. \tag{2}$$

La fonction $l(x, p)$ s'appelle *λ-symbole* de l'opérateur l. Remarquons que l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$l(x, \lambda^{-1}D) y = 0, \quad D = d/dx.$$

1.1. *Solutions asymptotiques formelles.* On cherchera une solution asymptotique formelle de l'équation (1) sous la forme

$$y = e^{\lambda S(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} a_j(x). \tag{3}$$

Portons cette série dans (1), simplifions par $e^{\lambda S(x)}$ et égalons à zéro les coefficients des puissances de λ^{-1}. Nous obtenons alors un système récurrentiel d'équations pour les fonctions inconnues $S(x)$, $a_0(x)$ et $a_1(x)$. Ecrivons les deux premières équations. L'application de la formule de Leibniz

$$l(f(x)g(x))=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}D^jf(x)\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^j l(x,\ p)\Big|_{p=D}g(x)$$

nous donne

$$l[a_0(x)e^{\lambda S(x)}]=e^{\lambda S(x)}\Big[l(x,\ S'(x))a_0(x)+\lambda^{-1}(l_p(x,\ S'(x))a_0'(x)+ \\ +\frac{1}{2}l_{pp}(x,\ S'(x))S''(x)a_0(x))+O(\lambda^{-2})\Big]. \quad (4)$$

Pour la fonction $S'(x)$ on obtient l'équation $l(x,\ S'(x))=0$, c'est-à-dire que $S'(x)$ est une racine de l'équation caractéristique (2). Soit $p_j(x)$ une racine de cette équation. En posant $S'(x)=p_j(x)$, on obtient

$$S(x)=\int_{x_0}^{x}p_j(t)\,dt,\quad x_0\in I.$$

La fonction $a_0(x)$ se détermine à partir de l'équation

$$l_p(x,\ p_j(x))a_0'(x)+\frac{1}{2}p_j'(x)l_{pp}(x,\ p_j(x))a_0(x)=0,$$

et l'on obtient en définitive une solution asymptotique formelle de la forme

$$y_j(x,\ \lambda)=\tilde{y}_j(x,\ \lambda;\ x_0)[1+O(\lambda^{-1})],$$

$$\tilde{y}_j(x,\ \lambda;\ x_0)=\exp\left\{\lambda\int_{x_0}^{x}p_j(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p_j'(t)\frac{l_{pp}(t,\ p_j(t))}{l_p(t,\ p_j(t))}dt\right\}. \quad (5)$$

On s'est borné au calcul des fonctions $S(x)$ et $a_0(x)$. Cette méthode nous permet de calculer les autres coefficients $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... de la série (3). Mais leurs formules sont volumineuses et dans les applications on ne fait usage en principe que du terme principal de la représentation asymptotique.

1.2. *Conditions suffisantes d'existence de la représentation asymptotique des solutions.* Si l'équation caractéristique (2) admet une racine multiple pour $x=x_0$, alors x_0 s'appelle *point de retour* de l'équation (1). Les points de retour s'obtiennent par élimination de p entre les équations du système

$$l(x,\ p)=0,\quad l_p(x,\ p)=0. \quad (6)$$

Soient $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ les racines de l'équation (2). Posons les conditions:

1) L'équation (1) ne possède pas de points de retour pour $x \in I$, c'est-à-dire que

$$p_j(x) \neq p_k(x), \quad j \neq k, \quad x \in I.$$

2) Les différences Re $(p_j(x) - p_k(x))$ ne changent pas de signe pour j fixe, $x \in I$, $k = 1, \ldots, n$.

Si la condition 1) est satisfaite, alors $p_k(x) \in C^\infty(I)$, $k = 1, \ldots$ $\ldots, n$.

L'équation (1) admet une solution de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0)\left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N})\right], \quad \lambda \to +\infty, \quad (7)$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, les $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ et la majoration du résidu est uniforme en $x \in I$.

La formule asymptotique (7) peut être dérivée par rapport à x et à λ autant de fois qu'on le veut avec préservation de l'uniformité en x de la majoration du résidu. En particulier, pour le terme principal de la représentation asymptotique, on a

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) \sim \lambda^m p_j^m(x) \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0), \quad \lambda \to +\infty,$$

uniformément en $x \in I$.

Si la condition 2) est satisfaite pour tous les j, les solutions (7) forment un système fondamental de l'équation (1). Les causes de l'apparition des conditions 1) et 2) ont déjà été discutées au chap. II, § 7.

Le terme principal de la représentation asymptotique $\tilde{y}_j$ peut s'écrire sous une autre forme. En se servant des identités (où $p =$ $= p(x)$)

$$\frac{d}{dx} l_p(x, p) = p'(x) l_{pp}(x, p) + l_{px}(x, p),$$

$$\frac{p'(x) l_{pp}(x, p)}{l_p(x, p)} = \frac{d}{dx} \ln l(x, p) - \frac{l_{px}(x, p)}{l_p(x, p)},$$

on déduit de (5) que

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) =$$

$$= [l_p(x, p_j(x))]^{-1/2} \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \frac{l_{px}(t, p_j(t))}{l_p(t, p_j(t))}\, dt\right\}. \quad (8)$$

On peut également mettre $\tilde{y}_j$ sous la forme

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{p_j'(t)\,dt}{p_j(t) - p_k(t)}\right\}, \tag{9}$$

où l'accent prime exprime que $k \neq j$.

Exemples. 1. Considérons l'équation binomiale

$$y^{(n)} - \lambda^n q(x)\, y = 0.$$

Cette équation ne possède pas de point de retour si $q(x) \neq 0$, $x \in I$. Soient $q^{1/n}(x)$ une branche fixée de la racine et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les valeurs de $\sqrt[n]{1}$. La représentation asymptotique du système fondamental de solutions est de la forme

$$y_j(x, \lambda) \sim [q(x)]^{-1/2+1/2n} \exp\left\{\lambda\omega_j \int_{x_0}^{x} q^{1/n}(t)\,dt\right\}$$

à condition que les différences $\mathrm{Re}\,[(\omega_j - \omega_k)\, q^{1/n}(x)]$ ne changent pas de signe pour $x \in I$. Cette condition est satisfaite si la fonction $q(x)$ est réelle.

2. Considérons l'équation « bicarrée »

$$y^{(4)} - 2\lambda^2 a(x)\, y'' + \lambda^4 b(x)\, y = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont égales à

$$p_j(x) = \pm \sqrt{a(x) \pm \sqrt{D(x)}}, \quad D(x) = a^2(x) - b(x).$$

Les points de retour sont racines de l'une des équations

$$b(x) = 0, \quad D(x) = 0.$$

De (7) on déduit la représentation asymptotique

$$y_j(x, \lambda) \sim$$

$$\sim p_j^{-1/2}(x)\, D^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p_j'(t)\, D^{-1/2}(t)\,dt\right\}.$$

Remarque. Pour construire un nombre fini de termes du développement asymptotique d'une solution, il suffit que les coefficients de l'équation (1) soient suffisamment réguliers. Pour $N \geqslant 1$ fixe, il existe une solution de la forme (7) si tous les $q_j(x) \in C^{N+1}(I)$. Par ailleurs, si les conditions 1) et 2) sont remplies, l'équation (1) admet une solution dont la série asymptotique est

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a_{jk}(x)\right], \quad \lambda \to +\infty.$$

Mais cette solution ne peut être déterminée à l'aide de conditions de Cauchy.

1.3. *Réduction de l'équation* (1) *à un système.* Il existe une autre méthode de construction d'un système fondamental de solutions de l'équation (1). Tout d'abord l'équation est réduite de la manière habituelle à un système du premier ordre. Ensuite le système obtenu est ramené à une forme quasi diagonale

$$z' = [\lambda\Lambda_0(x) + \Lambda_1(x) + \ldots + \lambda^{-N+1}\Lambda_N(x) + O(\lambda^{-N})],$$

où $\Lambda_j(x)$ sont des matrices diagonales. En négligeant les termes d'ordre $O(\lambda^{-N})$, on obtient un système intégrable et donc une solution asymptotique formelle.

Indiquons les formules explicites pour le cas $N = 1$. La substitution

$$y = y_1, \quad y_1' = \lambda y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = \lambda y_{n-1}$$

ramène l'équation (1) au système du premier ordre

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -q_n & -q_{n-1} & -q_{n-2} & \ldots & -q_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

La matrice $A(x)$ admet les valeurs propres $p_j(x)$ et les vecteurs propres $(1, p_j(x), \ldots, p_j^{n-1}(x))^T$, $1 \leqslant j \leqslant n$. La matrice

$$T_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_1(x) & p_2(x) & \ldots & p_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^{n-1}(x) & p_2^{n-1}(x) & \ldots & p_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

ramène la matrice $A(x)$ à la forme diagonale, c'est-à-dire que

$$T_0^{-1}(x)\, A(x)\, T_0(x) = \Lambda_0(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)).$$

La substitution $y = T_0(x)\, z$ ramène le système (10) à la forme

$$z' = \left[\lambda\Lambda_0(x) - T_0^{-1}(x)\, \frac{dT_0(x)}{dx}\right] z, \quad (11)$$

c'est-à-dire diagonalise le système (10) à $O(1)$ près. On a

$$\left(T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx}\right)_{jj} = -\frac{p_j'(x)}{2}\, \frac{l_{pp}(x, p_j(x))}{l_p(x, p_j(x))} \equiv -p_j^{(1)}(x),$$

$$\left(T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx}\right)_{jk} = \frac{p_k'(x)}{p_k(x) - p_j(x)}\, \frac{l_p(x, p_k(x))}{l_p(x, p_j(x))}, \quad k \neq j. \quad (12)$$

Faisons le changement $z = (I + \lambda^{-1}T_1)\,w$, c'est-à-dire que

$$y = T_0(x)\,[I + \lambda^{-1}T_1(x)]\,w; \tag{13}$$

on obtient alors le système

$$w' = \Big[(I+\lambda^{-1}T_1)^{-1}\Big(\lambda\Lambda_0 - T_0^{-1}\frac{dT_0}{dx}\Big)(I+\lambda^{-1}T_1) - \\ - \lambda^{-1}(I+\lambda^{-1}T_1)^{-1}\frac{dT_1}{dx}\Big]\,w. \tag{14}$$

La matrice de ce système est égale à

$$\lambda\Lambda_0 + \Big\{[\Lambda_0,\ T_1] - T_0^{-1}\frac{dT_0}{dx}\Big\} + O(\lambda^{-1}).$$

où $[\Lambda_0,\ T_1] = \Lambda_0 T_1 - T_1\Lambda_0$ est le commutateur des matrices Λ_0 et T_1. Choisissons la matrice T_1 de telle sorte que la matrice entre accolades soit diagonale:

$$[\Lambda_0,\ T_1] - T_0^{-1}\frac{dT_0}{dx} = \Lambda_1.$$

La matrice T_1 n'est pas unique, puisque les éléments diagonaux de la matrice $[\Lambda_0,\ T_1]$ sont nuls. Pour fixer les idées posons

$$(T_1)_{jj} = 0, \quad (T_1)_{jk} = (p_j - p_k)^{-1}\Big(T_0^{-1}\frac{dT_0}{dx}\Big)_{jk}; \tag{15}$$

pour w on obtient alors le système

$$w' = [\lambda\Lambda_0(x) + \Lambda_1(x) + O(\lambda^{-1})]\,w,$$

où $\Lambda_1(x) = \operatorname{diag}(p_1^{(1)}(x), \ldots, p_n^{(1)}(x))$, les fonctions $p_j^{(1)}(x)$ interviennent dans (12). En négligeant $O(\lambda^{-1})$, on obtient un système intégrable dont les solutions sont

$$w_k(x, \lambda) = c_k\tilde{y}_k(x, \lambda;\ x_0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

En posant $c_k = 0$ pour $k \neq j$, $c_j = 1$ et en tenant compte de ce que $y = T_0(x)\,[I + O(\lambda^{-1})]\,w$, on obtient une solution asymptotique formelle $y_j(x, \lambda)$ de l'équation (1).

On peut effectuer une transformation de la forme

$$y = T_0(x)\,[I + \lambda^{-1}T_1(x) + \ldots + \lambda^{-N+1}T_{N-1}(x)]\,z$$

et choisir les matrices $T_2(x), \ldots, T_{N-1}(x)$ de telle sorte que la matrice du système obtenu soit diagonale à $O(\lambda^{-N})$ près.

Cette méthode de construction de la représentation asymptotique des solutions a l'air plus compliqué que celle du nº 1.1, mais elle présente de nombreux avantages. Tout d'abord elle est valable pour les systèmes de premier ordre. Ensuite elle se prête bien à la démonstration des formules asymptotiques (cf. § 4). Enfin, même la trans-

formation élémentaire $y = T_0(x) z$ est utile dans les calculs numériques.

1.4. *Paramètres auxiliaires et λ complexes.* Considérons l'équation

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k q_k(x, \mu) y^{(n-k)} = 0, \tag{16}$$

où $\mu \in D$ est un paramètre. Soient $p_1(x, \mu), \ldots, p_n(x, \mu)$ les racines de l'équation caractéristique

$$l(x, p, \mu) \equiv p^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x, \mu) p^{n-k} = 0. \tag{17}$$

Posons des conditions analogues à 1), 2) du n° 1.1 :

1) $|p_j(x, \mu) - p_k(x, \mu)| \geqslant \delta > 0$ pour $x \in I$, $\mu \in D$ et tous les j, k, $j \neq k$, où δ ne dépend pas de x et μ.

2) Les différences $\operatorname{Re}(p_j(x, \mu) - p_k(x, \mu))$ ne changent pas de signe pour j fixe, $(x, \mu) \in I \times D$, $k = 1, \ldots, n$.

Le paramètre μ peut être réel ou complexe.

A. μ est un paramètre réel, D un intervalle de l'axe réel.

On admet dans ce cas que $q_k(x, \mu) \in C^\infty(I \times D)$ pour tous les k.

B. μ est un paramètre complexe, D un domaine du plan complexe.

On admet dans ce cas que $q_k(x, \mu) \in C^\infty(I \times D)$ et que la fonction $q_k(x, \mu)$ est holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour chaque $x \in I$ fixe et tous les k.

L'équation (16) admet alors une solution $y_j(x, \lambda, \mu)$ de la forme (5) (dans cette formule il faut de toute évidence remplacer $p_j(x)$ par $p_j(x, \mu)$ et $l(x, p)$ par $l(x, p, \mu)$). La majoration du résidu est uniforme en $(x, \mu) \in I \times D$ et la formule (5) est dérivable par rapport à x, λ et μ autant de fois qu'on le veut en préservant l'uniformité en x et μ de la majoration du résidu. Les coefficients $a_{jk}(x, \mu)$ du développement (5) satisfont les mêmes conditions que les coefficients de l'équation (16) (cf. A, B).

Dans le cas B la solution $y_j(x, \lambda, \mu)$ est holomorphe par rapport à μ dans le domaine D pour tout $x \in I$ fixe et $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$. Toutes ces assertions se généralisent au cas où les coefficients de l'équation dépendent de plusieurs paramètres: $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$.

Revenons à l'équation (1). Soient D un domaine non borné du plan de λ complexe et $|\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$ dans D. En règle générale, pour D on prend un secteur de la forme $|\lambda| > \lambda_0$, $\alpha < \operatorname{Arg} \lambda < \beta$. Supposons que les conditions 1) et 2) sont satisfaites pour les fonctions $\lambda p_1(x), \ldots, \lambda p_n(x)$ pour tous les $\lambda \in D$. Alors la condition 2) change de forme, la condition 1), non.

Les différences $\operatorname{Re}[\lambda(p_j(x) - p_k(x))]$ ne changent pas de signe pour j fixe, $k = 1, \ldots, n$, $(x, \lambda) \in I \times D$.

L'équation (1) admet une solution $y_j(x, \lambda)$ justiciable de la formule asymptotique (5) pour $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in D$, uniformément en $x \in I$. Cette solution est une fonction de λ holomorphe dans le domaine D pour chaque $x \in I$ fixe.

Exemples. 1. Supposons que $q(x) > 0$, $x \in I$. Pour $\lambda \to +\infty$ l'équation

$$y^{(n)} - \lambda^n q(x)\, y = 0$$

admet alors une solution y_1 telle que

$$y_1(x, \lambda) \sim [q(x)]^{-1/2+1/2n} \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} q^{1/n}(t)\, dt\right\}$$

(cf. exemple 1 du n° 1.2), où $q^{1/n}(x) > 0$. Voyons dans quel secteur $0 \leqslant \operatorname{Arg} \lambda < \alpha$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 \gg 1$, cette représentation asymptotique reste valable. La condition de validité de cette représentation est la suivante: les différences $\operatorname{Re}(e^{i\varphi}(1 - \omega_k))$ ne changent pas de signe. Ici $\varphi = \operatorname{Arg} \lambda$, $\omega_k = \exp\{2\pi ki/n\}$. Relions le point $\omega_0 = 1$ aux points ω_k par des segments. Toutes les différences gardent leur signe par une rotation d'angle $\varphi < 2\pi/n$ autour du point ω_0. Si cet angle est légèrement supérieur à $2\pi/n$, la différence $\operatorname{Re}[e^{i\varphi}(1 - \omega_{n-1})]$ change de signe. Donc la formule asymptotique est valable pour $|\lambda| \to \infty$, $0 \leqslant \operatorname{Arg} \lambda \leqslant 2\pi/n$. On démontre que cette formule n'est plus valable dans un secteur plus grand.

2. Supposons que toutes les racines de l'équation caractéristique (2) sont imaginaires pures: $p_j(x) = i\tilde{p}_j(x)$ et distinctes pour $x \in I$. La condition 2) est alors satisfaite pour tout j et l'équation (1) admet un système fondamental de solutions de la forme (5) qui oscillent rapidement pour $\lambda \to +\infty$.

Si $0 \leqslant \operatorname{Arg} \lambda \leqslant \pi$, aucune différence de $\operatorname{Re}[\lambda(p_j(x) - p_k(x))]$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, ne change de signe et l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $\{y_1^+(x, \lambda), \ldots, y_n^+(x, \lambda)\}$ justiciable de la représentation asymptotique (5) pour $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$. De façon analogue, l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $\{y_1^-(x, \lambda), \ldots, y_n^-(x, \lambda)\}$ possédant la même représentation asymptotique, mais pour $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$. Ces deux systèmes fondamentaux sont en général distincts.

Les équations

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k q_k(x, \lambda^{-1})\, y^{(n-k)} = 0, \tag{18}$$

où les coefficients $q_k(x, \lambda^{-1})$ sont des polynômes de λ^{-1} ou se développent en séries asymptotiques de λ^{-1}, se rencontrent dans de nombreux problèmes. Cette équation est une équation (16) dans

laquelle $\mu = \lambda^{-1}$ et on peut lui appliquer les résultats mentionnés ci-dessus. L'équation caractéristique est de la forme

$$p^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x, \lambda^{-1})\, p^{n-k} = 0. \tag{19}$$

L'équation (18) peut être étudiée de la manière suivante. On développe les coefficients de cette équation en série asymptotique:

$$q_k(x, \lambda^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} q_{km}(x).$$

On cherche une solution asymptotique formelle sous la forme (3), puis on répète la procédure décrite au n° 1.1. Ceci étant, la fonction $S'(x)$ doit être racine de l'équation caractéristique

$$p^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x, 0)\, p^{n-k} = 0,$$

qui est légèrement différente de (19). Cette méthode nous conduit à un développement asymptotique de la forme (5); la première méthode, quant à elle, nous conduit au développement asymptotique

$$y_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t, \lambda^{-1})\, dt\right\} \left[\sum_{k=0}^{N-1} a_{jk}(x, \lambda^{-1})\, \lambda^{-k} + O(\lambda^{-N})\right].$$

Toutes les fonctions figurant dans cette formule se développent en séries asymptotiques de puissances de λ^{-1}; si on les développe et qu'on réunisse tous les termes contenant les mêmes puissances de λ^{-1}, on obtient un développement asymptotique de la forme (5).

2. Equations de forme auto-adjointe.

2.1. *Equations d'ordre pair.* Considérons l'équation

$$ly \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(q_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}\right) + \\ + (-1)^{n-1}\lambda^2 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + \lambda^{2n} q_n(x)\, y = 0 \tag{20}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, les coefficients $q_k(x)$ sont à valeurs complexes et tous les $q_k(x) \in C^\infty(I)$. On admet également que $q_0(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Si tous les coefficients $q_k(x)$ sont réels et $y(x)$, $z(x) \in C_0^\infty(I)$, on a l'identité de Lagrange

$$\int_a^b ly\bar{z}\, dx = \int_a^b y l\bar{z}\, dx.$$

Ceci exprime que l'opérateur différentiel L, défini sur le domaine $D(L) = C_0^\infty(Z)$ par la formule $Ly = ly$, est symétrique.

L'équation (20) est un cas particulier de l'équation (16). Mais elle se prête à une étude individuelle en raison de sa forme spéciale.

Appelons l'équation

$$l(x, p) \equiv q_0(x)\, p^{2n} - q_1(x)\, p^{2n-2} + \ldots + (-1)^n q_n(x) = 0 \qquad (21)$$

équation caractéristique. Soient $p_1(x), \ldots, p_{2n}(x)$ les racines de cette équation caractéristique. Introduisons la notation

$$\tilde{y}_j(x, \lambda;\, x_0) = [l_p(x, p_j(x))]^{-1/2} \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt\right\}. \qquad (22)$$

Supposons satisfaites les conditions 1) et 2) du nº 1.1. L'équation (20) admet alors une solution de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda;\, x_0)\left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N})\right], \qquad (23)$$

où $N \geqslant 1$ est quelconque. On remarquera que cette formule est plus simple que la formule (5).

Tout ce qui a été dit au nº 1 sur les solutions de l'équation (1) est valable pour celles de l'équation (20), savoir: la dérivabilité de la représentation asymptotique, la représentation asymptotique pour les λ complexes, la représentation asymptotique des solutions dans le cas où les coefficients de l'équation dépendent d'un paramètre, etc. La seule différence est que l'équation (20) se réduit plus facilement à un système de premier ordre. Posons

$$\begin{gathered} y_1 = y, \quad y_1' = \lambda y_2, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = \lambda y_n, \\ y_n' = \lambda q_0^{-1}(x)\, y_{n+1}, \quad y_{n+1}' = \lambda (q_1(x)\, y_n - y_{n+2}), \\ y_{n+2}' = \lambda (q_2(x)\, y_{n-1} - y_{n+3}), \quad \ldots, \quad y_{2n}' = \lambda q_n(x)\, y_1. \end{gathered} \qquad (24)$$

Pour $\lambda = 1$ les fonctions $y_k(x)$ s'appellent *quasi-dérivées* et se notent $y^{[k]}(x)$, de sorte que $y_k = \lambda^k y^{[k]}$.

La substitution (24) ramène l'équation (20) à un système du premier ordre

$$y' = \lambda A(x)\, y,$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & 0 \\ \cdot & \ddots & & & & \cdot & \\ & \cdot & 1 & & \cdot & & \\ & & 0 & q_0^{-1} & & & \\ & & q_1 & 0 & -1 & & \\ & \cdot & & & & \ddots & \\ \cdot & & & & & & -1 \\ q_n & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{2n} \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Dans la matrice $A(x)$ l'élément $q_0^{-1}(x)$ est situé à l'intersection de la n-ième ligne et de la $(n+1)$-ième colonne ; tous les éléments non indiqués sont nuls. On remarquera que la matrice $A(x)$ ne contient pas de dérivées des fonctions $q_0(x), \ldots, q_n(x)$; la matrice du système aurait contenu de telles dérivées par le procédé habituel de réduction de l'équation à un système (cf. n° 1.3).

Diagonalisons le système (25) à $O(\lambda^{-1})$ près par la même méthode qu'au n° 1.3. Les valeurs propres de la matrice $T_0(x)$ sont égales à $p_1(x), \ldots, p_{2n}(x)$. La matrice $T_0(x)$ d'éléments

$$(T_0)_{jk} = p_k^{j-1}, \quad (T_0)_{n+j,\,k} = p_k^{n-j+1} \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m q_{j-m-1} p_k^{2m},$$

où $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, réduit la matrice $A(x)$ à la forme diagonale. Les éléments de la matrice inverse sont

$$(T_0^{-1})_{j,\,n-k} = (-1)^k p_j^{n-k} (l_p(x, p_j))^{-1} \sum_{m=0}^{k} (-1)^m q_{k-m} p_j^{2m},$$
$$0 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$(T_0^{-1})_{j,\,n+k} = (-1)^{k+1} p_j^{n-k} (l_p(x, p_j))^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2n.$$

Par ailleurs,

$$\left(T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx}\right)_{jj} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln l_p(x, p_j), \tag{26}$$
$$\left(T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx}\right)_{jk} = (p_j - p_k)^{-1} l_p^{-1}(x, p_j) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m q'_m (p_j p_k)^{n-m}, \; j \neq k.$$

Construisons la matrice $T_1(x)$ à l'aide de la formule (15) ; la transformation (13) ramène le système (24) à la forme

$$w' = [\lambda \Lambda_0 + \Lambda_1 + O(\lambda^{-1})]\, w,$$

où

$$\Lambda_0(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_{2n}(x)),$$
$$\Lambda_1(x) = -\operatorname{diag}\left(T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx}\right).$$

Si l'on néglige $O(\lambda^{-1})$, on obtient un système intégrable et

$$w_j = c_j \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0).$$

Ce qui nous donne une solution asymptotique formelle de la forme (23).

Exemples. 1. Considérons l'équation binomiale

$$(-1)^n (p(x)\, y^{(n)})^{(n)} + \lambda^{2n} q(x)\, y = 0.$$

Supposons que $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$, $x \in I$. L'équation (20) ne possède pas dans ces conditions de point de retour. On a

$$l(x, p) = p(x)\, p^{2n} + (-1)^n q(x), \quad l_p(x, p) = 2np(x)\, p^{2n-1},$$

$$p_j(x) = \sqrt[n]{(-1)^{n+1} \frac{q(x)}{p(x)}},$$

où la racine prend toutes ses valeurs possibles. Si la condition 2) du nº 1.4 est satisfaite, il existe un système fondamental de solutions de la forme

$$y_j(x, \lambda) \sim p^{-1/2}(x) \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{n-1/2} \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt[2n]{(-1)^{n+1} \frac{q(t)}{p(t)}}\, dt\right\}.$$

Si $p(x)$ et $q(x)$ sont réelles, la condition 2) est remplie.

2. Considérons l'équation d'ordre quatre de forme auto-adjointe

$$(q_0(x)\, y'')'' - \lambda^2 (q_1(x)\, y')' + \lambda^4 q_2(x)\, y = 0,$$

où $q_0(x) \neq 0$. On a

$$l(x, p) = q_0(x)\, p^4 - q_1(x)\, p^2 + q_2(x),$$
$$l_p(x, p) = 4q_0(x)\, p^3 - 2q_1(x)\, p.$$

En éliminant p entre les équations $l = 0$ et $l_p = 0$, on constate que les points de retour sont racines de l'une des équations

$$q_2(x) = 0, \quad q_1^2(x) - 4q_0(x)\, q_2(x) = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont égales à

$$p_j(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2q_0(x)} \left(q_1(x) \pm \sqrt{D(x)}\right)},$$
$$D(x) = q_1^2(x) - 4q_0(x)\, q_2(x).$$

Si $q_2(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, $x \in I$ et si est satisfaite la condition 2), il existe un système fondamental de solutions de la forme

$$y_j(x, \lambda) \sim p_j^{-1/2}(x)\, D^{-1/4}(x) \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt\right\}.$$

2.2. *Equations d'ordre impair.* Considérons l'équation

$$ly \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \lambda^{2(n-k)} i \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k+1} (q_{k+1}(x)\, y^{(k)}) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d}{dx}\right)^{k} (q_{k+1}(x)\, y^{(k+1)})\right] = 0 \quad (27)$$

sur l'intervalle I avec les mêmes conditions sur les coefficients qu'au n° 2.1. On admet également que $q_{n+1}(x) \neq 0$, $x \in I$. Si tous les coefficients de l'équation (27) sont réels, l'opérateur L défini sur le domaine $D(L) = C_0^\infty(I)$ par la formule $Ly = ly$ est symétrique. L'équation

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k+1} [2q_{k+1}(x) p^{2k+1} + q'_{k+1}(x) p^{2k}] = 0 \quad (28)$$

s'appelle *caractéristique*. Introduisons les notations

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln l_p(p_j(x), x) + \\ + l_p^{-1}(p_j(x), x) \sum_{l=0}^{n} (-1)^n q'_{l+1}(x) p_j^{2l}(x), \quad (29)$$

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\, dt\right\},$$

où $p_1(x), \ldots, p_{2n+1}(x)$ sont les racines de l'équation (28).

Si les conditions 1) et 2) du n° 1.1 sont satisfaites, l'équation (27) admet la solution

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k} a_{jk}(x) + O(\lambda^{-N-1})\right], \quad (30)$$

où $N \geqslant 1$ est quelconque, $a_{jk}(x) \in C^\infty(I)$ et la majoration du résidu est uniforme en $x \in I$. Tout ce qui a été dit au n° 1 sur les solutions de l'équation (1) est valable pour celles de l'équation (27).

Exemple. Soient $n = 1$ et $q_2(x) \equiv 1$; l'équation (27) et l'équation caractéristique sont alors de la forme

$$2y''' - \lambda^2 (2q_1(x) y' + q'_1(x) y) = 0,$$
$$l(x, p) \equiv 2p^2 - 2q_1(x) p - q'_1(x) = 0.$$

Le terme principal de la représentation asymptotique de la solution y_j est égal à

$$y_j(x, \lambda) = \sqrt{\frac{p_j(x)}{4q_1(x) p_j(x) + 3q'_1(x)}} \times \\ \times \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \frac{p_j(t) q'_1(t)}{4q_1(t) p_j(t) + 3q'_1(t)}\, dt\right\} [1 + O(\lambda^{-1})].$$

§ 2. Systèmes d'équations sur un intervalle fini

1. Système d'équations du premier ordre. Considérons le système de n équations

$$A(x)\,y' = \lambda B(x)\,y \tag{1}$$

sur l'intervalle $I = [a, b]$, où $\lambda > 0$ est un grand paramètre, $A(x)$ et $B(x)$ des matrices d'ordre n dont les éléments sont des fonctions complexes de classe $C^\infty(I)$. On admet que la matrice $A(x)$ est régulière, c'est-à-dire que

$$\det A(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Au système (1) est associée l'équation caractéristique

$$\det \| B(x) - pA(x) \| = 0. \tag{2}$$

Un point x_0 est par définition un *point de retour* du système (1) si l'équation (2) admet une racine multiple pour $x = x_0$. Dans ce paragraphe on admettra que le système (1) ne possède pas de point de retour pour $x \in I$, c'est-à-dire que les racines $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ de l'équation caractéristique sont distinctes pour tous les $x \in I$.

1.1. *Quelques éléments d'algèbre linéaire.* Soient A et B des matrices constantes d'ordre n à éléments complexes, p un nombre complexe, $\det A \neq 0$. Considérons un *faisceau linéaire de matrices*, c'est-à-dire une famille $B - pA$ de matrices dépendant d'un paramètre p. Si

$$(B - p_0A)\,e = 0,$$

où e est un vecteur non nul, le nombre p_0 s'appelle *valeur propre*, le vecteur e, *vecteur propre* du faisceau. En particulier, si $A = I$, alors p_0 est une valeur propre et e un vecteur propre de la matrice B.

Les valeurs propres du faisceau sont racines de l'équation caractéristique

$$\det (B - pA) = 0.$$

On admettra que les valeurs propres $p_1, \ldots, p_n$ du faisceau sont distinctes. Les vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ sont alors linéairement indépendants. On rappelle que e_k est un vecteur colonne.

Un vecteur ligne $e^* \neq 0$ s'appelle *vecteur propre à gauche* du faisceau si

$$e^*(B - p_0A) = 0$$

pour un certain p_0. Il est évident que e^{*T} est un vecteur propre du faisceau conjugué $B^T - pA^T$. Les valeurs propres des faisceaux initial et conjugué sont confondues et donc les vecteurs propres à

gauche $e_1^*, \ldots, e_n^*$ sont linéairement indépendants. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ seront appelés *vecteurs propres à droite* du faisceau $B - pA$.

On a les identités

$$e_j^* A e_k = 0, \quad j \neq k.$$

En effet, en multipliant l'identité $(B - p_k A) e_k = 0$ à gauche par e_j^*, on trouve $(p_j - p_k) e_j^* A e_k = 0$. En outre,

$$e_j^* A e_j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

sinon les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ seraient linéairement dépendants.

Considérons le système d'équations

$$(B - p_j A) f = g,$$

où f est un vecteur inconnu. Le déterminant étant nul, ce système n'admet pas une solution pour tout g, plus exactement, pour qu'il en admette une, il est nécessaire et suffisant que

$$e_j^* g = 0. \tag{4}$$

Pour prouver la condition nécessaire, il suffit de multiplier les deux membres du système à gauche par le vecteur e_j^*. La condition suffisante résulte par exemple du troisième théorème de Fredholm.

Considérons le faisceau $B(x) - pA(x)$ dont les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sont distinctes pour $x \in I$. Alors

1) les fonctions $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sont indéfiniment dérivables pour $x \in I$;

2) les vecteurs propres à droite $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ et à gauche $e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)$ peuvent être choisis indéfiniment dérivables pour $x \in I$.

Dans la suite on se servira de tels vecteurs propres.

Considérons le faisceau matriciel polynomial $L(p) = p^m A_0 + p^{m-1} A_1 + \ldots + A_m$, où A_j sont des matrices d'ordre n constantes, $\det A_0 \neq 0$. Les vecteurs propres à droite et à gauche sont définis par les conditions respectives

$$L(p) e = 0, \quad e^* L(p) = 0.$$

Les valeurs propres du faisceau sont les racines de l'équation caractéristique

$$\det (p^m A_0 + p^{m-1} A_1 + \ldots + A_m) = 0,$$

les valeurs propres du faisceau $L(p)$ et de son conjugué $L^T(p)$ coïncident. Supposons que les valeurs propres $p_1, \ldots, p_{nm}$ du faisceau $L(p)$ sont distinctes. Les vecteurs propres à droite $\{e_1, \ldots \ldots, e_{nm}\}$ sont alors linéairement indépendants; il en est de même des vecteurs propres à gauche. La condition nécessaire et suffi-

sante pour que le système $L(p_j)f = g$ admette une solution coïncide avec (4). En outre, dans ce cas

$$e_j^* \frac{\partial L}{\partial p}(p_j)\, e_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, nm. \tag{5}$$

Considérons le faisceau $L(x, p) = p^m A_0(x) + \ldots + A_m(x)$, où $A_j(x) \in C^\infty(I)$, $\det A_0(x) \neq 0$. Si les valeurs propres du faisceau sont distinctes pour $x \in I$, les propositions 1) et 2) indiquées ci-dessus pour un faisceau linéaire sont valables.

1.2. *Solutions asymptotiques formelles.* On cherchera une solution asymptotique formelle du système (1) sous la forme

$$y = \exp\{\lambda S(x)\} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} f_k(x). \tag{6}$$

En portant cette série dans (1), on trouve que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} [\lambda (A(x) S'(x) - B(x)) f_k(x) + A(x) f_k'(x)] = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des puissances de λ^{-1}, on obtient le système récurrentiel d'équations

$$\begin{aligned} &[B(x) - S'(x) A(x)] f_0(x) = 0, \\ &[B(x) - S'(x) A(x)] f_{k+1}(x) = -A(x) f_k'(x), \quad k \geqslant 0. \end{aligned} \tag{7}$$

De la première équation il suit que $S'(x)$ est une valeur propre et $f_0(x)$ un vecteur propre (à droite) du faisceau $B(x) - pA(x)$. On rappelle que les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sont par hypothèse distinctes pour $x \in I$. Posons $S'(x) = p_j(x)$. Alors $f_0(x) = \alpha(x) e_j(x)$, où $e_j(x)$ est un vecteur propre du faisceau, $\alpha(x)$ une fonction inconnue, $\alpha(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

Tirons la fonction $\alpha(x)$ de la deuxième équation (7):

$$[B(x) - p_j(x) A(x)] f_0(x) = -A(x) f_0'(x).$$

La matrice $B(x) - p_j(x) A(x)$ de ce système étant singulière, celui-ci n'admet pas de solution pour tout second membre. La condition nécessaire et suffisante (4) pour que ce système admette une solution s'écrit:

$$e_j^*(x) A(x) f_0'(x) = 0.$$

D'où

$$\alpha(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{e_j^*(t) A(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) A(t) e_j(t)} dt\right\},$$

où $e'_j(t) = \frac{d}{dt} e_j(t)$. On remarquera que le dénominateur est différent de zéro en vertu de (3).

Nous trouvons ainsi la fonction $S(x)$ et la fonction vectorielle $f_0(x)$, de sorte que le terme principal $\tilde{y}_j$ de la représentation asymptotique est égal à

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{e_j^*(t)\,A(t)\,e'_j(t)}{e_j^*(t)\,A(t)\,e_j(t)}\,dt\right\}[e_j(x) + O(\lambda^{-1})]. \tag{8}$$

A première vue il peut sembler que $\tilde{y}_j$ dépend du choix des vecteurs propres $e_j(x)$ et $e_j^*(x)$. Montrons que la fonction vectorielle

$$h(x) = \alpha(x)\, e_j(x)$$

est un invariant au sens suivant: si l'on remplace e_j et e_j^* par $\tilde{e}_j$ et $\tilde{e}_j^*$ respectivement, alors $\tilde{h}(x) = \text{const}\, h(x)$. En effet, si $\tilde{e}_j$ et $\tilde{e}_j^*$ est un autre couple de vecteurs propres, $\tilde{e}(x) = \beta(x)\, e(x)$ et $\tilde{e}^*(x) = \gamma(x)\, e^*(x)$ (pour abréger on a omis l'indice j), où $\beta, \gamma \in C^\infty(I)$ et $\beta(x) \neq 0$, $\gamma(x) \neq 0$ pour $x \in I$. On a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\tilde{e}^* A \tilde{e}'}{\tilde{e} A \tilde{e}'}\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{e^* A e'}{e^* A e}\,dt + \ln \beta(x) + c,$$

de sorte que

$$\tilde{h}(x) = \alpha(x)\,\beta^{-1}(x)\, e^c \tilde{e}(x) = \text{const}\, h(x).$$

Une vérification directe est superflue. En effet, la solution asymptotique formelle étant unique, chaque terme $\exp\{\lambda S(x)\}\, f_k(x)$ de la série (6) est un invariant au sens indiqué. Bien plus, si l'on remplace les bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ par d'autres, on constate que tous les termes de la série (6) sont multipliés par la même constante.

Trouvons $f_1(x)$. On a

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, e_k(x),$$

où $\alpha_k(x)$ sont des fonctions inconnues. En portant ce développement dans la deuxième des équations (7), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_j)\,\alpha_k A e_k = -A f'_0.$$

En multipliant cette identité à gauche par e_l^* et en tenant compte de ce que $e_l^* A e_k = 0$ pour $k \neq l$ (cf. n° 1.1), on obtient

$$\alpha_k(x) = \frac{e_k^*(x) A(x) f_0'(x)}{p_j(x) - p_k(x)}, \quad k \neq j.$$

La fonction $\alpha_1(x)$ reste indéfinie. Elle se détermine comme $\alpha(x)$ à partir de la condition de solubilité de l'équation suivante, c'est-à-dire à partir de la relation $e_j^* A f_1' = 0$.

En poursuivant cette procédure, on peut trouver de proche en proche les fonctions vectorielles $f_2(x)$, $f_3(x)$. Toutes les coordonnées de la fonction vectorielle $f_k(x)$ dans la base $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$, hormis la j-ième, se déterminent à partir de la k-ième équation. La j-ième coordonnée se tire de la condition de solubilité de la $(k+1)$-ième équation. On construit ainsi une solution asymptotique formelle du système (1) de la forme (2).

Il existe une autre méthode de construction d'une solution asymptotique formelle. Cherchons une matrice

$$T(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) \lambda^{-k}$$

telle que la transformation

$$y = T(x, \lambda) z$$

diagonalise le système (1), c'est-à-dire le ramène à la forme

$$z' = \lambda \Lambda z, \quad \Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \Lambda_k(x), \tag{9}$$

où $\Lambda_k(x)$ sont des matrices diagonales. Le système (9) est intégrable.

Considérons un système de forme plus générale que (1):

$$A(x, \lambda^{-1}) y' = \lambda B(x, \lambda^{-1}) y, \tag{10}$$

où les matrices A et B admettent les développements asymptotiques suivants:

$$A(x, \lambda^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A_k(x), \quad B(x, \lambda^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} B_k(x).$$

On admet que la matrice $A_0(x)$ est régulière, les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ du faisceau $B_0(x) - pA_0(x)$, distinctes, et les matrices A et B, assujetties à des conditions ordinaires de dérivabilité. Traitons d'abord le cas où $A(x) = I$ et la matrice $B_0(x)$ est diagonale, d'éléments diagonaux $p_1(x), \ldots, p_n(x)$. Alors $\Lambda_0(x) = B_0(x)$ dans la formule (9) et l'on peut poser $T_0(x) = I$. La substitution $y = Tz$ ramène le système (10) à la forme

$$T \frac{dz}{dx} + \frac{dT}{dx} z = \lambda B z,$$

et comme il doit être confondu avec le système (9), la matrice T doit satisfaire l'équation matricielle

$$\frac{dT}{dx} = \lambda (BT - T\Lambda).$$

En portant dans cette formule les développements asymptotiques des matrices T et Λ, on obtient le système récurrentiel d'équations

$$B_0 - \Lambda_0 = 0, \quad \sum_{j=0}^{k} (B_{k-j}T_j - T_j\Lambda_{k-j}) = \frac{dT_{k-1}}{dx}, \quad k \geqslant 1.$$

Ceci étant, sont inconnues non seulement les matrices T_k mais aussi les matrices Λ_k, $k \geqslant 1$. La première équation est vérifiée identiquement, la deuxième est de la forme

$$\Lambda_0 T_1 - T_1 \Lambda_0 = \Lambda_1 - B_1.$$

La matrice Λ_0 étant diagonale, tous les éléments diagonaux de la matrice $\Lambda_0 T_1 - T_1\Lambda_0$ sont nuls. Donc

$$\Lambda_1 = \operatorname{diag} B_1, \quad (T_1)_{jk} = \frac{(B_1)_{jk}}{p_k - p_j}, \quad j \neq k.$$

Les éléments $(T_1)_{jj}$ restent indéfinis; posons-les égaux à zéro. La k-ième équation est de la forme

$$\Lambda_0 T_k - T_k \Lambda_0 = \Lambda_k + C_k,$$

où C_k est une matrice inconnue. D'où l'on déduit

$$\Lambda_k = -\operatorname{diag} C_k, \quad (T_k)_{jl} = \frac{(C_k)_{jl}}{p_j - p_l}, \quad j \neq l;$$

quant aux éléments $(T_k)_{jj}$, on admet qu'ils sont nuls. Nous avons ainsi construit la matrice cherchée $T(x, \lambda)$.

Revenons au système (10). Faisons la substitution $y = T_0(x)\tilde{z}$, où la matrice $T_0(x)$ diagonalise la matrice $A_0^{-1}(x) B_0(x)$, c'est-à-dire que $T_0^{-1}A_0^{-1}B_0T_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n)$. Le système (10) devient alors

$$\tilde{z}' = C(x, \lambda)\tilde{z}, \quad C = \lambda T_0^{-1}A^{-1}BT_0 - T^{-1}\frac{dT_0}{dx}.$$

Conformément au choix de la matrice $T_0(x)$, la matrice C admet le développement asymptotique

$$C(x, \lambda) = \Lambda_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} C_k(x),$$

ce qui nous amène au cas traité ci-dessus.

1.3. *Conditions suffisantes d'existence de la représentation asymptotique des solutions.* Posons les conditions:

1) Le système (1) ne possède pas de point de retour pour $x \in I$, c'est-à-dire que $p_j(x) \neq p_k(x)$, $j \neq k$, $x \in I$.

2) Les différences Re $[p_j(x) - p_k(x)]$ ne changent pas de signe pour j fixe, $k = 1, \ldots, n$, $x \in I$.

Introduisons la notation

$$y_{j0}(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \frac{e_j^*(t) A(t) e_j'(t)}{e_j^*(t) A(t) e_j(t)}\, dt\right\}.$$

On rappelle que $e_j^*(x)$ et $e_j(x)$ sont respectivement les vecteurs propres à gauche et à droite du faisceau matriciel $B(x) - pA(x)$.

Le système (1) admet une solution de la forme

$$y_j(x, \lambda) = y_{j0}(x, \lambda)\left[e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-j} f_{jk}(x) + O(\lambda^{-N})\right], \quad \lambda \to +\infty, \tag{11}$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, la fonction vectorielle $f_{jk}(x)$, de classe $C^\infty(I)$ pour tous les k et l'estimation du résidu, uniforme en $x \in I$. La formule asymptotique (11) peut être dérivée autant de fois qu'on le veut par rapport à x et à λ avec respect de l'estimation uniforme en x du résidu. Pour le terme principal de la représentation asymptotique on a en particulier

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) = \lambda^m p_j^m(x)\, y_{j0}(x, \lambda)\, [e_j(x) + O(\lambda^{-1})].$$

Si les conditions 1), 2) sont satisfaites pour tous les j, les solutions $y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$ sont linéairement indépendantes et forment un système fondamental pour $\lambda \gg 1$.

Exemples. 1. Soient $B(x)$ une matrice symétrique réelle de valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ distinctes, $A(x) \equiv I$. La condition 2) est satisfaite, puisque ces matrices sont réelles. D'autre part, on peut simplifier la formule (7) en prenant les vecteurs propres $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ réels et unités (et de classe $C^\infty(I)$). En effet, dans ce cas $e_k^*(x) = e_k^T(x)$ pour tous les k, ce qui résulte des identités

$$A^T(x)\, e_k(x) = A(x)\, e_k(x) = p_k(x)\, e_k(x),$$

$$e_k^I(x)\, A(x) = p(x)\, e_k^I(x), \quad e_k^T(x)\, e_k(x) = \delta_{jk}.$$

La dérivation de l'identité $e_k^T(x)\, e_k(x) = 1$ nous donne $e_k^*(x)\, e_k'(x) = 0$, et la formule (8) devient

$$y_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt\right\} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})]. \tag{12}$$

2. Supposons que $A(x) = I$ et $B(x)$ est une matrice hermitienne de valeurs propres distinctes; la condition 2) est alors satiseaite. Montrons qu'il existe des vecteurs propres $e_1(x), \ldots, e_n(x)$, $f_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)$ tels que

$$e_k^*(x)\, e_k'(x) \equiv 0. \tag{13}$$

Les solutions du système (1) sont alors justiciables de la formule asymptotique (12).

Choisissons une base orthonormale $\{g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$ de vecteurs propres de classe $C^\infty(I)$ telle que

$$\bar{g}_k^T(x)\, g_j(x) = \delta_{kj}, \quad x \in I.$$

La dérivation de ces identités nous donne

$$\operatorname{Re}(\overline{g_k^T(x)}, g_k(x)) \equiv 0.$$

La matrice $A(x)$ étant hermitienne, pour $g_k^*(x)$ on peut prendre le vecteur $\overline{g_k^T(x)}$; la condition (4) sera remplie. Posons

$$e_k(x) = e^{i\alpha_k(x)} g_k(x), \quad e_k^*(x) = \overline{e_k^T(x)}.$$

On a

$$\frac{d}{dx}(e_k^*(x)\, e_k(x)) = \overline{g_k^T(x)}\,(i\alpha_k'(x)\, g_k(x) + g_k'(x)) =$$

$$= i\alpha_k'(x) + \overline{g_k^T(x)}\, g_k'(x) = 0,$$

de sorte que

$$\alpha_k'(x) = -i\overline{g_k^T(x)}\, g_k'(x).$$

Le second membre de cette équation étant réel, la fonction $\alpha_k(x)$ peut être prise réelle.

3. Considérons le système

$$y' = i\lambda B(x)\, y,$$

où $B(x)$ est la matrice de l'exemple 2. Comme au § 1, n° 1.4, exemple 2, on démontre qu'il existe deux systèmes fondamentaux de solutions

$$\{y_1^+(x, \lambda), \ldots, y_n^+(x, \lambda)\}, \quad \{y_1^-(x, \lambda), \ldots, y_n^-(x, \lambda)\}.$$

Le développement asymptotique (8) est valable pour le premier lorsque $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, et pour le second lorsque $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda \leqslant 0$.

1.4. *Paramètres auxiliaires et λ complexes.* Considérons le système

$$A(x, \mu)\, y' = \lambda B(x, \mu)\, y,$$

où μ est un paramètre. Les résultats acquis ci-dessus sont valables pour ce système ; les formulations et conditions relatives aux matrices A et B revêtent le même caractère qu'au § 1, n° 1.4.

2. Systèmes du second ordre.

2.1. *Systèmes binomiaux.* Considérons le système de n équations

$$y'' - \lambda^2 A(x)\, y = 0 \tag{14}$$

sur l'intervalle I avec une matrice $A(x)$ dont les éléments sont de classe $C^\infty(I)$. L'équation caractéristique est de la forme

$$\det(p^2 I - A(x)) = 0.$$

Les racines de cette équation sont égales à $\pm\sqrt{\mu_1(x)}, \ldots$ $\ldots, \pm\sqrt{\mu_n(x)}$, où $\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)$ sont les valeurs propres de la matrice $A(x)$. Le système (14) admet des points de retour de deux types.

1. x_0 est un point de retour si $\mu_j(x_0) = 0$ pour un certain j. Les racines $\sqrt{\mu_j(x)}$ et $-\sqrt{\mu_j(x)}$ coïncident en ce point.

2. x_0 est un point de retour si $\mu_j(x_0) = \mu_k(x_0)$, $j \neq k$. Les racines $\sqrt{\mu_j(x)}$, $\sqrt{\mu_k(x)}$ et $-\sqrt{\mu_j(x)}$, $-\sqrt{\mu_k(x)}$ sont confondues en ce point.

Posons $p_j(x) = \sqrt{\mu_j(x)}$, $p_{n+j}(x) = -\sqrt{\mu_j(x)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Supposons que le système (15) ne possède pas de point de retour pour $x \in I$. Choisissons des bases $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ et $\{e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)\}$ de vecteurs propres à droite et à gauche telles que

$$e_j^*(x)\, e_k(x) = \delta_{jk}. \tag{15}$$

Notons

$$\tilde{y}_j^{\pm}(x, \lambda; x_0) =$$
$$= \mu_j^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\mu_j(t)}\, dt - \int_{x_0}^{x} e_j^*(t) \frac{de_j(t)}{dt}\, dt\right\}. \tag{16}$$

Supposons que les différences $\operatorname{Re}(\sqrt{\mu_j(x)} \pm \sqrt{\mu_k(x)})$ ne changent pas de signe pour $x \in I$. Le système (14) possède alors $2n$ solutions

$$y_j^{\pm}(x, \lambda) = \tilde{y}_j^{\pm}(x, \lambda; x_0)\left[e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(x) + O(\lambda^{-N})\right], \tag{17}$$
$$1 \leqslant j \leqslant n, \quad \lambda \to +\infty,$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, $e_{jk}(x) \in C^\infty(I)$. Ces solutions forment un système fondamental pour $\lambda \gg 1$. Si $A(x)$ est une matrice symétrique réelle, la formule (16) devient plus simple:

$$\tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) = \mu_j^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\mu_j(t)}\, dt\right\}. \qquad (18)$$

Le développement asymptotique (17) peut être dérivé autant de fois qu'on le veut par rapport à x et λ. Ces résultats sont valables aussi dans le cas où λ est complexe et la matrice A dépend du paramètre ν: $A = A(x, \nu)$, et se formulent comme au § 1, n° 1.4. Cette remarque concerne tous les systèmes étudiés plus bas.

2.2. *Systèmes de forme auto-adjointe.* Considérons le système d'équations

$$(A(x) y')' - \lambda^2 B(x) y = 0, \qquad (19)$$

où $A(x)$, $B(x) \in C^\infty(I)$, $\det A(x) \neq 0$ pour $x \in I$. L'équation caractéristique est de la forme

$$\det(p^2 A(x) - B(x)) = 0,$$

et ses racines sont

$$p_j(x) = \sqrt{\mu_j(x)}, \quad p_{n+j}(x) = -\sqrt{\mu_j(x)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

où $\mu_j(x)$ sont les valeurs propres du faisceau $\mu A(x) - B(x)$. Supposons que $\mu_j(x)$ satisfont les conditions formulées au n° 2.1 et soient $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$, $\{e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)\}$ des bases de vecteurs propres à droite et à gauche de ce faisceau, normées par les conditions

$$e_j^*(x) A(x) e_k(x) = \delta_{jk}. \qquad (20)$$

Notons

$$\tilde{y}_j^\pm(x, \lambda; x_0) = \mu_j^{-1/4}(x) \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{\mu_j(t)}\, dt \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [e^*(t) A(t) De(t) - De^*(t) A(t) e(t)]\, dt \right\}, \qquad (21)$$

où $D = d/dx$. Le système (19) admet $2n$ solutions de la forme (17), où $\tilde{y}_j^\pm$ sont de la forme (20).

2.3. *Systèmes de forme générale.* Considérons le système

$$A(x) y'' + \lambda B(x) y' + \lambda^2 C(x) y = 0 \qquad (22)$$

sur l'intervalle I, où $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^\infty(I)$, $\det A(x) \neq 0$ pour $x \in I$. L'équation caractéristique est de la forme

$$\det(p^2 A(x) + pB(x) + C(x)) = 0.$$

On admettra que les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ du faisceau $L(p) = p^2A(x) + pB(x) + C(x)$ sont distinctes pour $x \in I$ et que les différences $\operatorname{Re}[p_j(x) - p_k(x)]$, $1 \leqslant j, k \leqslant 2n$, ne changent pas de signe pour $x \in I$. Soient $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$, $\{e_1^*(x), \ldots \ldots, e_n^*(x)\}$ des bases de vecteurs propres à droite et à gauche normées par les conditions

$$e_j^*(x)\,[2p_j(x)\,A(x) + B(x)]\,e_k(x) = \delta_{jk}. \tag{23}$$

Notons

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\,dt\right\}, \tag{24}$$

$$p_j^{(1)}(x) = -e_j^*(x)\,[p_j'(x)\,A(x)\,e_j(x) + 2p_j(x)\,A(x)\,e_j'(x) + B(x)\,e_j'(x)].$$

Le système (22) admet $2n$ solutions de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda; x_0)\left[e_j(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(x) + O(\lambda^{-N})\right], \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2n, \quad \lambda \to +\infty, \tag{25}$$

où $N \geqslant 1$ est arbitraire, $e_{jk}(x) \in C^\infty(I)$. Ces solutions forment un système fondamental pour $\lambda \gg 1$.

3. Systèmes de n équations d'ordre m. Considérons le système

$$y^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-k} A_k(x)\,y^{(k)} = 0 \tag{26}$$

sur l'intervalle I, où $y(x)$ est un n-vecteur, $A_k(x)$, des matrices d'ordre n d'éléments complexes de classe $C^\infty(I)$. L'équation caractéristique est de la forme

$$\det L(x, p) = 0, \quad L(x, p) = p^m + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x)\,p^k.$$

On admettra que les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_{nm}(x)$ du faisceau L sont distinctes pour tous les $x \in I$ et que les différences $\operatorname{Re}[p_j(x) - p_k(x)]$, $1 \leqslant j, k \leqslant mn$, ne changent pas de signe sur I. Soient $e_j(x)$ et $e_j^*(x)$, $1 \leqslant j \leqslant mn$ des vecteurs propres à droite et à gauche du faisceau L. Notons

$$\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\,dt\right\},$$

$$p_j^{(1)}(x) = -\left[e_j^* \frac{\partial L}{\partial p} De_j + \frac{1}{2} Dp_j \frac{\partial^2 L}{\partial p^2} e_j\right]\left[e_j^* \frac{\partial L}{\partial p} e_j\right]^{-1}, \tag{27}$$

où les valeurs des vecteurs e_j et e_j^* sont prises au point x, les valeurs de L_p et L_{pp}, au point $(x, p_j(x))$ et $D = d/dx$. Le système (26) possède mn solutions de la forme (25), où $p_j^{(1)}(x)$ sont de la forme (27), $N \geqslant 1$ est arbitraire et ces solutions forment un système fondamental pour $\lambda \gg 1$.

§ 3. Equations sur un intervalle infini

1. Equations à coefficients quasi constants. Considérons l'équation

$$ly \equiv y^{(n)} + q_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + q_0(x)\, y = 0 \tag{1}$$

sur le demi-axe $\mathbf{R}^+ = [0, \infty[$, où les coefficients $q_k(x)$ sont continus et à valeurs complexes. L'équation caractéristique s'écrit

$$l(x, p) \equiv p^n + q_{n-1}(x) + \ldots + q_0(x) = 0. \tag{2}$$

La représentation asymptotique des solutions de l'équation (1) lorsque $x \to \infty$ dépend essentiellement du comportement à l'infini des racines $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ de l'équation caractéristique.

Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont de la forme

$$q_k(x) = q_k^0 + r_k(x), \tag{3}$$

où q_k^0 sont des constantes, et sont satisfaites les conditions

1) $$\int_0^\infty |\, r_k(x)\,|\, dx < \infty, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

2) Les racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de l'équation

$$\rho^n + q_{n-1}^0 \rho^{n-1} + \ldots + q_0^0 = 0 \tag{4}$$

sont distinctes.

L'équation (1) admet un système fondamental $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tel que

$$y_j(x) = e^{\rho_j x}\, [1 + o(1)], \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Cette représentation asymptotique peut être dérivée n fois, c'est-à-dire que

$$y_j^{(k)}(x) = \rho_j^k e^{\rho_j x}\, [1 + o(1)], \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Ce résultat est une conséquence du théorème de Levinson relatif aux systèmes L-diagonaux (chap. II, § 5). Le résultat suivant découle du théorème de Perron (chap. II, § 5). Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont de la forme (3) et que sont remplies les conditions

3) $$\lim_{x \to \infty} r_k(x) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

4) $\operatorname{Re} \rho_j \neq \operatorname{Re} \rho_k$ pour tous les $j \neq k$, où ρ_j sont les racines de l'équation (4).

L'équation (1) admet alors un système fondamental $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tel que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_k'(x)}{y_k(x)} = \rho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{6}$$

Cette formule peut être mise sous la forme

$$y_k(x) = \exp\{\rho_k x + o(x)\}, \quad x \to \infty,$$

si bien que la représentation asymptotique (6) est assez grossière.

Des résultats analogues sont valables pour l'équation auto-adjointe d'ordre n

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[q_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}\right] + \\ + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[q(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] + \ldots + q_n(x)\,y = 0. \tag{7}$$

Supposons que les coefficients $q_k(x)$ sont de la forme (3) pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\frac{1}{q_0(x)} = q_0^0 + r_0(x), \quad q_0^0 \neq 0,$$

et que sont remplies la condition 1) pour $k = 0, 1, \ldots, n$ et la condition 2) pour les racines de l'équation

$$q_0^0 \rho^{2n} - q_2^0 \rho^{2n-2} + \ldots + (-1)^n q_n^0 = 0.$$

L'équation (7) admet alors un système fondamental $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de la forme (5) et des formules analogues sont valables pour les quasi-dérivées $y^{[k]}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$.

2. Equation (1) à racines asymptotiquement simples. Supposons que pour un certain j existent les limites

$$\lim_{x\to\infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk}, \quad 1 \leqslant j, \quad k \leqslant n, \tag{8}$$

finies ou infinies. Les racines $p_j(x)$ de l'équation caractéristique (2) sont dites *asymptotiquement simples* si $c_{jk} \neq 1$ pour tous les $k \neq j$.

Partout dans la suite on admettra que $q_k(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

2.1. *Racines du même ordre.* Supposons que $q_0(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$, toutes les racines de l'équation (2) sont asymptotiquement simples et les $c_{jk} \neq 0, 1$ pour tous les $j, k, j \neq k$. Il existe alors les limites finies

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x)\, q_0^{-1+k/n}(x) = a_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{9}$$

et la représentation asymptotique des racines est de la forme

$$p_j(x) = [\rho_j + o(1)]\, q_0^{1/n}(x), \quad x \to \infty, \tag{10}$$

où $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les racines de l'équation

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + a_1\rho + 1 = 0. \tag{11}$$

On a la proposition réciproque: si la représentation asymptotique de toutes les racines de l'équation (2) est de la forme (10), où $\rho_1, \ldots$ $\ldots, \rho_n$ sont des nombres distincts non nuls, alors les limites (9) existent et sont finies.

La condition (9) est satisfaite par l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, q(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, q^{n-1}(x)\, y' + q^n(x)\, y = 0, \tag{12}$$

où $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des constantes, $q(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$. Si les coefficients $q_0(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ de l'équation (1) sont des polynômes de x et si la condition (9) est réalisée, le point $z = \infty$ est un point singulier irrégulier pour l'équation (1) (chap. I, § 3, n° 1.1). Dans le cas général, la condition (9) exprime que tous les termes $q_k(x)\, y^{(k)}$ de l'opérateur l sont de « même force » pour $x \gg 1$, c'est-à-dire qu'ils influent tous, en général, sur la représentation asymptotique des solutions.

Posons

$$\begin{gathered} p_j^{(1)}(x) = -\frac{p_j'(x)}{2} \frac{l_{pp}(x, p_j(x))}{l_p(x, p_j(x))}, \\ \tilde{y}_j(x) = \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)]\, dt \right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Introduisons les conditions:

1) Pour un certain j et pour tous les $k \neq j$ les fonctions $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x)$, où

$$\varphi_{jk}(x) = p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x), \tag{14}$$

ne changent pas de signe pour $x \gg 1$.

2) $$\int^{\infty} \alpha(x)\, dx < \infty,$$

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(|q_k'|^2\, |q_0|^{-2+(2k-1)/n} + |q_k''|\, |q_0|^{-1+(k-1)/n} \right).$$

Si les conditions 1), 2) et (9) sont satisfaites et si l'équation (11) ne possède pas de racines multiples, l'équation (1) admet une solution $y_j(x)$ telle que

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x)\, [1 + o(1)], \quad x \to \infty. \tag{15}$$

Si, par ailleurs, on a la condition

3) $$q_k'(x) = o\left(q_0^{1-(k-1)/n}(x)\right), \quad x \to \infty,$$

pour tous les j, alors $p_l^{(1)}(x) = o(p_l(x))$ lorsque $x \to \infty$ pour tous les l, et pour $0 \leqslant m \leqslant n$ on a

$$y_j^{(m)}(x) = p_j^{(m)}(x)\,[1 + o(1)], \quad x \to \infty. \tag{16}$$

Si la condition 1) est satisfaite pour tous les j, l'équation (1) admet un système fondamental de solutions $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ de la forme (15).

Les démonstrations sont basées sur le fait suivant. L'équation (1) est équivalente au système (10) du § 1 :

$$z' = A(x)\,z, \quad z = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^T.$$

Soient $T_0(x)$ et $T_1(x)$ les matrices construites au § 1, n° 1. La transformation $z = T_0(x)(I + T_1(x))\,w$ ramène alors le système à une forme L-diagonale, après quoi il reste à appliquer le théorème de Levinson (chap. II, § 5). Cette remarque concerne aussi les n°s 2.2, 3.1 de ce paragraphe.

La condition 1) a été discutée au § 8, chap. I; analysons les conditions 2) et 3) sur l'exemple de l'équation (12). Dans ce cas $q_0(x) = q^n(x)$ et les conditions 2) et 3) deviennent

$$\int^{\infty} \left(\left| \frac{q_0'^2(x)}{q_0^{2+1/n}(x)} \right| + \left| \frac{q_0''(x)}{q_0^{1+1/n}(x)} \right| \right) dx < \infty.$$

Pour l'équation $y'' + q(x)\,y = 0$ ces conditions sont confondues avec les conditions de validité de l'approximation WKB, indiquées au § 6 du chap. II. Si $q_0(x) = x^{\alpha}$, les conditions 2) et 3) sont satisfaites pour $\alpha > -n$. Supposons que les coefficients $q_0(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ de l'équation (1) sont des fonctions analytiques qui sont holomorphes, soit possèdent un pôle au point à l'infini $z = \infty$. Des conditions (9) et 2) il s'ensuit alors que le point $z = \infty$ est un point singulier irrégulier de l'équation (1) et que la condition 3) est réalisée.

Pour l'équation (12) les conditions 2) et 3) expriment que la fonction $q(x)$ se comporte de façon assez régulière à l'infini et peut décroître mais moins vite que x^{-1}. Ces conditions sont satisfaites, par exemple, par les fonctions $q(x) = e^{ax^{\alpha}}$ et $q(x) = x^{\beta}(\ln x)^{\gamma}$, où $a \neq 0$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > -1$, γ est réel quelconque ou $\beta = -1$, $\gamma > 1$. En termes de racines de l'équation caractéristique (2) les conditions 2) et 3) peuvent être mises sous la forme

$$\int^{\infty} \left[\frac{|p_j'|^2}{|p_j|^3} + \frac{|p_j''|}{|p_j|^2} \right] dx < \infty, \tag{17}$$

$$p_j'(x) = o(p_j^2(x)), \quad x \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

2.2. *Une racine a un ordre de croissance plus petit.* Supposons que

$$\lim_{x\to\infty} p_n(x)/p_k(x) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{18}$$

que toutes les autres limites (8) sont finies si $k \neq n$, et que $q_1(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$. Il existe alors les limites finies

$$\lim_{x\to\infty} q_k(x)\,[q_1(x)]^{(k-n)/(n-1)} = a_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{19}$$

où $a_0 = 0$. La représentation asymptotique des racines de l'équation (2) lorsque $x \to \infty$ est de la forme

$$p_k(x) = [\rho_k + o(1)]\, q_1^{1/(n-1)}(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{20}$$

$$p_n(x) = \frac{-q_0(x) + o(q_0(x))}{q_1(x)},$$

où $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ sont les racines de l'équation

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + a_2\rho + 1 = 0. \tag{21}$$

Remplaçons les conditions 2) et 3) par les suivantes:

2′) $\int\limits^{\infty} (|q_k'|^2\, |q_1|^{-2+(2k+1)/(n-1)} + |q_k''|\, |q_1|^{-1+k/(n-1)})\, dx < \infty$ pour tous les k.

3′) $q_k'(x) = o(q_1^{(n+1-k)/(n-1)}(x))$ lorsque $x \to \infty$ pour tous les k.

Si sont satisfaites la condition 1) pour tous les j, les conditions (19) et 2′) et si l'équation (21) n'admet pas de racines multiples, l'équation (1) possède un système fondamental de solutions $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ pour lequel est valable la formule asymptotique (15). Si de plus la condition 3′) est réalisée, alors $p_k^{(1)}(x) = o(p_k(x))$ lorsque $x \to \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et la formule (16) est valable pour les solutions $y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. On remarquera que la condition 2′) est équivalente à la première des conditions (17) relative à toutes les racines $p_k(x)$, et la condition 3′), à la deuxième des conditions (17) relative aux racines $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$. La formule (16) est valable pour les solutions $y_n(x)$ si les conditions ci-dessus sont remplies, à la seule différence que la condition 3′) est remplacée par la suivante:

$$\sum_{k=2}^{n} |q_k| \left|\frac{q_0}{q_1}\right|^{k-2} \sum_{j=0}^{n-1} |q_j'| \left|\frac{q_0}{q_1}\right|^{j} = o(q_0), \quad x \to \infty.$$

Dans ce cas $p_n^{(1)}(x) = o(p_n(x))$ lorsque $x \to \infty$.

On remarquera aussi que le terme principal de la représentation asymptotique de la solution de l'équation (1) lorsque $x \to +\infty$ est exactement de la même forme que celui de la solution de l'équation

(1) du § 1 lorsque $\lambda \to +\infty$, ce qui ressort de la comparaison des formules (15) et (5) du § 1.

2.3. *Estimations des résidus.* Supposons que les conditions (9), 1) et 2) du n° 2.2 sont satisfaites et que l'équation (11) ne possède pas de racines multiples. Mettons la formule (15) sous la forme

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x)\,[1 + \varepsilon_j(x)], \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon_j(x) = 0.$$

Indiquons les estimations du résidu $\varepsilon_j(x)$. Partageons les fonctions $\varphi_{j1}(x), \ldots, \varphi_{jn}(x)$ (cf. (14)) en deux classes.

1) $k \in H_1(j)$ si $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \leqslant 0$ pour $x \gg 1$.

2) $k \in H_2(j)$ si $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \geqslant 0$ pour $x \gg 1$.

Pour $x \gg 1$, on a alors

$$|\varepsilon_j(x)| \leqslant c \Big[\int_x^\infty \alpha(t)\,dt + \sum_{k\in H_2(j)}' \int_x^\infty \exp\{\operatorname{Re} \varphi_{kj}(t)\}\, \alpha(t)\,dt \Big]. \tag{22}$$

La fonction $\alpha(x)$ figure dans la condition 2). En particulier, si $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x) \leqslant 0$ pour $x \gg 1$ et tous les k, on a

$$|\varepsilon_j(x)| \leqslant c \int_x^\infty \alpha(t)\,dt.$$

Ce cas se présente lorsque, par exemple, tous les coefficients de l'équation (1) sont réels et toutes les racines de l'équation (2), imaginaires pures. Si l'on dispose d'une information plus exacte sur le comportement des coefficients de l'équation (1), on peut améliorer la majoration (22) par la méthode de Laplace d'estimation asymptotique des intégrales.

Exemple. Considérons l'équation (12) et supposons que $q(x) = x^\beta$, $\beta > -1$. Alors

$$\varepsilon_j(x) = O(x^{-\beta-1}), \quad x \to \infty.$$

On a des estimations analogues dans le cas traité au n° 2.2.

2.4. *Représentations asymptotiques doubles.* Considérons l'équation

$$ly \equiv y^{(n)} + \lambda q_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + \lambda^n q_0(x)\, y = 0, \tag{23}$$

où λ est un grand paramètre. Bornons-nous au cas où sont satisfaites les conditions (9), 1), 2), n° 2.2, et l'équation (11) ne possède pas de racines multiples, et soit $\tilde{y}_j(x, \lambda; x_0)$ la fonction définie par la formule (5) du § 1. Indiquons les conditions suffisantes d'existence d'une solution de l'équation (23):

$$y_j(x, \lambda) = \tilde{y}_j(x, \lambda;\ x_0)\,[1 + \lambda^{-1} \varepsilon_j(x, \lambda)] \tag{24}$$

telle que le résidu satisfasse la majoration

$$|\varepsilon_j(x, \lambda)| \leqslant k(x), \quad \lim_{x \to \infty} k(x) = 0 \tag{25}$$

pour $x \geqslant x_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$. La représentation asymptotique (24) est double : le résidu est petit et pour $\lambda \gg 1$ à $x \geqslant x_0$ fixe, et pour $x \to \infty$ à $\lambda \geqslant \lambda_0$ fixe.

L'équation (23) admet une solution $y_j(x, \lambda)$ de la forme (24), (25) si pour tous les $k \neq j$ sont satisfaites les conditions:

4) $\int^{\infty} |\operatorname{Re}[p_j(x) - p_k(x)]|\, dx = \infty$.
5) $|p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)| \leqslant c\, |p_j(x) - p_k(x)|$, $x \gg 1$.

Si ces conditions sont remplies pour tous les j, k, $j \neq k$, les solutions $y_1, \ldots, y_n$ de la forme (24) constituent un système fondamental pour $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$. Dans ce cas les solutions $y_1, \ldots, y_n$ ont des ordres de croissance différents lorsque $x \to \infty$, c'est-à-dire que pour $j \neq k$ les limites

$$\lim_{x \to \infty} y_j(x, \lambda)\, [y_k(x, \lambda)]^{-1}$$

sont soit nulles, soit infinies.

Traitons le cas où quelques solutions sont de même ordre de croissance à l'infini. Supposons que pour un certain j et tous les $k \neq j$ sont satisfaites soit les conditions 4), 5), soit la condition

6) $\operatorname{Re} p_j(x) \equiv \operatorname{Re} p_k(x)$, $x \gg 1$, la fonction $\operatorname{Re}[p_j^{(1)}(x) - p_k^{(2)}(x)]$ ne change pas de signe pour $x \gg 1$.

Toutes les propositions formulées ci-dessus restent alors en vigueur. Dans les deux cas la représentation asymptotique peut être dérivée n fois:

$$y_j^{(m)}(x, \lambda) = \lambda^m p_j^m(x)\, \tilde{y}_j(x, \lambda;\, x_0)\, [1 + \lambda^{-1} \varepsilon_{jm}(x, \lambda)],$$

les fonctions ε_{jm} vérifient la majoration (25).

Ces propositions sont valables pour λ complexe lorsque $\lambda \to \infty$ dans un secteur de la forme S : $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} \lambda \leqslant \beta$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, si sont satisfaites la condition 5) et la condition

4′) $\int^{\infty} |\operatorname{Re}[e^{i\varphi}(p_j(x) - p_k(x))]|\, dx < \infty$ pour tous les $k \neq j$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\varphi = \operatorname{Arg} \lambda$.

Exemple. Supposons qu'existent la limite $\lim_{x \to \infty} \operatorname{Arg} q_0(x) = \varphi_0$ et un S-secteur $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\lambda \neq 0$, tels que

$$\operatorname{Re}[\exp\{i(\varphi + \varphi_0/n)\}(\rho_j - \rho_k)] \neq 0, \quad \lambda \in S,$$

pour tous les $k \neq j$, où $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les racines de l'équation (11). L'équation (23) admet alors une solution de la forme (24) et la majoration (25) est valable pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 \gg 1$, $x \geqslant x_0$.

2.5. *Racines d'ordre de croissance différent.* Supposons que les racines de l'équation (2) ne sont pas asymptotiquement multiples et admettent des ordres de croissance différents, c'est-à-dire que certaines des limites c_{jk} (cf. (8)) sont égales à 0 ou à ∞. Rangeons-les par ordre de grandeur croissante: les nombres c_{jk} sont finis pour $j \leqslant k$ et deux au moins des nombres c_{nj}, $j < n$, sont nuls. Le cas où un seul de ces deux nombres est nul est traité au n° 2.9.

Les formules (15) restent en vigueur si les coefficients de l'équation (1) et les racines de l'équation (2) sont assujettis à certaines conditions, mais celles-ci sont assez volumineuses. Limitons-nous au cas où les coefficients de l'équation (1) sont de classe $C^\infty(\mathbf{R}^+)$ et se développent lorsque $x \to \infty$ en séries asymptotiques de la forme

$$q_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} x^{-\alpha_{kj}}, \tag{26}$$

où α_{kj} sont des constantes réelles, a_{kj} des constantes complexes, $\alpha_{k0} < \alpha_{k1} < \ldots < \alpha_{kj} < \ldots$, $\alpha_{kj} \to +\infty$. On admet également que le développement asymptotique (26) peut être dérivé par rapport à x autant de fois qu'on le veut. Si $a_{kj} = 0$ pour k fixe et tous les j, c'est que $q_k^{(m)}(x) = O(x^{-\infty})$ lorsque $x \to \infty$ et pour tous les $m = 0, 1, \ldots$ Un exemple modèle nous est fourni par l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1} x^{\alpha_{n-1}} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 x^{\alpha_0} y = 0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des constantes. Dans ce cas toutes les racines de l'équation caractéristique (2) se développent en séries asymptotiques de la forme (26):

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{kj} x^{\beta_{kj}}, \quad x \to \infty,$$

qui sont dérivables terme à terme autant de fois qu'on le veut.

Supposons que toutes les racines de l'équation (2) sont asymptotiquement simples, $\beta_{k0} \neq 0$, $\beta_{k0} > -1$ pour tous les k et qu'est satisfaite la condition 1) du n° 2.1. L'équation (1) admet alors un système fondamental de solutions $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ justiciable de la formule (15). Ces solutions admettent les développements asymptotiques

$$y_k(x) = x^{\gamma_k} \exp\left\{\sum_{k=0}^{N} c_{kj} x^{\delta_{kj}}\right\}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} x^{\varepsilon_{kj}}\right], \quad x \to \infty,$$

où

$$\delta_{k0} > \delta_{k1} > \ldots > \delta_{kN} > -1, \quad \delta_{k0} = \beta_{k0} + 1,$$
$$c_{k0} = p_{k0}/(\beta_{k0} + 1), \quad 0 > \varepsilon_{k0} > \varepsilon_{k1} > \ldots > \varepsilon_{kj} > \ldots, \quad \varepsilon_{kj} \to -\infty.$$

2.6. *Equations trinomiales.* Considérons l'équation

$$y^{(n)} + a_k x^{\alpha_k} y^{(k)} + a_0 x^{\alpha_0} y = 0, \tag{27}$$

où α_0, α_k sont des constantes réelles, a_0, a_k des constantes complexes, $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, $\alpha_0 > -n$. Trouvons la représentation asymptotique des racines de l'équation caractéristique

$$p^n + a_k x^{\alpha_k} p^k + a_0 x^{\alpha_0} = 0,$$

à l'aide du diagramme de Newton. Repérons trois points dans le plan (ρ, α): $M_1 = (n, 0)$, $M_2 = (k, \alpha_k)$, $M_3 = (0, \alpha_0)$ et soit I le segment M_1M_3. Deux cas sont possibles.

1. Le point M_2 est situé sur ou au-dessous de I, de sorte que $\alpha_k \leqslant (n - k)\,\alpha_0/n$ et le diagramme de Newton est le segment I. La représentation asymptotique des racines $p_j(x)$ est de la forme $p_j(x) \sim p_{j0} x^{\alpha_0/n}$, $x \to \infty$, où p_{j0} sont les racines de l'équation $q^n + a_k q^k + a_0 = 0$ si $\alpha_k = (n - k)\,\alpha_0/n$ et les racines de l'équation $q^n + a_0 = 0$ si $\alpha_k < (n - k)\,\alpha_0/n$. Ce cas est confondu avec celui traité au n° 2.1 et l'équation (27) admet un système fondamental constitué de solutions de la forme (15). Si l'on détermine la représentation asymptotique des racines $p_j(x)$ avec une précision de l'ordre $O(x^{-1-\delta})$, $\delta > 0$, les solutions admettront des développements asymptotiques de la forme

$$y(x) = x^{\alpha} e^{Q(x)} [1 + o(1)],$$

où $Q(x)$ est une somme finie d'exposants.

2. Le point M_2 est situé strictement au-dessus du segment I, de sorte que $\alpha_k > (n - k)\,\alpha_0/n$ et le diagramme de Newton est une ligne polygonale composée des segments M_1M_2 et M_2M_3. Il existe dans ce cas deux séquences de racines possédant des représentations asymptotiques différentes lorsque $x \to \infty$:

$$p_j(x) \sim (-a_k)^{1/(n-k)}\, x^{\alpha_k/(n-k)}, \quad j = 1, \ldots, n-k,$$
$$p_j(x) \sim \left(-\frac{a_0}{a_k}\right)^{1/k} x^{(\alpha_0 - \alpha_k)/k}, \quad j = n-k+1, \ldots, n.$$

On obtient le terme principal de la représentation asymptotique de la première (resp. de la deuxième) séquence de racines en négligeant le dernier (resp. le premier) terme de l'équation caractéristique. Les racines de la première séquence sont telles que $p_j(x) \gg x^{-1}$ lorsque $x \to \infty$ et grandes en regard des racines de la deuxième séquence: $p_j(x) \gg p_l(x)$ pour $x \gg 1$ si $1 \leqslant j \leqslant n - k$, $n - k + 1 \leqslant l \leqslant n$.

L'équation (27) admet $n-k$ solutions $y_1(x), \ldots, y_{n-k}(x)$ justiciables du développement asymptotique (15). La situation est plus compliquée avec les solutions correspondant à la deuxième séquence de racines.

2a. Supposons que $\alpha_0 - \alpha_k > -k$, de sorte que $p_j(x) \gg x^{-1}$ lorsque $x \to \infty$. L'équation (27) admet alors des solutions $y_{n-k+1}(x), \ldots \ldots, y_n(x)$ dont le développement asymptotique est de la forme (15).

2b. Supposons que $\alpha_0 - \alpha_k \leqslant -k$, de sorte que $p_j(x) = O(x^{-1})$ lorsque $x \to \infty$. L'équation (27) admet alors k solutions $y_{n-k+1}(x), \ldots \ldots, y_n(x)$ vérifiant chacune la formule asymptotique

$$y(x) \sim x^{\alpha} (\ln x)^m, \quad x \to \infty,$$

où $m \geqslant 0$ est un entier. Ces solutions se comportent comme celles de l'équation (1) au voisinage du point singulier régulier $x = \infty$ (chap. I, § 2).

Exemples. 1. Considérons l'équation

$$y^{(4)} - ax^{\alpha}y'' + bx^{\beta}y = 0, \tag{28}$$

où $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\alpha > -2$, $2\alpha > \beta$. Les racines caractéristiques se scindent en deux groupes: lorsque $x \to \infty$

$$p_{1,2}(x) \sim \pm \sqrt{a}\, x^{\alpha/2}, \quad p_{3,4}(x) \sim \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\, x^{(\beta-\alpha)/2}.$$

L'équation (28) admet deux solutions de la forme

$$y_j(x) \sim x^{-5\alpha/4} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt\right\}, \quad j = 1, 2.$$

Si $3\alpha > 2(1+\beta)$, ces formules se simplifient:

$$y_{1,2}(x) \sim x^{-5\alpha/4} \exp\left\{\pm \frac{2\sqrt{a}}{\alpha+2}\, x^{\alpha/2+1}\right\}.$$

Si, par ailleurs, $\alpha < \beta + 2$, l'équation (28) admet deux solutions de la forme

$$y_j(x) \sim x^{(\alpha-\beta)/4} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt\right\}, \quad j = 3, 4.$$

Ces formules se simplifient si $3\alpha > 2(1+\beta)$:

$$y_{3,4}(x) \sim x^{(\alpha-\beta)/4} \exp\left\{\pm \sqrt{\frac{b}{a}}\, \frac{2}{\beta-\alpha+2}\, x^{(\beta-\alpha+2)/2}\right\}.$$

2. Considérons l'équation (27), où $n = 2k$, $\alpha_0 < 2\alpha_k$. L'équation caractéristique admet alors les racines exactes:

$$p_k = -\frac{a_k}{2} x^{\alpha_k} [1 \pm \sqrt{1 - 4a_0 a_k^{-2} x^{\alpha_0 - 2\alpha_k}}],$$

où la racine carrée est égale à 1 lorsque $x = \infty$. Le signe plus (resp. moins) de la racine carrée correspond à la première (resp. la deuxième) séquence de racines. A la première séquence de racines sont associées k solutions de la forme

$$y_j(x) = x^{-\delta_1} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt\right\}, \quad \delta_1 = \frac{(n-1)\alpha_k}{n},$$

à la deuxième séquence, les k solutions

$$y_{j+k}(x) = x^{-\delta_2} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_{j+k}(t)\,dt\right\}, \quad \delta_2 = \frac{(k-1)(\alpha_0 - \alpha_k)}{n}.$$

La représentation asymptotique des intégrales $\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt$ lorsque $x \to \infty$ s'obtient sans peine dans ce cas.

3. Equations de forme auto-adjointe à racines asymptotiquement simples.

3.1. *Equations d'ordre pair.* Considérons l'équation

$$ly \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [q_{n-k}(x)\, y^{(k)}]^{(k)} = 0 \tag{29}$$

sur le demi-axe $\mathbf{R}^+ = [0, \infty[$, où $q_k(x)$ sont des fonctions à valeurs complexes de classe $C^2(\mathbf{R}^+)$, $q_0(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$. Si les fonctions $q_k(x)$ sont toutes réelles, l'opérateur L défini dans le domaine $D(L) = C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ par $Ly = ly$ est symétrique dans l'espace $L_2(\mathbf{R}^+)$. Posons des conditions du même type qu'au nº 2.1:

1) Les limites $\lim\limits_{x\to\infty} q_k(x)\, q_0^{-1}(x)\, \tau^{-2k}(x) = c_k$, où

$$\tau(x) = [q_n(x)/q_0(x)]^{1/(2n)}, \tag{30}$$

existent et sont finies.

2) L'équation

$$q(\xi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \xi^{2n-2k} = 0 \tag{31}$$

n'admet pas de racines multiples.

A l'équation (29) est associée l'équation caractéristique

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q_{n-k}(x) p^{2n-2k} = 0. \tag{32}$$

Des conditions 1), 2) il résulte que les racines de l'équation (30) admettent le développement asymptotique

$$p_j(x) = [\xi_j + o(1)]\, \tau(x), \quad x \to \infty, \tag{33}$$

où ξ_j sont les racines de l'équation (31). En particulier, les racines de l'équation (32) sont toutes asymptotiquement simples. Un exemple type d'équation (29) pour laquelle sont satisfaites les conditions 1), 2) nous est fourni par l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k [q^{2(n-k)} y^{(k)}]^{(k)} = 0, \tag{34}$$

où c_k sont des constantes, $q(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$, $c_0 = 1$.

Les autres conditions sont (n° 2.1):

3) Si $x \gg 1$, la fonction $\operatorname{Re}[(\xi_j - \xi_k)\, \tau(x)]$ ne change pas de signe pour un certain j et pour tous les k.

4) Les intégrales

$$\int^{\infty} (|q_k'|^2 |q_0|^{-2} |\tau|^{-4k-1} + |q_k''|\, |q_0|^{-1} |\tau|^{-2k-1})\, dx$$

convergent pour tous les k.

5) $\lim_{x \to \infty} q_k'(x) q_0^{-1}(x) \tau^{-2k-1}(x) = 0$ pour tous les k.

Notons

$$\tilde{y}_j(x) = \left[\frac{\partial l(x, p)}{\partial p} \Big|_{p=p_j(x)} \right]^{-1/2} \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt \right\}. \tag{35}$$

Si les conditions 1) à 5) sont satisfaites, l'équation (29) admet une solution $y_j(x)$ justiciable pour $x \to \infty$ des formules

$$\begin{gathered} y_j^{(k)}(x) = p_j^k(x) \tilde{y}_j(x) [1 + o(1)], \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ y_j^{[k]}(x) = (-1)^{n-k} p_j^k(x) q_0(x) \tilde{y}_j(x) \left[\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m c_m \xi_j^{-2m} + o(1) \right], \\ n \leqslant k \leqslant 2n-1, \end{gathered} \tag{36}$$

où $y^{[k]}$ est la quasi-dérivée d'ordre k (§ 1). Ces formules se simplifient pour $q_0(x) \equiv 1$:

$$y_j(x) \sim [q_n(x)]^{-1/2+1/(4n)} \exp\left\{ \int^{x} p_j(t)\, dt \right\}, \quad x \to \infty.$$

La classe admissible de fonctions $q(x)$ est la même pour l'équation (34) que pour l'équation (12). Si la condition 3) est remplie pour tous les j, les solutions $y_1(x), \ldots, y_{2n}(x)$ forment un système fondamental.

Exemples. 1. Considérons l'équation binomiale

$$(-1)^n [q_0(x) y^{(n)}]^{(n)} + q_n(x) y = 0.$$

Sous les conditions indiquées ci-dessus, cette équation admet une solution $y_j(x)$ telle que pour $x \to \infty$

$$y_j(x) = \rho^{-(2n-1)/2} q_0^{-1/2} \exp\left\{ i\omega_j \int_{x_0}^{x} \rho(t)\, dt \right\} [1 + o(1)],$$

$$\rho(x) = \sqrt[2n]{q_n(x)/q_0(x)},$$

où ω_j est une racine de l'équation $\omega^{2n} = -1$.

Les solutions de l'équation (29) admettent les mêmes formules asymptotiques dans le cas où les termes principaux sont les termes $(-1)^n [q_0(x) y^{(n)}]^{(n)}$ et $q_n(x) y$, et les termes intermédiaires leur sont subordonnés pour $x \gg 1$; les conditions suffisantes sont accessibles dans [25].

2. Considérons une équation d'ordre quatre de la forme (29) ; alors

$$l(x, p) = q_0(x) p^4 - q_1(x) p^2 + q_2(x),$$

$$p_j(x) = \pm \sqrt{\frac{q_1(x) \pm \sqrt{D(x)}}{2q_0(x)}}, \quad D = q_1^2 - 4q_0 q_2,$$

et si $p(x)$ est une racine de l'équation caractéristique, il vient

$$l_p(x, p(x)) = \pm 2p(x) \sqrt{D(x)}.$$

L'équation (29) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_j(x) \sim p_j^{-1/2}(x) D^{-1/4}(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt \right\}, \quad x \to \infty.$$

3.2. *Représentations asymptotiques doubles.* Considérons l'équation

$$ly \equiv \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{2k} (-1)^k [q_{n-k}(x) y^{(k)}]^{(k)} = 0, \tag{37}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre. Supposons que sont satisfaites les conditions 1), 2), 4), 5) du n° 3.1 et la condition suivante:

3′) Pour un certain j et tous les $k \neq j$

$$f_{jk}(x) \equiv \operatorname{Re}[(\xi_j - \xi_k)\tau(x)] \neq 0, \quad x \gg 1, \quad \int^{\infty} f_{jk}(x)\,dx = \infty.$$

Introduisons les fonctions $y^{[k;\,\varepsilon]}(x)$ qui pour $\varepsilon = 1$ sont confondues avec les quasi-dérivées:

$$y^{[k\,;\,\varepsilon]}(x) = \varepsilon^{-k} y^{(k)}(x), \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$y^{[n\,;\,\varepsilon]}(x) = \varepsilon^{-n} q_0(x)\, y^{(n)}(x),$$
$$y^{[n+k\,;\,\varepsilon]}(x) = \varepsilon^{-2k} q_k(x)\, y^{[n-k\,;\,\varepsilon]}(x) - (y^{[n+k-1\,;\,\varepsilon]}(x))', \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

et posons

$$\tilde{y}_j(x, \varepsilon) = l_p^{-1/2}(x, p_j(x)) \exp\left\{\varepsilon^{-1} \int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt\right\}.$$

Pour tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe alors un $x(\varepsilon_0) < \infty$ tel que l'équation (37) admet une solution $y_j(x, \varepsilon)$ pour laquelle

$$\begin{aligned} y_j^{(k)}(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{-k} p_j^k(x)\, \tilde{y}_j(x, \varepsilon)\,[1 + \varepsilon\psi_{jk}(x, \varepsilon)], \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ y_j^{[k\,;\,\varepsilon]}(x, \varepsilon) &= (-1)^{n-k} p_j^k(x)\, q_0(x)\, \tilde{y}_j(x, \varepsilon) \times \\ &\times \left[\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m c_m \xi_j^{-2m} + \varphi_{jk}(x)\right][1 + \varepsilon\psi_{jk}(x, \varepsilon)], \quad n \leqslant k \leqslant 2n-1, \end{aligned} \tag{38}$$

où $\varphi_{jk}(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, et pour $x \geqslant x(\varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ on a les majorations

$$|\psi_{jk}(x, \varepsilon)| \leqslant \varphi(x), \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Les formules asymptotiques (38) sont doubles: elles sont valables lorsque $x \to \infty$ uniformément en ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, et lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en $x \geqslant x(\varepsilon_0)$. Si la condition 3′) est satisfaite pour tous les j, les solutions $y_1, \ldots, y_{2n}$ forment un système fondamental.

Ce résultat est valable pour des conditions moins astreignantes sur les coefficients de l'équation (29). Plus exactement, il suffit que soient remplies les conditions 4), 5), la condition 3′) pour tous les j et la condition:

1′) Si $x \gg 1$, pour tout couple j, k, $j \neq k$, on a l'une des majorations

$$0 < a_1 \leqslant |p_j(x)/p_k(x)| \leqslant a_2 < 1,$$
$$0 < a_1 \leqslant |p_k(x)/p_j(x)| \leqslant a_2 < 1.$$

La condition 1') remplace les conditions 1), 2) et exprime que les racines $\xi_j(x)$ de l'équation

$$g(x, \xi) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(x) \xi^{2n-2k} = 0 \tag{39}$$

possèdent la même propriété que pour tous les $j, k, j \neq k$, et pour $x \gg 1$ on a les inégalités

$$0 < \delta_1 \leqslant |\xi_j(x) - \xi_k(x)| \leqslant \delta_2 < \infty.$$

3.3 *L'équation $ly = \mu y$ à coefficients réels.* Considérons l'équation

$$ly = \mu y, \tag{40}$$

où l est l'opérateur de (29) et $q_k(x)$ sont des fonctions réelles. Les équations de la forme (39), où μ est un paramètre spectral, se rencontrent dans de nombreux problèmes d'analyse spectrale. On admettra que

$$\lim_{x\to\infty} q_0(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} |q_n(x)| = \infty,$$

et que sont réalisées les conditions 1), 2), 4), 5) du n° 2.1. L'équation caractéristique est de la forme

$$l(x, p) = (-1)^n \mu.$$

Pour μ fixe et $x \to \infty$ les racines $p_j(x, \mu)$ de cette équation admettent le développement asymptotique

$$p_j(x, \mu) = q_n^{1/2n}(x) [\xi_j(x) + (-1)^n \mu q_n^{-1}(x) [g_\xi(x, \xi_j(x))]^{-1} + \\ + O(q_n^{-2}(x))] [1 + o(1)].$$

Posons $\xi_j' = \xi_j$ si $q_n(+\infty) = +\infty$ et $\xi_j' = e^{i\pi/(2n)} \xi_j$ si $q_n(+\infty) = -\infty$. Les points $\xi_1', \ldots, \xi_{2n}'$ sont alors symétriques par rapport à l'axe réel du plan de ξ complexe. Numérotons-les de telle sorte que $\operatorname{Re} \xi_j' \leqslant \operatorname{Re} \xi_{j+1}'$, considérons un système fondamental $\{y_1, \ldots, y_{2n}\}$ de solutions de la forme (36) et fixons μ.

1. Supposons que $\operatorname{Re} \xi_j' \neq 0$ pour tous les j et si ξ_j' n'est pas réel, que $\operatorname{Im} g'(\xi_j') \neq 0$. Dans ces conditions $y_1, \ldots, y_n \in L_2(\mathbf{R}^+)$ et aucune combinaison linéaire non triviale de solutions $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ n'appartient à l'espace $L_2(\mathbf{R}^+)$.

2. Supposons que $\operatorname{Re} \xi_j' = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant 2k$, $\operatorname{Re} \xi_l' \neq 0$ pour les autres l, $g'(\xi_j') \neq g'(\xi_l')$ pour $j \neq l$, $1 \leqslant j$, $l \leqslant 2k$ et $g'(\xi_j') \neq 0$ si ξ_j' n'est ni réel, ni imaginaire pur. Si $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, le nombre maxi-

mal de solutions linéairement indépendantes de l'équation (40) est égal à n ou à $n + k$ selon que l'intégrale

$$\int^{\infty} |q_n(x)|^{-1+1/(2n)}\, dx$$

est divergente ou convergente.

Ces résultats découlent de la formule (26) et de la représentation asymptotique des racines $p_j(x, \mu)$ et permettent de calculer les indices du défaut de l'opérateur symétrique L agissant dans $L_2(\mathbf{R}^+)$ et associé à l'opérateur différentiel l. Les indices du défaut de l'opérateur L ont été trouvés dans [61] pour le cas où l'équation caractéristique (32) possède des racines asymptotiquement multiples.

3.4. *Equations d'ordre impair.* Considérons l'équation

$$ly \equiv i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varepsilon^{2k+1} \Big\{ \Big[\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{k+1} \Big(q_{k+1}(x) \Big(\frac{d}{dx}\Big)^k y\Big)\Big] + \\ + \Big(\frac{d}{dx}\Big)^k \Big(q_{k+1}(x)\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{k+1} y\Big)\Big\} = 0 \qquad (41)$$

à coefficients complexes de classe $C^3(\mathbf{R}^+)$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre, $q_1(x) \neq 0$, $q_{n+1}(x) \neq 0$ pour $x \geqslant 0$. L'équation caractéristique est de la forme

$$l(x, p) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} [2q_{k+1}(x)\, p^{2k+1} + q'_{k+1}(x)\, p^{2k}] = 0. \qquad (42)$$

Posons $\tau(x) = [q_1(x)/q_{n+1}(x)]^{1/(2n)}$ et posons des conditions du même type qu'au n° 2.1. Un exemple modèle nous est fourni par l'équation (41) dans laquelle

$$q_{n+1}(x) \equiv 1, \quad q_{k+1}(x) = [q(x)]^{2(n-k)}, \quad k < n, \qquad (43)$$

où la fonction $q(x)$ appartient à n'importe laquelle des classes décrites au n° 2.1. Les deux conditions suivantes expriment que les racines $p_j(x)$ de l'équation (42) sont asymptotiquement simples:

1) $$\lim_{x\to\infty} q_{n-k+1} q_{n+1}^{-1} \tau^{-2k} = c_{2k+1},$$
$$\lim_{x\to\infty} q'_{n-k+1} q_{n+1}^{-1} \tau^{-2k-1} = 0.$$

2) L'équation

$$g(\xi) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_{2k+1} \xi^{2n-2k+1} = 0$$

ne possède pas de racines multiples.

On remarquera que $c_1 = 1$. Lorsque $x \to \infty$, les racines $p_j(x)$ admettent la représentation asymptotique suivante:

$$p_j(x) = [\xi_j + o(1)]\,\tau(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant 2n,$$

$$p_0(x) = \frac{q_1'(x) + o(q_1'(x))}{q_1(x)},$$

où ξ_j sont les racines non nulles de l'équation $g(\xi) = 0$. La racine $p_0(x)$ possède le plus petit ordre de croissance, plus exactement

$$\lim_{x \to \infty} p_0(x)/p_j(x) = 0, \quad j \neq 0,$$

ce qui résulte de la condition 1). Comme au n° 2.1, les deux conditions suivantes assurent une certaine régularité au comportement des coefficients de l'équation (41) à l'infini:

3) $\int^{\infty} F(x)\,dx < \infty$, où

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (|q_{n-k+1}' q_{n+1}^{-1}|^2 |\tau|^{-4k-1} + |q_{n-k+1}'' q_{n+1}^{-1}|^2 |\tau|^{-4k-3} + \\ + |q_{n-k+1}'' q_{n+1}^{-1}|\, |\tau|^{-2k-1} + |q_{n-k+1}''' q_{n+1}^{-1}|\, |\tau|^{-2k-2}).$$

4) $$\lim_{x \to \infty} q_{n-k+1}'' q_{n+1}^{-1} \tau^{2k-2} = 0.$$

Ces conditions sont satisfaites dans le cas, par exemple, où les coefficients de l'équation (41) sont de la forme (43) et $q(x) = ax^{\alpha}$, $\alpha > -1$, $a \neq 0$.

Notons

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln l_p(x, p_j(x)) - \\ - [l_p(x, p_j(x))]^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q_{k+1}'(x)\, p_j^{2k}(x). \quad (44)$$

$$\tilde{y}_j(x, \varepsilon) = \exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\,dt\right\}.$$

Des conditions 1), 2) et 4) il s'ensuit que

$$p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x)), \quad x \to \infty,$$

pour tous les $j \neq 0$. Par ailleurs, pour $x \to \infty$

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{2n+1}{4n}\frac{q_1'(x) + o(q_1'(x))}{q_1(x)}, \quad j \neq 0,$$

$$p_0^{(1)}(x) = o(q_1'(x)/q_1(x)).$$

Si les fonctions $\operatorname{Re}[p_j(x) - p_k(x)]$ ne changent pas de signe pour $x \gg 1$ et tous les j, k, l'équation (41) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_j(x, \varepsilon) = \tilde{y}_j(x, \varepsilon)[1 + \varepsilon\psi_j(x, \varepsilon)], \quad 0 \leqslant j \leqslant 2n. \tag{45}$$

Pour les résidus on a les majorations

$$|\psi_j(x, \varepsilon)| \leqslant k(x), \quad \lim_{x\to\infty} k(x) = 0,$$

pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $x \geqslant x(\varepsilon_0)$, où ε_0 est assez petit. La représentation (45) est double.

Posons $\varepsilon = 1$, et supposons que $q_{n+1}(x) \to 1$ lorsque $x \to \infty$. Les formules (45) peuvent dans ces conditions être simplifiées:

$$y_j(x) = [q_1(x)]^{-1/2-1/(4n)} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_j(t)\,dt\right\}, \quad x \to \infty, \quad j = 1, \ldots, 2n,$$

$$y_0(x) = [q_1(x)]^{-1/2+o(1)}, \quad x \to \infty.$$

3.5. *Equation d'ordre trois.* Considérons l'équation

$$ly \equiv (ib_2y'')' + \left[\left(\frac{i}{2}b_2' + a_1\right)y'\right]' + ib_1y' + \left[\frac{i}{2}b_1' + a_0\right]y = i\mu y \tag{46}$$

Sur le demi-axe $x \geqslant 0$, où $a_j(x)$, $b_j(x)$ sont des fonctions réelles, $b_2(x) \neq 0$, de sorte que l'opérateur l est formellement auto-adjoint. supposons que μ est une constante réelle non nulle. Dans [71] on a trouvé la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions de l'équation (46) pour $x \to \infty$ et calculé les indices du défaut de l'opérateur symétrique L dans $L_2(\mathbf{R}^+)$ associé à l sous les conditions suivantes:

1) $$b_1(x),\ b_2(x) \in C^2(\mathbf{R}^+), \quad a_0(x),\ a_1(x) \in C^3(\mathbf{R}^+),$$
$$\lim_{x\to\infty} b_2(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} |a_0(x)| = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} a_1(x)\,a_0^{-1/3}(x) = d \neq (3/2)^{2/3},$$

et la fonction $a_0'(x) \neq 0$ pour $x \gg 1$.

2) Les fonctions

$$b_1/a_0^{2/3},\ b_1'/a_0,\ b_2'/a_0^{1/3},\ b_2''/a_0^{2/3},\ a_1'/a_0^{2/3},\ b_1''/a_0^{4/3},\ a_0'/a_0^{4/3}$$

tendent vers 0 lorsque $x \to \infty$.

L'équation caractéristique est de la forme

$$l(x, p) \equiv -p^3b_2(x) + \left(ia_1(x) - \frac{1}{2}b_2'(x)\right)p^2 - b_1(x)p + \left[ia_0(x) - \frac{1}{2}b_1'(x) + \mu\right] = 0.$$

Considérons l'équation

$$\eta^3 - d\eta^2 + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont distinctes pour $d \neq (3/2)^{2/3}$ et non nulles. Si $d < (3/2)^{2/3}$, cette équation admet une racine réelle η_1 et deux racines conjuguées complexes $\eta_2 = \overline{\eta_3}$, $\mathrm{Im}\, \eta_2 > 0$. Si $d > (3/2)^{2/3}$, les trois racines sont réelles: $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$. Des conditions 1) et 2) il résulte que les racines de l'équation (47) admettent la représentation asymptotique

$$p_k(x) = i a_0^{1/3}(x)\,[\eta_k + o(1)], \quad x \to \infty. \tag{47}$$

Les conditions suivantes « régularisent » le comportement des coefficients de l'équation (46) à l'infini:

3) Les fonctions

$$|b_2'|,\ |b_1'/a_0^{2/3}|,\ |b_2'^2/a_0^{1/3}|,\ |b_2''^2/a_0|,\ |a_1'^2/a_0|,$$
$$|b_1'^2/a_0^{5/3}|,\ |b_1''^2/a_0^{7/3}|,\ |a_0'/a_0^{7/3}|,\ |b_2''/a_0^{1/3}|,$$
$$|b_2'''/a_0^{2/3}|,\ |a_1''/a_0^{2/3}|,\ |b_1'''/a_0^{4/3}|,\ |a_0''/a_0^{4/3}|$$

appartiennent à l'espace $L_1\,[r, \infty[$ pour $r \gg 1$.

4) Pour tous j, k et $x \gg 1$, l'une des conditions suivantes est satisfaite:

a) $\mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)] \geqslant 0$;

b) $\mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)] \leqslant 0$, $\displaystyle\int^{\infty} \mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)]\,dx = \infty$;

c) $\displaystyle\left| \int^{\infty} \mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)]\,dx \right| < \infty$.

L'équation (46) admet alors un système fondamental de solutions de la forme

$$y_k(x) = [1 + o(1)]\, a_0^{-1/3}(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} p_k(t)\,dt \right\}, \quad x \to \infty. \tag{48}$$

Exemple. Supposons que

$$b_2(x) \equiv 1, \quad b_1(x) = a x^{\alpha}, \quad a_1(x) = b x^{\gamma/3}, \quad a_0(x) = c x^{\gamma},$$

où $c \neq 0$, $\gamma > 0$, $\alpha < 2\gamma/3$, $(b/c)^{1/3} \neq (3/2)^{2/3}$. Les conditions 1) à 3) sont alors réalisées. Si $(b/c)^{1/3} < (3/2)^{2/3}$, la condition 4) est satisfaite. Dans cet exemple on peut déterminer le développement asymptotique des racines $p_j(x)$ [71].

§ 4. Systèmes d'équations sur un intervalle infini

1. Systèmes d'équations d'ordre un. Au chap. II, § 5, nous avons étudié des systèmes proches de systèmes diagonaux et avons construit la représentation asymptotique de leurs matrices fondamentales. Nous traiterons ici des classes plus générales de systèmes.

1.1. *Systèmes à racines asymptotiquement simples.* Considérons le système de n équations

$$y' = A(x)\,y \tag{1}$$

sur le demi-axe $\mathbf{R}^+ = [0, \infty[$, où $A(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$. Soient $q(x)$ une fonction à valeurs complexes, $q(x) \neq 0$ pour $x \geqslant 1$ et $Q(x) = \operatorname{diag}\{[q(x)]^{\alpha_1}, \ldots, [q(x)]^{\alpha_n}\}$.

Formulons les conditions imposées à la matrice $A(x)$:

1) $A(x) = q(x)\,Q(x)\,B(x)\,Q^{-1}(x), \ x \geqslant 0$.

2) La limite $\lim\limits_{x\to\infty} B(x) = B(\infty)$ existe et est finie, la matrice $B(\infty)$ est régulière et ne possède pas de valeurs propres multiples.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} r_1(x) = 0, \ r_1 = |q'|\,|q|^{-2} + |q|^{-1}\,\|B'(x)\|$.

4) $r_2(x) \in L_1([0, \infty[)$, où

$$r_2 = |q'|^2\,|q|^{-3} + |q''|\,|q|^{-2} + |q'|\,|q|^{-2}\,\|B'(x)\| + \\ + |q|^{-1}(\|B'(x)\|^2 + \|B''(x)\|),$$

où $\|B(x)\| = \max\limits_{1\leqslant j,\,k\leqslant n} |b_{jk}(x)|$ et $B'(x)$ est une matrice d'éléments $b'_{jk}(x)$.

Des conditions 1) et 2) il s'ensuit que les valeurs propres $p_j(x)$ de la matrice $A(x)$ sont de la forme

$$p_j(x) = q(x)\,\eta_j(x),$$

où $\eta_j(x)$ sont les valeurs propres de la matrice $B(x)$. Les valeurs propres $p_j(x)$ sont asymptotiquement simples, puisque les limites

$$\lim_{x\to\infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk} \neq 0,\ 1,\ \infty \tag{2}$$

existent pour tous les $j \neq k$.

Remarques. 1. Si l'on ramène l'équation (12) du § 3 à un système de n équations du premier ordre par la méthode standard, celui-ci vérifiera les conditions 1) et 2) et de plus

$$Q(x) = \operatorname{diag}(1, q(x), q^2(x), \ldots, q^n(x)).$$

2. Les systèmes (1) satisfaisant les conditions 1), 2) sont dans un certain sens des systèmes génériques. Posons $d(x) = \det A(x)$. Supposons que $d(x) \to \infty$ pour $x \to \infty$, tous les éléments de la matrice

$A(x)$ se comportent pour $x \to \infty$ comme des puissances de $d(x)$ et ses valeurs propres comme $d^{1/n}(x)$:

$$a_{ij}(x) = [c_{ij} + o(1)]\, d^{\alpha_{ij}}(x).$$

Supposons que la matrice $A(x)$ est régulière au sens de Volevitch, c'est-à-dire que les termes principaux ne se simplifient pas tous dans le développement

$$\det A(x) = \sum \pm a_{1j_1}(x) \ \ldots \ a_{nj_n}(x).$$

Dans ces conditions

$$A(x) = Q_1(x)\, B(x)\, Q_2(x),$$

$$Q_1(x) = \operatorname{diag}(d^{s_1}, \ \ldots, \ d^{s_n}), \quad Q_2(x) = \operatorname{diag}(d^{t_1}, \ \ldots, \ d^{t_n}),$$

et de plus $\sum_{j=1}^{n} (s_j + t_j) = 1$, la matrice $B(+\infty)$ existe, est finie et régulière. Les valeurs propres de la matrice $A(x)$ sont confondues avec celles de la matrice $d^{1/n}BQ_2Q_1d^{-1/n}$ et la condition (2) entraîne que $s_j + t_j = 1/n$, de sorte que $A(x)$ satisfait la condition 1).

Un cas particulier des systèmes de la forme (1) nous est fourni par les systèmes étudiés en théorie analytique des équations différentielles à point singulier irrégulier $x = \infty$:

$$y' = x^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k} y,$$

où $r \geqslant 0$ est un entier, A_k des matrices constantes, A_0 une matrice régulière à valeurs propres distinctes, la série étant convergente dans le domaine $|x| > R$.

Les conditions 3) et 4) sont les conditions standards imposées à la « régularité » du comportement des coefficients de la matrice $A(x)$ à l'infini. Par exemple, si $a_{jk}(x) \sim c_{jk}x^{\alpha}$ lorsque $x \to \infty$, $\alpha > -1$, les conditions 3), 4) résultent des conditions 1), 2).

Désignons par $e_j(x)$ et $e_j^*(x)$ respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $A(x)$ associés à la valeur propre $p_j(x)$. On rappelle que $e_j(x)$ est un vecteur colonne et $e_j^*(x)$, un vecteur ligne. Notons

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{e_j^*(x)\, e_j'(x)}{e_j^*(x)\, e_j(x)}, \quad \tilde{y}_j(x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)]\, dt\right\}. \qquad (3)$$

La matrice $B(\infty)$ ne possédant pas de valeurs propres multiples, on peut exhiber un $x_0 > 0$ tel que pour $x \geqslant x_0$ il existe des bases $\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ et $\{f_1^*(x), \ldots, f_n^*(x)\}$ de classe C^2 composées de vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $B(x)$. Ces vec-

teurs peuvent être choisis de façon à avoir des limites finies et non nulles pour $x \to \infty$. Posons

$$e_j(x) = Q(x) f_j(x), \quad e_j^*(x) = f_j^*(x) Q^{-1}(x).$$

Comme au § 3, $p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x))$ lorsque $x \to \infty$.

Supposons que les fonctions

$$\varphi_{jk}(x) = \operatorname{Re}[p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)]$$

ne changent pas de signe pour $x \gg 1$, un certain j et tous les k. Le système (1) admet une solution de la forme

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x) \left[e_j(x) + \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(x) e_k(x) \right], \quad \lim_{x\to\infty} u_{jk}(x) = 0. \quad (4)$$

Si la condition portant sur les fonctions $\varphi_{jk}(x)$ est satisfaite pour tous les j, le système (1) possède une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x) = T_0(x) [I + U(x)] \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} [\Lambda(t) + \Lambda^{(1)}(t)] \, dt \right\}, \quad (5)$$

où $T_0(x) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))^T$, Λ, $\Lambda^{(1)}$ sont des matrices diagonales d'éléments respectifs $p_j(x)$, $p_j^{(1)}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\lim_{x\to\infty} \| U(x) \| = 0$.

La condition 2) peut être affaiblie : la matrice $B(\infty)$ peut posséder une valeur propre nulle simple (ce cas est analogue à celui traité au § 3, n° 2.2).

Remarque. La fonction vectorielle

$$z(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t) \, dt \right\} e_j(x)$$

est un invariant en ce sens qu'elle ne dépend pas du choix des vecteurs propres $e_j(x)$ et $e_j^*(x)$ à un facteur multiplicatif constant près.

1.2. *Représentations asymptotiques doubles.* Considérons le système

$$y' = \lambda A(x) y, \quad (6)$$

pour lequel sont satisfaites les conditions 1) à 4) et posons

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t) + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t) \, dt \right\}. \quad (7)$$

Choisissons les vecteurs propres $e_j(x)$ et $e_j^*(x)$ comme au n° 1.1. Supposons que

$$\int_0^\infty |q(x)|\, dx = \infty, \tag{8}$$

$$|\mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)]| \geqslant c\,|q(x)| > 0, \quad x \gg 1, \tag{9}$$

pour un certain j et pour tous les $k \neq j$. Le système (6) admet alors une solution de la forme

$$y_j(x, \lambda) = \widetilde{y}_j(x, \lambda)\left[e_j(x) + \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(x)\, e_k(x)\right] \tag{10}$$

et pour tout $\lambda_0 > 0$ il existe un $x(\lambda_0) < \infty$ tel que pour $x \geqslant$ $\geqslant x(\lambda_0)$, $\lambda > \lambda_0$,

$$|u_{jk}(x, \lambda)| \leqslant k_j(x), \quad \lim_{x\to\infty} k_j(x) = 0. \tag{11}$$

La représentation asymptotique (10) est donc double.

Si la condition (9) est satisfaite pour tous les j, k, $j \neq k$, le système (6) possède une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x, \lambda) = T_0(x)\,(I + \lambda^{-1}U)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} [\lambda\Lambda(t) + \Lambda^{(1)}(t)]\, dt\right\}, \tag{12}$$

$$\|U(x, \lambda)\| \leqslant k(x), \quad \lim_{x\to\infty} k(x) = 0. \tag{13}$$

Les matrices T_0, Λ, $\Lambda^{(1)}$ sont les mêmes que dans la formule (5), la majoration de $\|U(x)\|$ est valable pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $x \geqslant x(\lambda_0)$.

Sous les conditions indiquées les formules (10) à (12) sont valables lorsque λ est situé dans un certain secteur S: $\alpha \leqslant \mathrm{Arg}\,\lambda \leqslant \beta$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, du plan de λ complexe. Si

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{Arg}\, q(x) = \varphi_0, \quad 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi,$$

existe, on peut indiquer exactement le secteur S. Soient η_j^0 les valeurs propres de la matrice $B(\infty)$. Posons $\eta_j^* = \eta_j e^{i\varphi_0}$, fixons j et menons les droites

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\varphi}(\eta_j^* - \eta_k^*)] = 0, \quad \varphi = \mathrm{Arg}\,\lambda,$$

dans le plan de λ complexe. Ces droites partagent le plan de λ en secteurs ouverts $S_1, \ldots, S_N$. Soit $\widetilde{S}_j$ un secteur fermé situé à l'intérieur du secteur S_j. Si la condition (8) est satisfaite, les formules (10), (11) sont valables pour $\lambda \in \widetilde{S}_j$, puisque la condition (9) est remplie.

Indiquons les autres conditions suffisantes pour lesquelles est valable la formule (12):

a) les valeurs propres $p_j(x)$ sont toutes imaginaires pures;

b) les intégrales $\int^{\infty} |\mathrm{Re}\, p_j^{(1)}(x)|\, dx$ convergent toutes.

1.3. *Majorations des résidus.* Certaines majorations ont été exhibées au chap. II, § 5. Supposons que les conditions 1) à 4), (8) et (9) sont satisfaites pour un certain j et que pour $x \gg 1$ on a les majorations

$$|q'| \leqslant c\,|q|^{\gamma_1}, \quad |q|' \geqslant c\,|q|^{\gamma_2}, \quad |q''| \leqslant c\,|q|^{\gamma_3},$$
$$\| B' \| \leqslant c\,|q'|\,|q|^{-1}, \quad \| B'' \| \leqslant c\,(|q''| + |q'|^2)\,|q|^{-1},$$

où $c > 0$ est une constante et

$$\gamma < 2, \quad \gamma_2 < 2, \quad \gamma_2 < 1 - \gamma, \quad \gamma = \max(2\gamma_1 - 2,\ \gamma_3 - 1) - \gamma_2.$$

Dans la formule (11) on peut alors poser

$$k_j(x) = c_j \| q \|^{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \max(\gamma,\ \gamma_1 - 2).$$

Les majorations de $\| B' \|$ et $\| B'' \|$ ont lieu si par exemple

$$B(x) = B_0 + q^{-\alpha}(x)\, B_1 + \ldots,$$

où $\alpha > 0$, B_0, B_1, ... sont des matrices constantes.

Soit $q(x) = ax^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $a \neq 0$; on peut alors poser

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 - 1/\alpha, \quad \gamma_3 = 1 - 2/\alpha, \quad \gamma = -1 - 1/\alpha = \gamma_0,$$

de sorte que $k_j(x) = O(x^{-1-1/\alpha})$. Si $q(x) = \exp\{ax^{\alpha}\}$, $a > 0$, $\alpha > 0$, on peut poser

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1 + \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est aussi petit que l'on veut, de sorte que

$$k_j(x) = O(\exp\{(-1 + \varepsilon)\, x^{\alpha}\}).$$

1.4. *Systèmes quasi diagonaux.* Considérons le système de n équations

$$y' = [\Lambda(x) + V(x)]\, y, \quad \Lambda(x) = \mathrm{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)), \tag{14}$$

sur le demi-axe $x \geqslant 0$, où $V(x)$ est une fonction matricielle continue. Au chap. II, § 5, on a indiqué les conditions suffisantes (théorème de Levinson) pour lesquelles on peut trouver une matrice fondamentale du système (13) lorsque $x \to \infty$. D'autres conditions suffisantes nous sont données par le

Théorème (Hartman-Wintner). *Si* $\| V(x)\| \in L_2(]0, \infty[)$ *et pour tous les* $j, k, j \neq k$,

$$|\mathrm{Re}\,[p_j(x) - p_k(x)]| \geqslant c > 0, \quad x \geqslant x_0,$$

le système (13) *admet une matrice fondamentale de la forme*

$$Y(x) = [I + o(1)] \exp\left\{\int_{x_0}^{x} [\Lambda(t) + \mathrm{diag}\, V(t)]\, dt\right\}.$$

Considérons le système

$$y' = [A + V(x) + R(x)]\, y, \tag{15}$$

où A est une matrice constante à valeurs propres $p_1, \ldots, p_n$ distinctes, $V(x)$ et $R(x)$ sont des fonctions matricielles continues pour $x \geqslant 0$. Indiquons les conditions suffisantes pour lesquelles le système (15) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x) = [T + o(1)] \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \Lambda(t)\, dt\right\}, \quad x \to \infty. \tag{16}$$

$\Lambda(x)$ est de la forme (14), où $p_j(x)$ sont les valeurs propres de la matrice $A + V(x)$, la matrice T ramène la matrice A à la forme diagonale: $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\,(p_1, \ldots, p_n) \equiv \Lambda$.

Notons

$$S_{kj}(t, x) = \mathrm{Re} \int_{t}^{x} [p_k(s) - p_j(s)]\, ds.$$

Par définition, la fonction S_{kj} est de classe H_1 si

$$S_{kj}(x_0, +\infty) = +\infty, \quad S_{kj}(t, x) \geqslant -c, \quad x_0 \leqslant t \leqslant x,$$

et de classe H_2 si

$$S_{kj}(t, x) \leqslant c, \quad x_0 \leqslant t \leqslant x,$$

où c est une constante, $x_0 \geqslant 0$ un nombre assez grand.

1) Les fonctions S_{kj} sont toutes de classe H_1 ou toutes de classe H_2:

$$\lim_{x \to \infty} V(x) = 0, \quad \int^{\infty} (\| V'(x) \| + \| R(x) \|)\, dx < \infty.$$

Exemples. 1. Considérons le système (15), où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad V(x) = x^{-\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R(x) = 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Les valeurs propres de la matrice $A + V(x)$ sont égales à

$$p_1(x) = 1 - \sqrt{1 + x^{-2\alpha}} = -\frac{1}{2} x^{-2\alpha} + O(x^{-4\alpha}),$$
$$p_2(x) = 1 + \sqrt{1 + x^{-2\alpha}} = 2 + O(x^{-2\alpha}),$$

de sorte que $\operatorname{Re}[p_1(x) - p_2(x)] = 2 + O(x^{-2\alpha})$. Le théorème de Hartman-Wintner est valable pour $\alpha > 1/2$; dans ce cas

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}, \quad x \to \infty.$$

Puisque $\| V'(x) \| = O(x^{-\alpha-1})$ lorsque $x \to \infty$, la condition 1) est satisfaite, et pour $0 < \alpha \leqslant 1$ on a

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} \exp\left\{\int^x p_1(t)\,dt\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{\int^x p_2(t)\,dt\right\} \end{bmatrix}.$$

En particulier, pour $\alpha = 1/2$,

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ 0 & x^{1/2}e^{2x} \end{bmatrix}.$$

2) Il existe un $k > 0$ entier tel que les matrices $V^{(k)}(x)$ et $R(x)$ sont continues pour $x \geqslant 0$:

$$\lim_{x\to\infty} V^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-2;$$
$$\| V^{(j)}(x) \| \in L_2(]0, \infty[), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Les fonctions $\| V(x) \|$, $\| V'(x) \|$, $\| V^{(k)}(x) \|$, $\| R(x) \|$ appartiennent à l'espace $L_1(]0, \infty[)$ et les fonctions S_{kj} sont toutes de classe H_1 ou toutes de classe H_2.

La condition 1) est un cas particulier de la condition 2).

2. Considérons le système

$$y' = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} y + v(x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y, \quad v(x) = x^{-\beta} \sin x^{1-\alpha}.$$

Supposons que $1/2 < \beta < 1$, $(1-\beta)/(k+1) < \alpha \leqslant (1-\beta)/k$, où $k \geqslant 1$ est un entier. On a

$$p_{1,2}(x) = \pm i \sqrt{1 - v^2(x)}, \quad \operatorname{Re}[p_1(x) - p_2(x)] \equiv 0, \quad x \gg 1,$$

et l'on peut s'assurer que les autres points de la condition 2) sont satisfaits. Le système admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x) = [I + o(1)] \begin{bmatrix} \exp\{ix + if(x)\} & 0 \\ 0 & \exp\{ix - if(x)\} \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} t^{-2\beta} \sin^2 t^{1-\alpha} dt.$$

On remarquera que $v^{(j)}(x) \notin L_1([1, \infty[)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k - 1$.

3) Les parties réelles des valeurs propres de la matrice A sont distinctes ; la matrice $V'(x)$ est continue pour $x \geqslant 0$;

$$\lim_{x \to \infty} V(x) = 0; \quad [\| V'(x) \|^2 + \| V(x) \| \, \| V'(x) \|] \in L_1([0, \infty[).$$

3. Considérons le système

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y + v(x) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y,$$

où $v(x)$ est la fonction de l'exemple 2, $\beta = 1/2$. Dans ce cas $v(x) \notin L_2(]1, \infty[)$, autrement dit les conditions du théorème de Hartman-Wintner ne sont pas satisfaites, mais

$$v'(x) \in L_2(]1, \infty[), \quad v(x) v'(x) \in L_1(]1, \infty[),$$

et tous les points de la condition 3) sont remplis.

4) $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$; les matrices $V_1(x)$ et $V_1'(x)$ sont absolument continues sur tout intervalle fini $0 \leqslant a < x < b$;

$$[\| V_1'(x) \| + \| V_2'(x) \|^2 + \| V_2''(x) \| + \| V_2'(x) \| \, \| V(x) \| + \\ + \| R(x) \|] \in L_1(]0, \infty[).$$

Pour un certain k et tous les $j \neq k$ les fonctions S_{kj} sont toutes de classe H_1 ou toutes de classe H_2. Le système (15) admet alors la solution

$$y_k(x) = \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} p_k(t)\, dt \right\} [e_k + o(1)], \quad x \to \infty, \tag{17}$$

où e_k est le vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre p_k. Si la dernière condition a lieu pour tous les j, le système (15) possède une matrice fondamentale de la forme (16).

4. Cet exemple montre que la classe de systèmes vérifiant la condition 4) est plus large que la classe de systèmes satisfaisant les

conditions du théorème de Levinson (chap. II, § 5). Considérons la fonction

$$v(x) = -\int_{x^\alpha}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Il est évident que $v(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$, mais

$$v(x) = -x^{-\alpha} \cos x^\alpha + O(x^{-2\alpha}),$$

de sorte que $v(x) \notin L_1(]1, \infty[)$. Par ailleurs,

$$v'(x) = \alpha x^{-1} \sin x^\alpha \notin L_2(]1, \infty[),$$

$$|v'(x)|^2 \in L_1(]1, \infty[), \quad v'(x)\, v(x) \in L_1(]1, \infty[), \quad v''(x) \in L_1(]1, \infty[).$$

Généralisons le théorème de Hartman-Wintner. Pour $x \gg 1$ il existe une matrice $Q(x)$ d'éléments diagonaux nuls telle que

$$[I + Q(x)]^{-1} T^{-1} [A + V(x)]\, T\, [1 + Q(x)] = \Lambda(x),$$

où $\Lambda(x)$ est de la forme (14) et cette matrice est unique. Notons

$$\tilde{\Lambda}(x) = \Lambda(x) - \operatorname{diag}[(I + Q(x))^{-1} Q'(x)].$$

5) Il existe un entier $k > 0$ tel que les matrices $V^{(k)}(x)$ et $R(x)$ sont continues pour $x \geqslant 0$, les fonctions $S_{kj}(x)$ appartiennent toutes à $H_1 \cup H_2$ et

$$\lim_{x\to\infty} V^{(j)}(x) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k-2;$$

$$\| V^{(j)}(x) \| \in L_2(]0, \infty[), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1;$$

$$[\| V^{(k)}(x) \| + \| R(x) \|] \in L_1(]0, \infty[).$$

Le système (15) admet alors une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x) = [T + o(1)] \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \tilde{\Lambda}(t)\, dt \right\}, \quad x \to \infty.$$

5. Considérons le système

$$y' = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} y + 2 \begin{bmatrix} 0 & -x^{-1/4} \sin x^{1/2} \\ x^{-1/4} \cos x^{1/2} & 0 \end{bmatrix} y.$$

Les valeurs propres $p_j(x)$ sont égales à

$$p_{1,2}(x) = \pm i \left(1 + x^{-1/2} \sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4} x^{-1} \sin^2 2x^{1/2} \right) + O(x^{-3/2}).$$

Dans ce cas $\| V(x) \| \notin L_1(]1, \infty[)$, $\| V(x) \| \| V'(x) \| \notin L_1(]1, \infty[)$, mais $\| V''(x) \| \in L_1(]1, \infty[)$, $\| V'(x) \| \in L_2(]1, \infty[)$. Par ailleurs,

$$\tilde{p}_1(x) = i\left(1 + x^{-1/2}\sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1}\sin^2 2x^{1/2}\right) + \\ + \frac{1}{8x}\sin^2 x^{1/2} + O(x^{-3/2}),$$

$$\tilde{p}_2(x) = -i\left(1 + x^{-1/2}\sin 2x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1}\sin^2 2x^{1/2}\right) - \\ - \frac{1}{8x}\cos^2 x^{1/2} + O(x^{-3/2}),$$

de sorte que $\operatorname{Re}[\tilde{p}_1(x) - \tilde{p}_2(x)] = 4x^{-1} + O(x^{-3/2})$, et la condition 5) est satisfaite.

1.5. *Systèmes à racines asymptotiquement multiples.* Considérons le système (15) sur le demi-axe $x \geqslant 0$. Supposons que le polynôme minimal $f(A)$ de la matrice A est de degré n, c'est-à-dire qu'il est de la forme

$$f(p) = \prod_{k=1}^{m} (p - p_k)^{n_k}, \quad \sum_{k=1}^{m} n_k = n,$$

où $p_j \neq p_k$ pour $j \neq k$. Dans ce cas la forme normale de Jordan de la matrice A est composée de m blocs de Jordan d'ordre $n_1, \ldots, n_m$ et la matrice A admet exactement m vecteurs propres linéairement indépendants $e_1, \ldots, e_m$, $Ae_j = p_j e_j$.

Posons $r + 1 = \max n_k$. Supposons que la matrice $V(x)$ est absolument continue sur tout intervalle fermé fini $I \subset \mathbf{R}^+$, la matrice $R(x)$ est mesurable-Lebesgue et sont satisfaites les conditions

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = 0, \quad [x^r \| V'(x) \| + x^r \| R(x) \|] \in L_1(]0, \infty[).$$

Soient $p_{jk}(x)$ les valeurs propres de la matrice $A + V(x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n_j$. Posons les conditions:

1) Les fonctions $p_{jk}(x)$ sont absolument continues pour $x \gg 1$ et on peut les choisir telles que

$$\lim_{x\to\infty} p_{jk}(x) = p_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_j.$$

2) $\int^{\infty} x^r |p'_{jk}(x)| \, dx < \infty$ pour les tous les j, k admissibles.

La condition 1) est la plus restrictive. Elle équivaut à la suivante : il existe une matrice $Q(x)$, $\lim_{x\to\infty} Q(x) = 0$, telle que

$$(I + Q(x))^{-1}(A + V(x))(I + Q(x)) = \operatorname{diag}(\Lambda_1(x), \ldots, \Lambda_m(x)),$$

où $\Lambda_j(x)$ sont des blocs de Jordan de la forme

$$\Lambda_j(x) = \begin{bmatrix} p_j(x) & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & p_j(x) \end{bmatrix}.$$

Posons $\mu_{jq}(x) = p_{j1}(x) + (q-1)/x$ et supposons que les fonctions $S_{\alpha\beta}$ sont toutes ou de classe H_1 ou de classe H_2. Le système (15) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{jk}(x) = x^{j-1}\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_{jk}(t)\,dt\right\}[e_j + o(1)],$$
$$1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_j. \tag{18}$$

Les résultats cités dans les nos 1.4 et 1.5 ont été empruntés aux travaux [50 à 53, 74, 75].

1.6. *Systèmes canoniques et hamiltoniens.* Considérons un système de la forme

$$Jy' = H(x)\,y \tag{19}$$

sur l'axe réel, $H(x) \in C^2(\mathbf{R})$. Le système (19) est dit *canonique* si $H(x)$ est une fonction matricielle symétrique réelle, J une matrice antisymétrique régulière constante:

$$H^T(x) = H(x), \quad J^T = -J.$$

Le nombre d'équations du système canonique est pair; désignons-le par $2n$. La substitution $y = Tz$, où T est une matrice réelle régulière constante, permet de ramener le système canonique à une forme telle que

$$J = J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

où 0 est la matrice nulle d'ordre n, I_n la matrice unité d'ordre n, $J^2 = -I_{2n}$. Dans la suite on posera $J = J_{2n}$ dans le système (19).

Un système de la forme (19) est dit *hamiltonien* si $H(x)$ est une fonction matricielle hermitienne, J une matrice antihermitienne régulière constante:

$$H^*(x) = H(x), \quad J^* = -J,$$

où * désigne la transposition conjuguée: si $H(x) = (h_{jk}(x))$, alors $H^*(x) = \overline{(h_{kj}(x))}$. Un système hamiltonien est composé d'un nom-

bre pair (que l'on désignera par $2n$) d'équations et se ramène à la forme

$$-iGy' = H(x)\,y, \tag{20}$$

où $H(x)$ est une fonction matricielle hermitienne

$$G=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad p+q=2n.$$

Indiquons les propriétés classiques des systèmes hamiltoniens et canoniques. Soit $Y(x)$ une matrice fondamentale du système hamiltonien.

1. On a l'identité

$$Y^*(x)\,JY(x) \equiv \text{const.}$$

On dit qu'une matrice carrée réelle A d'ordre $2n$ est *symplectique* si

$$A^T J_{2n} A = J_{2n}.$$

2. Soit $Y(x)$ une matrice fondamentale réelle du système canonique. La matrice $Y(x)\,Y^{-1}(x_0)$ est alors symplectique.

Comme au § 2, définissons le produit scalaire des vecteurs $y = (y_1, \ldots, y_k)^T$ et $z = (z_1, \ldots, z_k)^T$ par la formule

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{k} z_j y_j.$$

3. Si $y(x)$ et $z(x)$ sont solutions du système hamiltonien, alors

$$(Jy(x), \overline{z(x)}) \equiv \text{const.}$$

Les propriétés 2 et 3 découlent de la propriété 1. Si $J = J_{2n}$ et $y(x)$, $z(x)$ sont des solutions réelles du système canonique, l'identité de la propriété 3 devient

$$\sum_{k=1}^{n} [y_k(x)\,z_{n+k}(x) - y_{n+k}(x)\,z_k(x)] \equiv \text{const.}$$

Soient $L(x, p) = H(x) - pJ$ les faisceaux de matrices associés aux systèmes canonique et hamiltonien, où $J = J_{2n}$ dans le cas du système canonique et $J = -iG$ dans celui du système hamiltonien. Fixons $x_0 \geqslant 0$.

4. Si p est une valeur propre du faisceau canonique L, il en est de même de $-p$, $\overline{p}$ et $-\overline{p}$. Si p est une valeur propre du faisceau hamiltonien L, il en est de même de $\overline{p}$.

Les vecteurs propres à droite et à gauche du faisceau L sont liés par les relations suivantes. Soit e un vecteur propre à droite du faisceau L, c'est-à-dire que $He = pJe$.

5. Si L est un faisceau canonique, $e^T H = -pe^T J$. Si L est un faisceau hamiltonien, $\overline{e^T} H = -\overline{pe^T} J$.

Les vecteurs propres des faisceaux sont orthogonaux gauches. Supposons que $He = pJe$, $Hf = qJf$.

6. Si L est un faisceau canonique, alors

$$(Je, f) = 0, \quad p + q \neq 0.$$

Si L est un faisceau hamiltonien, alors

$$(Je, \bar{f}) = 0, \quad p + \bar{q} \neq 0.$$

Considérons un faisceau canonique L sous la condition suivante:

1) Les valeurs propres du faisceau $L(x, p)$ sont distinctes et non nulles pour $x \geqslant 0$.

Pour $x = 0$ toutes les racines du faisceau contenues dans le premier quadrant Re $p \geqslant 0$, Im $p \geqslant 0$, peuvent être partagées en trois groupes.

I. Les racines imaginaires pures.

II. Les racines réelles.

III. Les racines complexes (Re $p > 0$, Im $p > 0$).

Pour $n = 2$, les racines appartiennent soit au groupe I, soit au groupe II. Si l_j est le nombre de racines contenues dans le groupe j, alors $2l_1 + 2l_2 + 4l_3 = 2n$. De la propriété 4 et des conditions imposées au faisceau L, il s'ensuit que pour tous les $x \geqslant 0$, les racines demeurent dans leur groupe (c'est-à-dire que si Re $p(0) = 0$ et Im $p(0) > 0$, alors Re $p(x) = 0$, Im $p(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$ pour les racines du premier groupe, etc.).

Les relations d'orthogonalité de la propriété 6 restent en vigueur aussi pour tous les $x \geqslant 0$. Traitons l'un des cas les plus importants, pour les applications:

2) Les valeurs propres du faisceau L sont imaginaires pures.

On peut les mettre alors sous la forme $iq_1(x)$, $-iq_1(x)$, ..., $iq_n(x)$, $-iq_n(x)$, où $q_j(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$. Désignons ces valeurs propres respectivement par $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_{2n}(x)$, de sorte que $p_{2k}(x) \equiv \overline{p_{2k-1}(x)}$. Les vecteurs propres à droite et à gauche du faisceau L peuvent aussi être accouplés:

$$\{e_1(x), \overline{e_1(x)}, \ldots, e_n(x), \overline{e_n(x)}\},$$
$$\{\overline{e_1^T(x)}, e_1^T(x), \ldots, \overline{e_n^T(x)}, e_n^T(x)\};$$

numérotons-les comme les racines $p_j(x)$. Introduisons les matrices

$$\Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_{2n}(x)),$$
$$T_0(x) = (e_1(x), \overline{e_1(x)}, \ldots, e_n(x), \overline{e_n(x)});$$

alors $T_0^{-1}(x)\,JT_0(x) = -\Lambda(x)$. Normons les vecteurs $e_j(x)$ de telle sorte que

$$e_j^*(x)\,Je_j(x)=1, \quad x\geqslant 0, \tag{21}$$

alors

$$T_0^*(x)=\left(\overline{e_1^T(x)},\ e_1^T(x),\ \ldots,\ \overline{e_n^T(x)},\ e_n^T(x)\right),$$
$$T_0^*(x)\,JT_0(x)=I_{2n}.$$

Posons d'abord des conditions élémentaires sur le comportement de la fonction matricielle $H(x)$ lorsque $x\to\infty$:

3) La limite $\lim\limits_{x\to\infty} H(x)=H(\infty)$ existe, est finie et

$$\det H(\infty)\neq 0, \quad \int_0^\infty \|H'(x)\|\,dx<\infty.$$

La matrice $T_0(x)$ peut alors être choisie de telle sorte qu'existe la limite finie

$$\lim_{x\to\infty} T_0(x)=T_0(\infty), \quad \det T_0(\infty)\neq 0.$$

Si les conditions 1) à 3) sont satisfaites, le système canonique (19) admet une matrice fondamentale (16), où $T = T_0(\infty)$, et un système fondamental de solutions de la forme

$$y_{2k-1}(x)=\exp\left\{i\int_0^x q_k(t)\,dt\right\}[e_k+o(1)], \quad x\to\infty,$$
$$y_{2k}(x)\equiv\overline{y_{2k-1}(x)}.$$

Si les conditions 1) à 3) sont réalisées, le système canonique

$$Jy' = \lambda H(x)\,y$$

admet une matrice fondamentale qui est justiciable d'une formule asymptotique de la forme (12) (représentation asymptotique double).

Supposons que les conditions 1), 2) sont remplies et que la matrice $H(x)$ satisfait les conditions 1) à 4) du n° 1.1. Introduisons les fonctions

$$p_j^{(1)}(x)=-e_j^*(x)\,Je_j'(x). \tag{22}$$

Ces fonctions sont à valeurs réelles et $p_{2k}^{(1)}(x)\equiv p_{2k-1}^{(1)}(x)$ en vertu de la normalisation (21).

Si aucune fonction $\mathrm{Re}\,[p_j^{(1)}(x)-p_k^{(1)}(x)]$ ne change de signe pour $x\gg 1$, le système canonique (19) admet une matrice fondamentale de la forme (5).

2. Systèmes d'équations du second ordre. Considérons le système de n équations

$$y'' = \lambda^2 A(x)\, y \tag{23}$$

sur le demi-axe $\mathbf{R}^+$: $x \geqslant 0$, où $\lambda > 0$ est un paramètre, $A(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$. Soient $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ les valeurs propres de la matrice $A(x)$. Au système (23) est associé le faisceau de matrices $L(x, p) = p^2 I - A(x)$ dont les valeurs propres sont égales à $\pm\sqrt{p_j(x)}$. Posons la condition:

1) Les fonctions $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ sont distinctes et non nulles pour $x \geqslant 0$.

Fixons des branches des fonctions $\sqrt{p_2(x)}, \ldots, \sqrt{p_n(x)}$. En vertu de la condition 1), ces fonctions sont de classe $C^2(\mathbf{R}^+)$. La condition suivante exprime que les valeurs propres de la matrice $A(x)$ sont asymptotiquement simples:

2) Pour tous j, k, les limites

$$\lim_{x\to\infty} p_j(x)/p_k(x) = c_{jk}$$

existent, sont finies et $c_{jk} \neq 1$ pour $j \neq k$.

Des conditions 1), 2) il s'ensuit qu'il existe une fonction $q(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$, $q(x) \neq 0$, $x \geqslant 0$, et des constantes $c_j \neq 0$, telles que

$$p_j(x) = [c_j + o(1)]\, q(x), \quad x \to \infty, \tag{24}$$

où $c_j \neq c_k$ pour $j \neq k$. D'après la condition 1), il existe des bases $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$, $\{e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)\}$ de classe $C^2(\mathbf{R}^+)$ composées de vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $A(x)$. Normons-les avec la condition

$$e_j^*(x)\, e_j(x) \equiv 1; \tag{25}$$

la matrice $T(x) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))$ ramène alors la matrice $A(x)$ à la forme diagonale

$$T^{-1}(x)\, A(x)\, T(x) = \Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)),$$

où $T^{-1}(x)$ est la matrice de lignes $e_1^*(x), \ldots, e_n^*(x)$. Posons

$$p_j^{(1)}(x) = -e_j^*(x)\, e_j'(x), \quad \Lambda^{(1)}(x) = \operatorname{diag}(p_1^{(1)}(x), \ldots, p_n^{(1)}(x)). \tag{26}$$

Posons des conditions identiques aux conditions 1), 3) et 4) du n° 1.1:

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (|q'|\, |q|^{-3/2} + |q|^{-1/2} \, \| T^{-1}(x)\, T'(x) \|) = 0.$

4) La fonction

$$b(x) = |q'|^2\, |q|^{-5/2} + |q''|\, |q|^{-3/2} + \\ + |q'|\, |q|^{-3/2} \| T^{-1}T' \| + |q|^{-1/2} \| T^{-1}T' \|^2 + |q|^{-2} \| (T^{-1}T')' \|$$

appartient à l'espace $L_1(]0, \infty[)$.

De la condition 3) il résulte que $p_j^{(1)}(x) = o(p_j(x))$ lorsque $x \to \infty$. Posons

$$\tilde{y}_k^{\pm}(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_k(x)}} \exp\left\{\pm \lambda \int_{x_0}^{x} \sqrt{p_j(t)}\, dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\, dt\right\}, \quad (27)$$

$$y_k^{\pm}(x, \lambda) = \tilde{y}_k^{\pm}(x, \lambda)\,[e_k(x) + \lambda^{-1} f_k^{\pm}(x, \lambda)]. \quad (28)$$

Supposons que les conditions 1) à 4) sont satisfaites; indiquons la condition sous laquelle les solutions du système (23) sont justiciables d'une double représentation asymptotique ($x \to \infty$ et $\lambda \to +\infty$). Formulons cette condition en deux variantes. Notons

$$\mu_j(x) = \sqrt{p_j(x)}, \quad \mu_{n+j}(x) = -\sqrt{p_j(x)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$S_{jk}(t, x) = \int_t^x [\mu_j(\tau) - \mu_k(\tau)]\, d\tau, \quad (29)$$

$$S_{jk}^{(1)}(t, x) = \int_t^x [p_j^{(1)}(\tau) - p_k^{(1)}(\tau)]\, d\tau.$$

5a) $\operatorname{Re} S_{jk}(0, +\infty) = \infty, \ j \neq k,$

$\operatorname{Re}[p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x)] = o(\operatorname{Re}(\mu_j(x) - \mu_k(x))), \quad x \to \infty.$

5b) $|\operatorname{Re} S_{jk}(0, +\infty)| < \infty, \quad \sup\limits_{t,\, x \geqslant 0} |\operatorname{Re} S_{jk}^{(1)}(t, x)| < \infty.$

Si l'une des conditions 5a), 5b) est satisfaite pour un certain k et tous les $j \neq k$, le système (23) possède deux solutions $y_k^{\pm}$ de la forme (28). De plus, pour tout $\lambda_0 > 0$ il existe un $x(\lambda_0) < \infty$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $x(\lambda) \geqslant x(\lambda_0)$ l'on ait les majorations

$$\| f_j^{\pm}(x, \lambda) \| \leqslant \varphi(x), \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0. \quad (30)$$

Si toutes ces conditions sont satisfaites pour tous les k, le système (23) admet un système fondamental de solutions $\{y_1^+, \ldots, y_n^+, y_1^-, \ldots, y_n^-\}$ de la forme (28). En outre,

$$\frac{d}{dx} y_k^{\pm}(x, \lambda) = \pm\lambda \sqrt{p_k(x)}\, \tilde{y}_k^{\pm}(x, \lambda)\,[e_k(x) + \lambda^{-1} f_{1k}^{\pm}(x, \lambda)],$$

où les fonctions vectorielles $f_{1k}^{\pm}$ possèdent les mêmes propriétés que $f_k^{\pm}$.

Remarque. Fixons $\lambda > 0$ et supposons que pour un certain k et tous les $j \neq k$, les fonctions

$$\operatorname{Re}\,[\mu_k(x) - \mu_j(x) + \mu_k^{(1)}(x) - \mu_j^{(1)}(x)]$$

ne changent pas de signe pour $x \gg 1$. Le système (23) admet alors des solutions $y_k^{\pm}$ de la forme (28), (30).

Considérons l'équation matricielle de la forme (23):

$$Y'' - \lambda^2 A(x) Y = 0, \tag{31}$$

où $Y(x)$ est une matrice d'ordre n et supposons satisfaites les conditions énoncées ci-dessus. Toute solution de l'équation (31) est alors de la forme

$$Y(x, \lambda) = Y^+(x, \lambda) C^+(\lambda) + Y^-(x, \lambda) C^-(\lambda),$$

où $C^{\pm}(\lambda)$ sont des matrices d'ordre n,

$$Y^{\pm}(x, \lambda) = T(x)\,[I + \lambda^{-1} U^{\pm}(x, \lambda)]\,\Lambda^{-1/4}(x) \times$$
$$\times \exp\left\{\pm\lambda \int_{x_0}^{x} \Lambda(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \operatorname{diag}\,[T^{-1}(t)\,T'(t)\,dt]\right\}, \tag{32}$$

où $\|U^{\pm}(x, \lambda)\|$ possèdent les mêmes propriétés que $\|f_j^{\mp}(x, \lambda)\|$ (cf. (30)).

On a une formule identique pour les dérivées $\frac{d}{dx} Y^{\pm}(x, \lambda)$; dans la formule (30) il faut remplacer la matrice $\Lambda^{-1/4}(x)$ par la matrice $\pm\lambda\Lambda^{1/4}(x)$ et les matrices $U^{\pm}$ par $U_1^{\pm}$, qui jouissent des mêmes propriétés.

3. Systèmes d'équations d'ordre arbitraire. Considérons le système de n équations

$$y^{(m)} - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1} A_k(x)\, y^{(k)} = 0 \tag{33}$$

sur le demi-axe $x \geqslant 0$, où $\lambda > 0$ est un paramètre, $A_k(x) \in C^2(\mathbf{R}^+)$ pour tous les k. Au système (33) est associé le faisceau de matrices

$$L(x, p) = p^m I - \sum_{k=0}^{m-1} p^k A_k(x).$$

Soient $p_j(x)$ les valeurs propres du faisceau L, c'est-à-dire les racines de l'équation $\det L(x, p) = 0$. Admettons que les racines $p_j(x)$ sont toutes simples et considérons les bases $\{e_1(x), \ldots, e_{nm}(x)\}$

et $\{e_1^*(x), \ldots, e_{nm}^*(x)\}$ des vecteurs propres à droite et à gauche, normées par les conditions

$$e_j^*(x)\, L_p(x,\ p_j(x))\, e_j(x) = 1. \tag{34}$$

Introduisons les fonctions

$$p_j^{(1)}(x) = -\left(e_j^* L_p e_j' + \frac{p_j'}{2} L_{pp} e_j\right), \tag{35}$$

où les valeurs des vecteurs e_j^* et e_j sont prises au point x et les valeurs des dérivées de L, au point $(x, p_j(x))$. Supposons que la fonction $q(x)$ et la fonction matricielle $Q(x)$ sont celles du n° 1.1. Posons les conditions:

1) $A_k(x) = q^{m-k}(x)\, Q(x)\, B_k(x)\, Q^{-1}(x)$, les limites $\lim\limits_{x\to\infty} B_k(x) = B_k(+\infty)$ existent et sont finies.

2) Les racines η_j de l'équation

$$\det\left[\eta^m I - \sum_{k=0}^{m-1} \eta^k B_k(\infty)\right] = 0$$

sont distinctes et non nulles.

3) Les conditions 3), 4) du n° 1.1 sont satisfaites si l'on y remplace $\|B(x)\|$ par $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \|B_k(x)\|$.

Pour $m = 1$ ces conditions sont confondues avec celles du n° 1.1. Supposons que les conditions (8), (9) sont satisfaites pour un certain j et pour tous les $k \neq j$ et que $\tilde{y}_j(x)$ est définie par la formule (3). Le système (31) admet alors une solution $y_j(x, \lambda)$ telle que

$$y_j^{(s)}(x, \lambda) = \lambda^s p_j^s(x)\, \tilde{y}_j(x, \lambda) \left[e_j(x) + \lambda^{-1} \sum_{l=1}^{nm} u_{jsl}(x, \lambda)\, e_l(x)\right],$$
$$0 \leqslant s \leqslant m, \tag{36}$$

où les fonctions u_{jsl} possèdent les mêmes propriétés que les fonctions u_{jk} de la formule (10).

4. Principales méthodes d'établissement des formules asymptotiques pour les solutions de systèmes et d'équations différentiels. La formule asymptotique doit tout d'abord être devinée et il est peu probable que l'on puisse énoncer des principes généraux susceptibles de nous faciliter la tâche. Une fois la formule trouvée, on la démontre dans la plupart des travaux en deux étapes.

1. Par une transformation convenable (un changement de la variable et des fonctions inconnues) on ramène l'équation (ou le système) à la forme

$$(l_0 + l_1)\, y = 0,$$

où l'équation $l_0 y = 0$ se résout exactement et l'opérateur l_1 peut être traité comme une petite perturbation.

2. On intègre l'équation $l_0 y = -l_1 y$ comme une équation non homogène de second membre $-l_1 y$ et l'on étudie le système d'équations intégrales ainsi obtenu.

On a déjà eu affaire aux diverses transformations des équations et systèmes (chap. II, § 1 ; chap. IV, § 2 ; chap. V, §§ 1, 2, etc.). Indiquons les principales équations intégrales. Soit donné le système de n équations

$$y' = [A_0(x) + A_1(x)]\, y, \tag{37}$$

le système

$$z' = A_0(x)\, z$$

étant intégrable. Soient $Y(x)$ et $Z(x)$ des matrices fondamentales de ces systèmes. L'application de la méthode de variation des constantes nous conduit à l'équation intégrale

$$Y(x) = Z(x) + \int_{\Gamma(x)} Z(x) Z^{-1}(t) A_1(t) Y(t)\, dt,$$

où $\Gamma(x)$ est une matrice d'ordre n dont les éléments $\gamma_{jk}(x)$ sont des intervalles de la forme $]x_{jk}, x[$ (ou des courbes dans le plan de x complexe reliant les points fixes x_{jk} et x). En posant

$$Y(x) = Z(x)\, W(x),$$

on obtient l'équation intégrale fondamentale

$$\begin{gathered} W = W_0 + KW, \\ (KW)(x) = \int_{\Gamma(x)} Z^{-1}(t) A_1(t) Z(t) W(t)\, dt. \end{gathered} \tag{38}$$

Reste à définir la matrice des chemins $\Gamma(x)$. Il est souhaitable de la choisir telle que l'équation (38) soit justiciable d'un quelconque principe du point fixe. Dans ce cas il est possible de recueillir une certaine information sur la matrice fondamentale $Y(x)$.

Dans nombre de cas et, en particulier, dans ceux traités dans les chapitres précédents, on arrive à déterminer la représentation asymptotique non pas de la matrice fondamentale mais de certaines solutions seulement du système (37) et à utiliser à la place de l'équation matricielle intégrale (38) une équation intégrale vectorielle. Déterminons cette équation dans le cas où

$$A_0(x) = \Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)).$$

Notons

$$S_j(t, x) = \int_t^x p_j(\tau)\, d\tau, \quad S_{kj}(t, x) = S_k(t, x) - S_j(t, x),$$

$$\tilde{y}_j(x_0, x) = \exp\{S_j(x_0, x)\}, \quad y = \tilde{y}_j(x_0, x)\, w,$$
$$z = z_j(x_0, x) f_j,$$

où f_j est un vecteur colonne de composantes δ_{jk}. On obtient alors l'équation intégrale en w

$$w = f_j + K_j(w), \tag{39}$$

où K_j est un opérateur intégral:

$$(K_j w)_k = \int_{x_{kj}}^{x} \exp\{S_{kj}(t, x)\}\, [A_1(t)\, w(t)]_k\, dt.$$

Reste à déterminer les chemins $\gamma_{kj} = (x_{kj}, x)$. Il est souhaitable de les choisir de telle sorte que dans un espace de Banach B la norme de l'opérateur K_j soit petite: $\| K_j \|_B \ll 1$. Pour la solution de l'équation (39) on obtient alors une majoration du type

$$\| w - f_j \|_B \leqslant c \| K_j \|_B.$$

Traitons deux cas élémentaires.

1) Soient $I = [a, b]$ un intervalle fini, $a < b$, $\lambda > 0$ un grand paramètre,

$$A_1(x) = \lambda^{-1} B(x), \quad \Lambda(x) = \lambda \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)),$$

où les fonctions $p_j(x)$ et les éléments de la matrice $B(x)$ sont de classe $C(I)$. Pour B, prenons l'espace des fonctions vectorielles $w(x)$ dont les composantes sont de classe $C(I)$ et dont la norme $\| w(x) \|_B = \max\limits_{x \in I} | w(x) |$. Supposons qu'aucune différence $\varphi_{kj}(x) = \operatorname{Re}[p_k(x) - p_j(x)]$ ne change de signe pour j donné. Posons

$$x_{kj} = b \text{ si } \varphi_{kj}(x) \leqslant 0,$$
$$x_{kj} = a \text{ si } \varphi_{kj}(x) \geqslant 0.$$

Pour $t \in]x_{kj}, x[$ on obtient alors

$$\operatorname{Re}[\lambda S_{kj}(t, x)] \leqslant 0. \tag{40}$$

Donc

$$|\exp\{\lambda S_{kj}(t, x)\}| \leqslant 1, \quad t \in \gamma_{kj}(x), \tag{41}$$

et par suite $\| K \|_B \leqslant c\lambda^{-1} \ll 1$ pour $\lambda \gg 1$. Au chap. II, § 7, on a montré que si les fonctions $\varphi_{kj}(x)$ peuvent changer de signe, il n'existe aucune formule asymptotique valable pour les solutions du système (37) lorsque $\lambda \to +\infty$ sur l'intervalle I tout entier.

2) Supposons que $I = [0, \infty[$, les matrices $A(x)$ et $A_1(x)$ satisfont les mêmes conditions que dans le cas 1, $\lambda = 1$ et $\| B(x) \| \in \in L_1(]0, \infty[)$ (ce cas coïncide presque entièrement avec les conditions du théorème de Levinson (chap. II, § 5)). Exigeons de plus que $\lim\limits_{x \to \infty} \| B(x) \| = 0$ et que

$$\int_0^\infty \varphi_{kj}(x)\, dx = +\infty \text{ si } \varphi_{kj}(x) \geqslant 0, \quad k \neq j.$$

Posons

$$x_{kj} = a \quad \text{si } \varphi_{kj}(x) \leqslant 0, \tag{42a}$$

$$x_{kj} = \infty \text{ si } \varphi_{kj}(x) \geqslant 0, \tag{42b}$$

où $a > 0$ sera défini plus bas. Les inégalités (40) sont alors satisfaites pour $t \in]x_{kj}, x[$. Pour B, prenons l'espace des fonctions vectorielles de classe $C(I)$ bornées pour $x \in I$ et de même norme qu'au cas 1). Alors

$$|(K_j w_k)(x)| \leqslant \| w \|_B \int_a^x \| B(t) \| \, dt,$$

$$|(K_j w)_k(x)| \leqslant \| w \|_B \int_x^\infty \| B(t) \| \, dt$$

pour $x \geqslant a$ respectivement dans les cas (42a) et (42b). Si $a > 0$ est tel que $\int_a^\infty \| B(t) \| \, dt < 1$, alors $\| K_j \|_B < 1$ et l'équation (37) est justiciable de la méthode des approximations successives.

Mais ceci ne suffit encore pas à prouver le théorème de Levinson : il faut encore démontrer que $(K_j w)(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$ si $w(x) \in B$. Pour les composantes $(K_j w)_k$ dans le cas (42b) ceci résulte de la condition $B_1 \in L_1(]0, \infty[)$. Dans le cas (42a) utilisons la majoration plus exacte

$$|(K_j w)_k(x)| \leqslant \| w \|_B I_{jk}(x),$$

$$I_{jk}(x) = \int_a^x \exp\{\operatorname{Re} S_{kj}(t, x)\} \| B(t) \| \, dt.$$

La règle de L'Hospital nous donne

$$\lim_{x\to\infty} I_{jk}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_a^x \exp\{\operatorname{Re} S_{kj}(t, a)\} \| B(t) \| \, dt}{\exp\{\operatorname{Re} S_{kj}(t, a)\}} = \lim_{x\to\infty} \| B(x) \| = 0.$$

Ce qui entraîne le théorème de Levinson.

Remarque. La solution w_j de l'équation intégrale (39) satisfait les conditions aux limites

$$w_{jk}(a) = \delta_{jk} \text{ dans le cas (42a),}$$
$$w_{jk}(\infty) = 0 \quad \text{dans le cas (42b).}$$

Des conditions aux limites analogues posées aux points $x = a$ et $x = b$ sont satisfaites par les solutions de systèmes à grand paramètre λ. Un phénomène de type couche limite (chap. II, § 3, n° 3) caractérise le comportement asymptotique des solutions de ces systèmes.

§ 5. Equations et systèmes dans un plan complexe

1. Position du problème. Considérons l'équation d'ordre n

$$lw \equiv w^{(n)} + \lambda q_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + \lambda^n q_n(z) w = 0 \tag{1}$$

et le système de n équations

$$w' = \lambda A(z) w, \tag{2}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre. A l'équation (1) et au système (2) correspondent les équations caractéristiques

$$\begin{aligned} l(z, p) &\equiv p^n + q_1(z) p^{n-1} + \ldots + q_n(z) = 0, \\ l(z, p) &= \det(A(z) - pI) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

dont les racines seront désignées par $p_1(z), \ldots, p_n(z)$.

Soit D un domaine simplement connexe, éventuellement non borné, dans le plan de z complexe. Dans ce paragraphe on admettra que

1) les coefficients de l'équation (1) et du système (2) sont holomorphes dans le domaine D;

2) les racines $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ sont distinctes pour tous les $z \in D$.

Les équations (1), (2) ne possèdent donc pas de point de retour dans le domaine D. Les équations et systèmes présentant des points de retour seront traités au § 6. Dans ce paràgraphe on étudiera la représentation asymptotique des solutions des équations (1), (2) lorsque $\lambda \to +\infty$ et lorsque $z \to \infty$ si D est un domaine non borné.

Les formules asymptotiques sont exactement les mêmes qu'aux §§ 1 à 3, seules changent les conditions de leur application.

2. Equations et systèmes dans un domaine borné sans points de retour.

2.1. *Diagonalisation asymptotique d'un système.* Supposons que D est un domaine borné simplement connexe à bord ∂D différentiable par morceaux et que les conditions 1), 2) sont satisfaites dans son adhérence $[D]$. Les racines $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ sont alors toutes holomorphes dans $[D]$. Il existe une fonction matricielle $T(z)$ holomorphe et régulière dans $[D]$ qui ramène la matrice $A(z)$ à la forme diagonale

$$T^{-1}(z)\,A(z)\,T(z) = \operatorname{diag}(p_1(z), \ldots, p_n(z)).$$

En effet, le rang de la matrice $B(z) = A(z) - p_1(z)I$ est identiquement égal à $n-1$ pour $z \in [D]$. Soient $B_{11}(z), \ldots, B_{1n}(z)$ les mineurs relatifs aux éléments $b_{11}(z), \ldots, b_{1n}(z)$ de la matrice $B(z)$. Sans perdre en généralité on peut admettre que l'un de ces mineurs est non nul en un point $z_0 \in D$, donc que la fonction vectorielle $\tilde{e}_1(z) = (B_{11}(z), \ldots, B_{1n}(z))$ est holomorphe et non nulle dans un voisinage de z_0. La fonction vectorielle $\tilde{e}_1(z)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de zéros $z_1, \ldots, z_N$ dans $[D]$; désignons par m_k l'ordre minimal des zéros de ses composantes au point z_k. La fonction vectorielle $e_1(z) = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_N)^{k_N}\tilde{e}_1(z)^T$ sera alors holomorphe et non nulle dans $[D]$. On construit de façon analogue les autres vecteurs propres à droite $e_2(z), \ldots, e_n(z)$ de la matrice $A(z)$. Les fonctions matricielles $T(z)$ et $T^{-1}(z)$ et toutes leurs dérivées sont bornées dans $[D]$.

Remarque. Si les conditions 1), 2) sont satisfaites dans un domaine ouvert D, on peut comme précédemment construire une fonction matricielle $T(z)$ holomorphe et régulière dans D qui diagonalise la matrice $A(z)$. Mais ses dérivées ou celles de son inverse $T^{-1}(z)$ risquent d'être illimitées dans D.

Les raisonnements du n° 1.3 du § 1 entraînent l'existence de fonctions matricielles $T_1(z), \ldots, T_{N-1}(z)$ et de fonctions matricielles diagonales $\Lambda_0(z), \ldots, \Lambda_{N-1}(z)$ telles que la transformation

$$w = T(z)\left[I + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k} T_k(z)\right] u$$

ramène le système (2) à la forme diagonale

$$u' = [\lambda\Lambda_0(z) + \Lambda_1(z) + \ldots + \lambda^{-N+1}\Lambda_{N-1}(z) + \lambda^{-N} B_N(z, \lambda)]\, u$$

à $O(\lambda^{-N})$ près, où $N \geqslant 1$ est arbitraire et toutes les fonctions matricielles indiquées, holomorphes dans $[D]$,

$$\Lambda_0(z) = \Lambda(z), \quad \| B_N(z, \lambda) \| \leqslant c_N, \quad z \in [D], \quad \lambda \geqslant 1,$$
$$\Lambda_1(z) = -\operatorname{diag}\left(T^{-1}(z) \frac{d}{dz} T(z)\right).$$

I en va de même pour le système du premier ordre équivalent à l'équation (1).

2.2. *Chemins canoniques et domaines admissibles.* Introduisons les notations standards pour ce chapitre

$$S_j(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} p_j(t)\, dt, \quad S_{jk}(z_0, z) = \int_{z_0}^{z} [p_j(t) - p_k(t)]\, dt. \tag{4}$$

Toutes les intégrales sont prises le long de chemins contenus dans $[D]$. Supposons que la courbe $\gamma_{jk}(a, b)$ relie les points a et b et que la fonction $\operatorname{Re} S_{jk}(a, z)$ ne décroît pas lorsque z se déplace le long de cette courbe de a vers b. La courbe γ_{jk} s'appelle alors *chemin canonique* (comparer avec le chap. III, § 1). On appelle *vecteur-chemin canonique* $\gamma_j(b_j, z_0)$, $b_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn})$ d'extrémité z_0, le vecteur dont les composantes sont les chemins canoniques $\gamma_{jk}(b_{jk}, z_0)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. On appelle *matrice* (ou *étoile*) des chemins canoniques $\Gamma(b, z_0)$ d'extrémité z_0, la matrice dont les colonnes sont les vecteurs-chemins canoniques $\gamma_1(b_1, z_0), \ldots, \gamma_n(b_n, z_0)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Introduisons deux types de domaines admissibles.

1) Domaine j-admissible D : il existe des points $b_1, \ldots, b_n \in \partial G$ qui peuvent être reliés à chaque point $z \in [D]$ par un vecteur-chemin canonique $\gamma_j(b, z)$.

2) Domaine admissible D : D est un domaine j-admissible pour tout $j = 1, \ldots, n$.

2.3. *Représentation asymptotique des solutions.* Soit D un domaine j-admissible. Pour tout $N \geqslant 1$ l'équation (1) et le système (2) admettent alors des solutions de la forme

$$w_j(z, \lambda) = \exp\{\lambda S_j(z_0, z) + S_j^{(1)}(z_0, z)\} \times \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} a_{jk}(z) + O(\lambda^{-N})\right], \tag{5}$$

$$w_j(z, \lambda) = \exp\{\lambda S_j(z_0, z) + S_j^{(1)}(z_0, z)\} \times \left[e_j(z) + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda^{-k} e_{jk}(z) + O(\lambda^{-N})\right], \quad \lambda \to +\infty. \tag{6}$$

Les coefficients de ces développements asymptotiques sont confondus respectivement avec ceux de (7) du § 1 et (11) du § 2 et sont holo-

morphes dans $[D]$, $z_0 \in [D]$ étant un point arbitraire. Le résidu de la formule (5) est la fonction $\lambda^{-N}\varphi(z, \lambda)$ de classe C^∞ pour $z \in [D]$, $\lambda \geqslant 1$, holomorphe par rapport à $z \in [D]$ pour chaque $\lambda \geqslant 1$ fixe et $|\varphi(z, \lambda)| \leqslant c$ pour $z \in [D]$, $\lambda \geqslant 1$. Le résidu de la formule (6) est de la même forme. Les développements asymptotiques (5), (6) peuvent être dérivés par rapport à z et λ autant de fois qu'on le veut avec respect de l'uniformité en $z \in [D]$ de la majoration du résidu.

Les développements asymptotiques (5), (6) résultent directement des raisonnements du § 4, nº 4, puisque

$$|\exp\{\lambda S_{kj}(t, z)\}| \leqslant 1$$

si le point t est situé sur le chemin canonique $\gamma_{jk}(b_{jk}, z)$.

Si D est un domaine canonique, l'équation (1) et le système (2) admettent des systèmes fondamentaux de solutions de la forme (5), (6). La matrice fondamentale du système (2) est de la forme

$$W(z, \lambda) = T(z)[I + O(\lambda^{-1})] \exp\left\{\lambda \int_{z_0}^{z} \Lambda(t)\,dt + \int_{z_0}^{z} \Lambda_1(t)\,dt\right\}. \quad (7)$$

Signalons un cas particulier important. Supposons que la fonction matricielle $A(z)$ est holomorphe en z_0 et que les valeurs propres $p_1(z_0), \ldots, p_n(z_0)$ sont distinctes. Il existe alors un voisinage D du point z_0 qui est domaine admissible.

Remarque. Dans ce cas aucune contrainte n'est imposée aux fonctions $\operatorname{Re}[p_j(z) - p_k(z)]$ contrairement au cas non analytique (comparer avec le chap. II, § 7).

Les résultats indiqués ci-dessus se généralisent de façon évidente aux systèmes de la forme

$$w' = \lambda A(z, \lambda^{-1})\,w,$$

où la fonction matricielle $A(z, \varepsilon)$ est douée des propriétés suivantes:

1) $A(z, \varepsilon) \in C^\infty([D] \times I)$, $I = [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$.

2) La matrice $A(z, \varepsilon)$ est holomorphe dans $[D]$ pour chaque $\varepsilon \in I$ fixe.

3) Pour $\varepsilon \to +0$ on a le développement asymptotique

$$A(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(z)$$

uniformément en $z \in [D]$.

4) Les valeurs propres de la matrice $A_0(z)$ sont distinctes pour tous les $z \in [D]$.

2.4. *Formules de raccordement.* Soient $W(z, \lambda)$ une matrice fondamentale du système (2) et $w_j(z, \lambda)$ une solution de ce système. Alors

$$w_j(z, \lambda) = W(z, \lambda)\, \omega_j(\lambda),$$

où le n-vecteur $\omega_j(\lambda)$ est indépendant de z. Soit M un compact connexe du plan de z complexe, tel que son complémentaire ne contienne pas de domaines bornés. Un exemple type qui nous sera utile dans la suite est le suivant: $M = [D] \cup l_1 \cup l_2$, où D est un domaine simplement connexe borné de bord différentiable par morceaux, l_1 et l_2 des courbes différentiables par morceaux simples finies. Ces courbes ont leurs extrémités sur ∂D, ne se coupent pas et ne possèdent pas d'autres points communs avec $[D]$.

Supposons que la fonction matricielle $A(z)$ est holomorphe et ne possède pas de points de retour pour $z \in M$ et que les formules asymptotiques (5), (7) sont valables pour la solution w_j et pour la matrice fondamentale W uniformément en $z \in M$ lorsque $\lambda \to +\infty$. Alors

$$\omega_{jj}(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \quad \omega_{jk}(\lambda) = O(\lambda^{-1} e^{\lambda a_{jk}}), \quad j \neq k, \tag{8}$$
$$a_{jk} = \min_{z \in M} \operatorname{Re} S_{jk}(z_0, z) < 0.$$

Soient $W_1(z, \lambda)$, $W_2(z, \lambda)$ des matrices fondamentales du système (2); alors

$$W_2(z, \lambda) = W_1(z, \lambda)\, \Omega(\lambda),$$

où la matrice de passage $\Omega(\lambda)$ est indépendante de z. Si les matrices fondamentales W_1 et W_2 admettent un développement asymptotique de la forme (7), alors

$$\Omega(\lambda) = I + \operatorname{diag} O(\lambda^{-1}) + O(e^{-c\lambda}), \quad c > 0, \quad \lambda \to +\infty. \tag{9}$$

3. Structure des domaines admissibles.

3.1. *Structure locale des points de retour et des lignes de Stokes.* Soient z_0 un point de retour, U un disque $|z - z_0| \leqslant r$ de rayon $r > 0$ assez petit. Toute racine $p_j(z)$ admet un développement

$$p_j(z) = p_j(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(z - z_0)^{kp_j/q_j},$$

convergent dans U, où $p_j \geqslant 1$, $q_j \geqslant 1$ sont des entiers premiers entre eux. Si $q_j = 1$, la fonction $p_j(z)$ est holomorphe dans U; si $q_j \geqslant 2$, le point z_0 est un point de branchement d'ordre q_j de la fonction $p_j(z)$. Dans le domaine U le polynôme caractéristique admet la décomposition en éléments simples: $l(z, p) = l_1^{m_1}(z, p) \ldots l_N^{m_N}(z, p)$, $l_j(z, p) \not\equiv \text{const}$, où $m_1, \ldots, m_N$ sont des entiers >0, $l_1(z, p), \ldots$ $\ldots, l_N(z, p)$ des polynômes en p deux à deux distincts dont les

coefficients sont des fonctions holomorphes dans U. Chaque polynôme $l_j(z, p)$ est irréductible

$$l_j(z, p) = p^{n_j} + a_{j1}(z) p^{n_j - 1} + \dots$$

Si $n_j = 1$, la racine $p_j(z)$ de l'équation $l_j(z, p) = 0$ est une fonction holomorphe dans U. Si $n_j \geqslant 2$, les racines de l'équation $l_j(z, p)$ se développent en séries de Puiseux

$$p(z) = p(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(z - z_0)^{kq_j/n_j} \qquad (10)$$

convergentes dans U, où $q_j \geqslant 1$ est un entier premier à n_j. Donc z_0 est un point de branchement d'ordre n_j pour chaque racine.

Deux cas seulement sont possibles pour les équations du second ordre.

1) Le polynôme $l(z, p) = p^2 + a(z) p + b(z)$ est irréductible. Le point z_0 est alors un point de branchement d'ordre deux pour les racines $p_1(z)$ et $p_2(z)$.

2) Le polynôme $l(z, p)$ est réductible. Alors $l(z, p) = (p - p_1(z)) \times (p - p_2(z))$ et les fonctions $p_1(z)$ et $p_2(z)$ sont holomorphes dans U.

Pour l'équation d'ordre n, les racines pour lesquelles le point de retour z_0 est soit un point d'analyticité, soit un point de branchement d'ordre entier quelconque peuvent être confondues en z_0.

Soit $p_j(z_0) = p_k(z_0)$, $j \neq k$. La ligne de niveau

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} [p_j(t) - p_k(t)]\, dt = 0,$$

issue du point z_0 s'appelle *ligne de Stokes*. En vertu de (10), il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que le point z_0 est un point de branchement d'ordre r de la fonction $p_j(z) - p_k(z)$. Alors

$$p_j(z) - p_k(z) \sim a(z - z_0)^{q/r}, \quad z \to z_0,$$

où $a \neq 0$, $q \geqslant 1$ est un entier et du point z_0 sont issues $2(p + q)$ lignes de Stokes au plus.

Remarque. Il est plus correct d'étudier les lignes de Stokes non pas sur le plan de z mais sur la surface de Riemann $\widetilde{U}$ d'une fonction algébroïde $\widetilde{p}(z)$ définie par l'équation

$$\widetilde{l}(z, \widetilde{p}) \equiv \prod_{j \neq k} [\widetilde{p} - (p_j(z) - p_k(z))] = 0. \qquad (11)$$

On construit le polynôme $\widetilde{l}$ de la manière suivante. On fixe un point $z_1 \in U$, $z_1 \neq z_0$; l'équation (3) admet alors dans un petit voisinage

simplement connexe V de z_1 n racines distinctes $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ qui sont holomorphes dans V. Ceci définit le polynôme $\tilde{l}$ dans le domaine V:

$$\tilde{l}(z, p) = p^n + b_1(z)p^{n-1} + \ldots + b_n(z),$$

les fonctions $b_1(z), \ldots, b_n(z)$ étant holomorphes pour $z \in V$. Soit γ un cercle $|z - z_0| = |z - z_1|$ d'origine et d'extrémité z_1; lorsqu'on contourne le point z_0 le long de γ, on a alors $p_j(z) \to \to p_{s_j}(z)$, et de plus l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_n\}$ est confondu avec l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. De là il s'ensuit que les coefficients du polynôme $\tilde{l}$ sont holomorphes dans le domaine U et l'équation (11) définit une fonction algébroïde multivalente $\tilde{p}(z)$. La courbe γ: $\mathrm{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{p}(t)\,dt = 0$, où $\zeta_0 \in \tilde{U}$ et se projette en z_0, est une ligne de Stokes située sur $\tilde{U}$. Les lignes de Stokes portées par $\tilde{U}$ sont distinctes, mais leurs projetées sur U peuvent être confondues.

Exemples. 1. Soit $l(z, p) = p^n - i^n z^m$, où n et m sont des entiers premiers entre eux; le polynôme l est alors irréductible et les lignes de Stokes sont les rayons

$$l_k : \mathrm{Arg} = \frac{nk\pi}{m+n}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

2. Soit $l(z, p) = (p^2 - z)(p^3 - z)$; alors

$$\tilde{l}(z, p) = (p^2 - z)(p^3 - 3\sqrt{3}z^2)(p^3 + 3\sqrt{3}z^2) \times \times [(p^2 - z)^3 - z^2][(p^2 - z)^3 + z^2].$$

La surface de Riemann $\tilde{U}$ est constituée d'une surface à deux feuillets, de deux surfaces à trois feuillets et de deux surfaces à six feuillets.

3.2. *Domaines admissibles.* Soient D un domaine simplement connexe borné dans le plan de z complexe dont le bord ∂D est composé d'un nombre fini de courbes analytiques simples, $f(z)$ une fonction holomorphe dans D et continue dans $[D]$. Le domaine D est dit *admissible* (pour la fonction $f(z)$) s'il existe un point $a \in \partial D$ tel que tout point $z_0 \in [D]$ est susceptible d'être relié au point a par une courbe γ le long de laquelle la fonction $u = \mathrm{Re}\, f(z)$ est croissante (lorsque z se déplace de a vers z_0 le long de γ).

Dans le travail [81] on a établi des conditions nécessaires et suffisantes pour que D soit admissible. Bornons-nous à les énoncer pour le cas élémentaire où ∂D ne contient que les points de minimum iso-

lés et les points cols de la fonction $u(z)$. Un point $z_0 \in \partial D$ s'appelle *col* si sont satisfaites les conditions:

1) le domaine D contient au moins deux lignes de niveau $\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \gamma_k$ d'extrémités z_0 sur lesquelles $u(z) = u(z_0)$;

2) il existe au moins deux secteurs de sommet z_0, bornés par les courbes γ_j et des arcs de frontière ∂D, dans lesquels $u(z) < u(z_0)$.

Dans cette définition les domaines des grandes valeurs $u(z) >$ $> u(z_0)$ et des petites valeurs $u(z) < u(z_0)$ ne jouent pas le même rôle.

L'une quelconque des conditions énoncées plus bas est nécessaire et suffisante pour que le domaine D soit admissible.

A. ∂D ne contient pas de cols.

B. ∂D contient un seul point de minimum.

Ces conditions sont équivalentes. Ce résultat a été établi dans le cas général dans [81].

Il existe une différence fondamentale entre les équations d'ordre deux et les équations d'ordre supérieur à deux. Supposons pour simplifier que les coefficients de ces équations sont des polynômes en z. Un domaine D est admissible pour l'équation

$$w'' - \lambda^2 q(z)\, w = 0 \tag{12}$$

s'il l'est pour une seule fonction $f(z) = \int^z \sqrt{q(t)}\, dt$ moyennant un choix convenable d'une branche de cette racine. Pour une équation d'ordre n, ce domaine est admissible s'il l'est pour l'ensemble de $n(n-1)$ fonctions

$$f_{jk}(z) = \int^z [p_j(t) - p_k(t)]\, dt, \quad 1 \leqslant j, \quad k \leqslant n, \quad j \neq k.$$

Au chap. III, § 3, n° 2 on a montré que s'il n'existe pas de points de retour multiples et de lignes de Stokes finies, le plan de z complexe muni d'un nombre fini de coupures le long de certaines lignes de Stokes est un domaine admissible pour l'équation (12). Ceci n'est visiblement pas valable déjà pour les équations d'ordre trois, même à racines asymptotiquement simples à l'infini, car les lignes de Stokes peuvent se couper sur le plan de z complexe.

Exemple. L'équation

$$w''' - 3\lambda w' + \lambda^3 z w = 0$$

présente deux points de retour: $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Les lignes de Stokes se coupent dans ce cas (fig. 24). Par ailleurs, le point $z = \infty$ est un point singulier irrégulier pour l'équation (12), alors que pour

l'équation (2) il peut être la confluence de points singuliers réguliers et irréguliers, de points non singuliers et de points de retour.

4. Equations et systèmes dans des domaines non bornés. Soit D un domaine simplement connexe non borné dans le plan de z complexe. Les définitions des chemins canoniques, des domaines j-admissibles et admissibles (n° 2.2) s'étendent *in extenso* aux domaines non bornés, à ceci près que l'une des extrémités d'un chemin canonique peut être le point $z = \infty$.

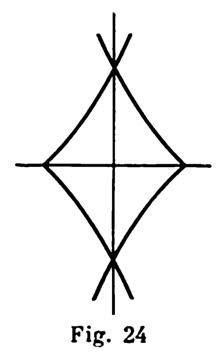


Fig. 24

4.1. *Equations et systèmes sans paramètre.* On admettra pour simplifier que ∂D est composée d'une seule composante connexe. Considérons le système de n équations

$$w' = A(z)\, w, \tag{13}$$

où la fonction matricielle $A(z)$ est holomorphe pour $z \in [D]$ et satisfait des conditions identiques à celles du § 4, n° 1.1 :

1) $$A(z) = q(z)\, Q^{-1}(z)\, B(z)\, Q(z),$$
$$Q(z) = \operatorname{diag}(q^{\alpha_1}(z), \ldots, q^{\alpha_n}(z)),$$

où la fonction $q(z)$ et la fonction matricielle $B(z)$ sont holomorphes pour $z \in [D]$, $q(z) \neq 0$.

2) la limite $\lim\limits_{z \to \infty} B(z)$ existe et est finie: $\lim\limits_{z \to \infty} B(z) = B(\infty) < \infty$, les valeurs propres η_j de la matrice $B(\infty)$ sont distinctes et non nulles.

3) $\lim\limits_{z \to \infty,\ z \in [D]} r_1(z) = 0,$

$$r_1(z) = |q'(z)|\, |q(z)|^{-2} + |q(z)|^{-1}\, \| B'(z) \|.$$

Les valeurs propres de la matrice $A(z)$ sont de la forme

$$p_j(z) = [\eta_j + o(1)]\, q(z), \quad z \to \infty, \quad z \in [D].$$

4) Le domaine $[D]$ est j-admissible.

Soit $r_2(z)$ la fonction introduite au § 4, n° 1.1. La condition 4) de ce numéro implique la convergence de l'intégrale de la fonction $r_2(x)$ sur le demi-axe $[0, \infty[$. Pour le système (13) traité dans le plan complexe on exige la convergence des intégrales de la fonction

$r_2(z)$ le long des chemins canoniques $\gamma_{jk}(z)$. Introduisons les fonctions

$$\rho_{jk}(z) = \inf \int\limits_{\gamma_{jk}(z)} |r_2(t)|\,|dt|,$$

où la borne inférieure est prise sur tous les chemins canoniques reliant les points z_{jk} et z, et posons la condition:

5) $\sup\limits_{z \in [D]} \rho_{jk}(z) < \infty$ pour tous les $k = 1, \ldots, n$.

Le système (13) admet alors une solution de la forme

$$w_j(z) = \exp\left\{\int\limits_{z_0}^{z} [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)]\,dt\right\}\left[e_j(z) + \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(z)\,e_k(z)\right],$$

$$|u_{jk}(z)| \leqslant k_j(z), \qquad \lim_{z\to\infty,\ z\in[D]} k_j(z) = 0.$$

Si D est un domaine admissible et la condition 5) est satisfaite pour tous les j, le système (13) admet une matrice fondamentale de la forme (5) du § 4, où

$$\|U(z)\| \leqslant k(z), \qquad \lim_{z\to\infty,\ z\in[D]} k(z) = 0.$$

Les conditions de validité des formules asymptotiques (15), (35), (45) du § 3 et (28), (36) du § 4 lorsque $z \to \infty$, $z \in D$ s'énoncent de façon analogue.

4.2. *Représentations asymptotiques doubles.* Considérons le système (2) sous les conditions 1) à 5) du n° 2.1 et soient remplies les conditions:

6) $$\lim_{z\to\infty,\ z\in[D]} \operatorname{Re} \int\limits_{z_0}^{z} [p_j(t) - p_k(t)]\,dt = \infty$$

pour tous les $k \neq j$.

7) $$\left|\operatorname{Re} \int\limits_{z_0}^{z} [p_j(t) - p_k(t)]\,dt\right| \geqslant c\left|\operatorname{Re} \int\limits_{z_0}^{z} [p_j^{(1)}(t) - p_k^{(1)}(t)]\,dt\right|,$$

$$z \in [D], \quad |z| \gg 1,$$

pour tous les $k \neq j$.

Le système (2) admet alors des solutions de la forme

$$w_j(z, \lambda) \doteq \exp\left\{\lambda \int\limits_{z_0}^{z} p_j(t)\,dt + \int\limits_{z_0}^{z} p_j^{(1)}(t)\,dt\right\} \times$$

$$\times \left[e_j(z) + \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(z, \lambda)\,e_k(z)\right],$$

où

$$|u_{jk}(z, \lambda)| \leqslant k_j(z), \qquad \lim_{z\to\infty,\ z\in[D]} k_j(z) = 0$$

pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$. Les conditions de validité des doubles représentations asymptotiques des §§ 3, 4 pour $x \geqslant 0$ s'énoncent de façon analogue.

4.3. *L'équation* (1) *avec des coefficients polynomiaux.* Dans ce cas les racines de l'équation caractéristique se développent en séries de Puiseux convergentes pour $|z| \geqslant R \gg 1$:

$$p_j(z) = z^{q_j/r_j} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-kq_j/r_j},$$

où q_j et r_j sont des entiers premiers entre eux; $r_j \geqslant 1$. Dans le travail [92] on étudie le cas suivant:

1) Le degré $m \geqslant 1$ du polynôme $q_n(z)$ est supérieur à ceux des polynômes $q_1(z), \ldots, q_{n-1}(z)$.

2) Les racines $p_j(z)$ sont asymptotiquement simples (§ 3).

La condition 1) entraîne que $a_{j0} \neq 0$, $q_j \geqslant 0$ pour tous les j et l'on peut introduire une numérotation telle que

$$0 \leqslant q_1/r_1 \leqslant q_2/r_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n/r_n.$$

Soit l le rayon $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$ du plan de z complexe tel que aucune des différences $\operatorname{Re}[p_j(z) - p_k(z)]$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, ne change de signe pour $z \in l$, $|z| \gg 1$. Il existe alors un secteur S: $\varphi_0 - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \varphi_0 + \delta$ tel que l'équation (1) possède une solution de la forme

$$w_j(z, \lambda) = z^{\nu} \exp\left\{\lambda \int_{z_0}^{z} p_j(t)\,dt\right\} \left[\sum_{k=0}^{N} \lambda^{-k} u_{jk}(z) + \lambda^{-N-1} R_{jN}(z, \lambda)\right],$$

où ν est un nombre rationnel, $N \geqslant 1$ un nombre quelconque. Les fonctions $u_{jk}(z)$ sont holomorphes pour $z \in S$, et si l'on choisit $\lambda_0 > 0$ et $R > 0$ assez grands, alors

$$|R_{jN}(z, \lambda)| \leqslant c_N |z|^{-(N+1)(1+q_1/r_1)}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \quad |z| \geqslant R.$$

Les fonctions $u_{jk}(z)$ sont d'ordre $O(|z|^{-j(1+q_1/r_1)})$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S$. Les dimensions du secteur S sont indiquées de façon plus précise dans [92].

Remarque. Le terme principal de la représentation asymptotique est donné par la formule (24) du § 3. Dans [92] on trouvera des formules plus compliquées pour ν et $u_{j0}(z)$.

§ 6. Points de retour

1. Position du problème. Considérons le système de n équations

$$\varepsilon y' = A(x, \varepsilon) y \tag{1}$$

et l'équation d'ordre n

$$ly \equiv \varepsilon^n y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{n-j} q_j(x, \varepsilon) y^{(n-j)} = 0, \tag{2}$$

où ε est un petit paramètre. Notons

$$\begin{aligned} l(x, p; \varepsilon) &= \det [A(x, \varepsilon) - pI], \\ l(x, p; \varepsilon) &= p^n + \sum_{j=1}^{n} q_j(x, \varepsilon) p^{n-j} \end{aligned} \tag{3}$$

respectivement pour le système (1) et l'équation (2). Il existe deux définitions d'un point de retour.

1. Un point x_0 est un *point de retour* du système (1) ou de l'équation (2) si l'équation $l(x_0, p; 0) = 0$ admet une racine multiple.

Dans ce cas la matrice $A(x_0, 0)$ possède une valeur propre multiple. Le point de retour se trouve par élimination de p entre les équations

$$l(x, p; 0) = 0, \quad l_p(x, p; 0) = 0.$$

2. Un point $x_0 = x_0(\varepsilon)$ est un *point de retour* du système (1) ou de l'équation (2) si l'équation $l(x_0(\varepsilon), p; \varepsilon) = 0$ admet une racine multiple.

Il est évident que ces définitions ne sont pas équivalentes. Par exemple, l'équation

$$\varepsilon^2 y'' - (x^n - \varepsilon) y = 0,$$

où $n \geqslant 2$ est un entier, admet un seul point de retour $x_0 = 0$ d'après la définition 1 et n points de retour $x_j(\varepsilon) = \sqrt[n]{\varepsilon}$ d'après la définition 2. On se servira en règle générale de la première définition.

L'un des principaux problèmes de la théorie asymptotique des équations différentielles linéaires ordinaires est la construction de la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions du système (1) et de l'équation (2) au voisinage d'un point de retour. Ce problème est extrêmement compliqué. Même lorsque les coefficients sont analytiques en x et ε, on ne sait pas comment construire dans le cas général les solutions asymptotiques formelles et encore moins comment les démontrer rigoureusement.

Dans ce paragraphe on étudie les types les plus élémentaires de points de retour. Partout dans la suite on admettra qu'est remplie l'une des conditions suivantes.

C. La fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est indéfiniment dérivable pour $|x - x_0| \leqslant a$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, où $a > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

A. La fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x et ε pour $x \in [D]$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ et D est un domaine simplement connexe borné du plan de la variable complexe x à bord différentiable par morceaux.

2. Point de retour simple. A ce type se rapportent les points de retour au voisinage desquels les systèmes fondamentaux de solutions de l'équation ou du système s'expriment au moyen des fonctions d'Airy.

2.1. *Structure des racines.* Considérons l'équation scalaire (2) sous la condition C. Un point de retour x_0 est dit *simple* si sont réalisées les conditions:

1) L'équation $l(x_0, p; 0) = 0$ admet une racine double p_0; les autres sont simples.

2) $l_x(x_0, p_0; 0) \neq 0$.

On admettra pour fixer les idées que $p_1(x_0, 0) = p_2(x_0, 0) = p_0$; les valeurs $p_3(x_0, 0) = p_3^0, \ldots, p_n(x_0, 0) = p_n^0$ sont alors distinctes et non égales à p_0. Soient $I = [x_0 - a, x_0 + a]$, $J = [0, \varepsilon_0]$, où $a > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_0 \ll 1$. Si I ne contient pas d'autres points de retour, alors $p_j(x, \varepsilon) \in C^\infty(I \times J)$ pour $3 \leqslant j \leqslant n$. Le symbole l se représente par

$$l(x, p; \varepsilon) = (p^2 - 2\alpha(x, \varepsilon)p + \beta(x, \varepsilon)) \times \\ \times (p - p_3(x, \varepsilon)) \ldots (p - p_n(x, \varepsilon)), \quad (4)$$

où $\alpha, \beta \in C^\infty(I \times J)$, de sorte que

$$p_{1,2}(x, \varepsilon) = \alpha(x, \varepsilon) \pm \sqrt{D(x, \varepsilon)}, \quad D = \alpha^2 - \beta, \quad (5)$$
$$D(x_0, 0) = 0, \quad D'_x(x_0, 0) \neq 0.$$

Sous la condition A les fonctions $\alpha(x, \varepsilon)$, $\beta(x, \varepsilon)$, $p_3(x, \varepsilon), \ldots$ $\ldots, p_n(x, \varepsilon)$ sont holomorphes dans un voisinage complexe du point $(x = x_0, \varepsilon = 0)$ et le point $x = x_0$ est un point de branchement d'ordre deux pour les racines $p_1(x, 0)$ et $p_2(x, 0)$.

Considérons le système (1). Sans perte de généralité, on peut admettre que la matrice $A(x_0, 0)$ est réduite à la forme normale de Jordan. Un point de retour x_0 du système (1) est dit *simple* si sont

satisfaites les conditions 1), 2) et si sa forme normale contient un bloc de Jordan d'ordre deux

$$A(x_0, 0) = \begin{bmatrix} p_0 & 1 & & & 0 \\ & p_0 & & & \\ & & p_3^0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & p_n^0 \end{bmatrix}, \quad p_j^0 = p_j(x_0, 0).$$

Si x_0 est un point de retour simple, on a les relations

$$l(x_0, p_j^0; 0) = 0, \quad l_p(x_0, p_j^0; 0) \neq 0, \quad j = 3, \ldots, n,$$
$$l(x_0, p_0; 0) = l_p(x_0, p_0; 0) = 0,$$
$$l_{pp}(x_0, p_0; 0) \neq 0, \quad l_x(x_0, p_0; 0) \neq 0.$$

Soit x_0 un point de retour simple du système (1) ou de l'équation (2) au sens de la définition 1. Pour les petits ε il existe alors un seul point de retour $x_0 = x_0(\varepsilon)$ au sens de la définition 2, c'est-à-dire que l'équation

$$l(x_0(\varepsilon), p; \varepsilon) = 0$$

admet une racine multiple $p_0(\varepsilon)$ pour ε assez petit. Ceci étant, $x_0(\varepsilon)$, $p_0(\varepsilon) \in C^\infty(J)$, $x_0(0) = x_0$, $p_0(0) = p_0$. Le point de retour simple x_0 est stable pour les petites perturbations des coefficients.

2.2. *Solutions asymptotiques formelles de l'équation* (2). L'équation (2) admet des solutions asymptotiques formelles $y_3(x, \varepsilon), \ldots$ $\ldots, y_n(x, \varepsilon)$ de la forme (5) du § 1. Soient $x_0 = 0$, $D(x)$ une fonction réelle et $D'(0) > 0$ pour fixer les idées ; alors $D(x) > 0$ pour $x > 0$ et $D(x) < 0$ pour $x < 0$. Traitons d'abord le cas où les coefficients de l'équation (2) ne dépendent pas de ε. On cherchera les solutions asymptotiques formelles de l'équation (2) qui nous manquent sous la forme

$$y_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/6}\left[Av(-\varepsilon^{-2/3}\xi) + Bi\,\varepsilon^{1/3}v'(-\varepsilon^{-2/3}\xi)\right] \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(t)\,dt\right\},$$

$$a(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_2(x)), \tag{6}$$

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)\varepsilon^k, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\varepsilon^k,$$

où v est une fonction d'Airy-Fock (chap. IV, § 1).

On pourrait procéder comme au § 1, chap. IV : porter la solution asymptotique formelle (6) dans l'équation (2) et établir ensuite des relations récurrentielles pour les fonctions $A_j(x)$ et $B_j(x)$. Mais il existe une méthode plus simple, basée sur les faits suivants :

1. Il existe une solution asymptotique formelle de la forme (6).
2. Si x est tel que $\varepsilon^{2/3}\,|\,\xi(x)\,|\gg 1$, l'équation (2) admet des solutions asymptotiques formelles $\tilde{y}_{1,2}(x,\varepsilon)$ de la forme (5) du § 1.

L'une de ces solutions, pour $x\leqslant -\delta<0$ est de la forme

$$\tilde{y}_1(x,\varepsilon)=$$
$$=\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^x a(t)\,dt+\varepsilon^{-1}\int_0^x \sqrt{D(t)}\,dt+\int^x\varphi(t)\,dt\right\}\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)\,\varepsilon^k\right],$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{p_1'(x)}{p_k(x)-p_1(x)}.$$

On obtient la solution $\tilde{y}_2$ à partir de $\tilde{y}_1$ en remplaçant $\sqrt{D}$ par $-\sqrt{D}$ et p_1 par p_2 dans la formule de φ. Transformons $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=-\frac{D'(x)}{4D(x)}+\varphi_1(x)+\frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{D(x)}},\\ \varphi_1(x)&=\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{2a'(x)\,p_k(x)+D'(x)}{(p_k(x)-a(x))^2-D(x)},\\ \varphi_2(x)&=-\frac{a'(x)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{D'(x)\,(p_k(x)-a(x))+2a'(x)\,D(x)}{(p_k(x)-a(x))^2-D(x)},\end{aligned}\tag{7}$$

où $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\in C^\infty(I)$ et posons

$$\exp\left\{\int^x\varphi(t)\,dt\right\}=[D(x)]^{-1/4}\exp\left\{\int_0^x\left[\varphi_1(t)+\frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}}\right]dt\right\}.$$

Choisissons les branches des racines de telle sorte que

$$\begin{aligned}&\sqrt{D(x)}>0,\quad \sqrt[4]{D(x)}>0,\quad x>0,\\ &\sqrt{D(x)}=-i\,|\sqrt{D(x)}|,\quad \sqrt[4]{D(x)}=e^{-i\pi/4}\,|\sqrt[4]{D(x)}|,\quad x<0.\end{aligned}$$

Pour les fonctions analytiques ceci exprime que lorsqu'on passe du demi-axe $x>0$ au demi-axe $x<0$ le point de branchement $x=0$ est contourné par en bas. Calculons A_0 et B_0. Remplaçons la fonction

v par son développement asymptotique lorsque $\varepsilon \to +0$, $\xi(x) \geqslant \geqslant \delta_1 > 0$; le terme principal de la solution asymptotique formelle y_0 sera de la même forme que celui de

$$\tilde{y}_0 = (-i + O(\varepsilon))\,\tilde{y}_1 + (1 + O(\varepsilon))\,\tilde{y}_2.$$

La comparaison des solutions asymptotiques formelles y_0 et $\tilde{y}_0$ nous donne

$$\xi(x) = \left[-\frac{3i}{2}\int_0^x \sqrt{D(t)}\,dt\right]^{2/3},$$

ou, compte tenu du choix de la branche de la racine,

$$\xi(x) = \left[\frac{3}{2}\int_0^x |\sqrt{D(t)}|\,dt\right]^{2/3}, \qquad x < 0,$$

$$\xi(x) = -\left[\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{D(t)}\,dt\right]^{2/3}, \qquad x > 0.$$

Comme $\xi(x) \in C^\infty(I)$, $\operatorname{sgn}\xi(x) = -\operatorname{sgn} x$, on obtient le système d'équations en A_0 et B_0

$$\frac{1}{2}\left(A_0\xi^{-1/4} \pm B_0\xi^{1/4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{D(x)}}\exp\left\{\int_0^x \left[\varphi_1(t) \pm \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}}\right]dt\right\},$$

d'où

$$A_0(x) = \frac{\xi^{1/4}(x)}{D^{1/4}(x)}\,e^{\psi_1(x)}\operatorname{ch}\psi_2(x),$$

$$B_0(x) = \frac{1}{[\xi(x)\,D(x)]^{1/4}}\,e^{\psi_1(x)}\operatorname{sh}\psi_2(x), \tag{8}$$

$$\psi_1(x) = \int_0^x \varphi_1(t)\,dt, \quad \psi_2(x) = \int_0^x \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{D(t)}}\,dt,$$

de sorte que A_0, $B_0 \in C^\infty$ pour $x \leqslant 0$. Si l'on choisit la branche $\xi^{1/4}(x) = e^{i\pi/4}|\xi(x)|^{1/4}$, $x \geqslant 0$, alors A_0, $B_0 \in C^\infty(I)$. L'équation (2) admet également des solutions y_1 et y_2 de la forme (6) à (8) dans lesquelles la fonction v est remplacée par les fonctions w_1 et w_2 (chap. IV, § 1).

Les formules asymptotiques se simplifient fortement pour les équations de forme auto-adjointe

$$ly = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n\,\varepsilon^{2k}\,[q_{n-k}(x)\,y^{(k)}]^{(k)} = 0. \tag{9}$$

L'équation caractéristique (§ 1) ne contenant que des puissances paires de p, ses racines forment des couples $\{p_j(x, \varepsilon), -p_j(x, \varepsilon)\}$. Un point de retour x_0 est simple dans le cas où $p_j = 0$ pour un certain j et les autres racines p_k sont distinctes et non nulles en ce point.

Si $x_0 = 0$, les coefficients de l'équation (9) sont indépendants de ε et $p_1(0) = 0$; alors $p_1(x) = \sqrt{D(x)}$, $p_2(x) = -\sqrt{D(x)}$. Pour $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ prenons les solutions de représentations asymptotiques

$$\tilde{y}_j(x, \varepsilon) = \frac{f_j(x)}{\sqrt[4]{D(x)}}[1 + O(\varepsilon)], \quad f_j(x) = \left[\prod_{k=3}^{n}(p_j(x) - p_k(x))\right]^{-1/2}, \quad j = 1, 2,$$

dont l'existence est prouvée au § 1. Pour A_0 et B_0 on obtient alors les formules

$$A_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\xi(x)}{D(x)}}[f_1(x) + f_2(x)],$$

$$B_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi(x)D(x)}}[f_1(x) - f_2(x)].$$

Si les coefficients de l'équation (2) dépendent de ε, il existe pour les petits $|\varepsilon|$ un seul point de retour $x = x_0(\varepsilon)$, $x_0(0) = 0$, $x_0(\varepsilon) \in C^\infty$ qui se déduit du système

$$l(x, p; \varepsilon) = 0, \quad l_p(x, p; \varepsilon) = 0.$$

Faisons le changement de variable $x - x_0(\varepsilon) = \tilde{x}$; l'égalité $p_1(\tilde{x}, \varepsilon) = p_2(\tilde{x}, \varepsilon)$ n'est alors possible que pour $\tilde{x} = 0$, de sorte que le discriminant D (cf. (5)) est de la forme

$$D(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{x}D_1(\tilde{x}, \varepsilon), \quad D_1(0, 0) \neq 0.$$

Si la fonction $D(\tilde{x}, \varepsilon)$ est réelle et $D_1(0, 0) > 0$, les formules (6) à (9) établies ci-dessus sont valables. La seule différence est qu'il faut remplacer x par $\tilde{x}$ dans toutes les formules, si bien que les fonctions $\xi_0, \xi_1, p_1, \ldots, p_n$ dépendront encore de ε.

2.3. *Représentation asymptotique des solutions de l'équation* (2). Supposons que x_0 est un point de retour simple et qu'est satisfaite la condition suivante:

3) Les fonctions $\mathrm{Re}\,[p_1(x) - p_j(x)]$, $\mathrm{Re}\,[p_2(x) - p_j(x)]$ ne changent pas de signe pour $x \in I$.

L'équation (2) admet alors des solutions y_0, y_1 et y_2 de la forme (6) à (9) (dans les solutions $y_{1,2}$ il faut remplacer v par $w_{1,2}$) dans lesquelles les séries $A(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ sont asymptotiques lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en $x \in I$.

Si les coefficients de l'équation (2) vérifient la condition A du n° 1, il existe un voisinage complexe U du point x_0 dans lequel les développements asymptotiques indiqués sont valables lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en $x \in U$. Tous ces développements asymptotiques peuvent être dérivés autant de fois qu'on le veut par rapport à x et à ε avec préservation de la majoration uniforme du résidu.

2.4. *Représentation asymptotique des solutions du système* (1). Sans perdre en généralité on peut admettre que $x_0(\varepsilon) = 0$ (cf. n° 2.2). Les fonctions scalaires, vectorielles et matricielles envisagées plus bas sont toutes de classe $C^\infty(I)$ si $A(x, \varepsilon)$ satisfait la condition C du n° 1, et sont holomorphes dans le domaine D si $A(x, \varepsilon)$ satisfait la condition A. L'intervalle $I \ni 0$ et le domaine $D \ni 0$ sont supposés petits. Notons $D(x) = D(x, 0)$ (cf. (5)), $A_0(x) = A(x, 0)$, $p_j(x) = p_j(x, 0)$. Il existe une matrice $T_0(x)$ ramenant la matrice $A_0(0)$ pour $x \in I$ ($x \in D$) à la forme diagonale par blocs

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T(x) = \begin{bmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & \Lambda(x) \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 1 \\ D(x) & a(x) \end{bmatrix}, \quad a(x) = \frac{1}{2}[p_1(x) + p_2(x)], \tag{10}$$

$$\Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_3(x), \ldots, p_n(x)).$$

La transformation

$$y = \exp\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x [p_1(t) + p_2(t)]\, dt\right\} T_0(x) u \tag{11}$$

ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon u' = B_0(x) u + \varepsilon B(x, \varepsilon) u, \tag{12}$$

$$B(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} T_0^{-1}(x) [A(x, \varepsilon) - A(x, 0)] T_0(x) - T^{-1}(x) T'(x),$$

où $B_0(x)$ est une matrice diagonale par blocs:

$$B_0(x) = \operatorname{diag}(\tilde{B}(x), \Lambda(x) - a(x) I_{n-2}),$$

$$\tilde{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $B(x, \varepsilon) = B_1(x) + \varepsilon B_2(x) + \ldots$ On cherchera une solution asymptotique formelle du système (12) sous la forme

$$u(x, \varepsilon) = w(\varepsilon^{-2/3}\xi(x)) f(x, \varepsilon) + \varepsilon^{1/3} w'(\varepsilon^{-2/3}\xi(x)) g(x, \varepsilon),$$
$$f(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \varepsilon^k, \quad g(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \varepsilon^k, \tag{13}$$

où $w(t)$ est solution de l'équation d'Airy $w'' - tw = 0$. En portant (13) dans (12) et en égalant les coefficients de w et w', on obtient le système

$$\xi'\xi g + \varepsilon f' = (B_0 + \varepsilon B) f,$$
$$\xi' f + \varepsilon g' = (B_0 + \varepsilon B) g.$$

Développons f, g et B en séries de ε et identifions les coefficients des puissances de ε ; on obtient alors un système récurrentiel d'équations pour f_k et g_k. Le premier couple d'équations est de la forme

$$B_0 f_0 = \xi'\xi g_0, \quad B_0 g_0 = \xi' f_0,$$

de sorte que

$$B_0^2 f_0 = \xi'^2 \xi f_0, \quad B_0^2 g_0 = \xi'^2 \xi g_0.$$

Remarquons que $B_0^2 = \operatorname{diag}(D(x) I_2, (\Lambda(x) - Ia(x))^2)$, et posons

$$\xi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{D(t)}\, dt \right)^{2/3}. \tag{14}$$

Supposons pour fixer les idées que $x \in I$, $D(x) > 0$ pour $x > 0$ et choisissons la branche de $\sqrt{D(x)}$ comme au n° 2.2 ; alors

$$\xi(x) \in C^\infty(I), \quad \operatorname{sgn} \xi(x) = \operatorname{sgn} x.$$

On a

$$g_0(x) = \alpha_1(x) e_1 + \alpha_2(x) e_2,$$
$$f_0(x) = \alpha_1(x) \frac{D(x)}{\xi'(x)} e_2 + \alpha_2(x) \frac{e_1}{\xi'(x)}, \tag{15}$$
$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T.$$

Les fonctions inconnues $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$ se tirent du système d'équations en deuxième approximation :

$$\begin{bmatrix} B_0 & -\xi'\xi I_n \\ -\xi' I_n & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0' & -B_1 f_0 \\ g_0' & -B_1 g_0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Le système homogène correspondant admet des solutions non triviales, de sorte qu'une condition nécessaire de résolubilité est l'orthogonalité du second membre du système (16) et des solutions du système homogène adjoint. Les $2n$-vecteurs

$$(e_1^T, e_2^T/\xi'), \quad (e_2^T, (D/\xi') e_1^T),$$

où e_1 et e_2 figurent dans (15), forment une base dans l'espace des solutions du dernier système. Les conditions de résolubilité nous conduisent à un système d'équations pour les coefficients α_1 et α_2 :

$$\begin{gathered}(\alpha_1\xi'\xi)' + \alpha_1'\xi'\xi = A\xi'\xi\alpha_1 + \frac{B}{\xi'}\alpha_2, \\ \left(\frac{\alpha_2}{\xi'}\right)' + \frac{\alpha_2'}{\xi'} = \frac{B}{\xi'}\alpha_1 + \frac{A}{\xi'}\alpha_2, \\ A = b_{11} + b_{22}, \quad B = Db_{12} + b_{21}.\end{gathered} \tag{17}$$

Ce système est de la même forme que celui du § 1, chap. IV, de sorte que

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\xi'(x)\xi(x)}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^x A(t)\,dt\right\} \operatorname{sh}\left\{\frac{1}{2}\int_0^x \frac{B(t)\,dt}{\sqrt{D(t)}}\right\}, \\ \alpha_2(x) &= \sqrt{\xi'(x)} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^x A(t)\,dt\right\} \operatorname{ch}\left\{\frac{1}{2}\int_0^x \frac{B(t)\,dt}{\sqrt{D(t)}}\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Les formules (10), (11), (13) à (15), (17) et (18) définissent complètement le terme principal de la représentation asymptotique. Les fonctions vectorielles f_k, g_k, $k \geqslant 1$, se déduisent d'un système linéaire d'équations dont la matrice est la même que celle de (16), et le second membre est une fonction vectorielle qui s'exprime au moyen des fonctions vectorielles $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}, g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}$. Les conditions d'existence des représentations asymptotiques des solutions se formulent comme au n° 2.3.

2.5. *Confluence de points de retour simples.* Bornons-nous au cas de la confluence de deux points de retour simples. Supposons que la forme normale de Jordan de la matrice $A_0(x_0)$ contient deux blocs de Jordan d'ordre deux :

$$A_0(x_0) = \left[\begin{array}{cc:cc:ccc} p_0 & 1 & & & & & \\ 0 & p_0 & & & & 0 & \\ \hdashline & & q_0 & 1 & & & \\ & & 0 & q_0 & & & \\ \hdashline & & & & p_5^0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & p_n^0 \end{array}\right],$$

où $p_0 \neq q_0$, $p_0 \neq p_j^0$, $q^0 \neq p_j^0$ pour $j = 5, \ldots, n$ et $l_x(x_0, p_0; 0) \neq$ $\neq 0$, $l_x(x_0, q_0; 0) \neq 0$. Il existe dans ce cas une matrice $T_0(x)$ ramenant la matrice $A_0(x)$ à la forme diagonale par blocs

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = \operatorname{diag}(B_1(x),\ B_2(x),\ \Lambda(x)),$$

$$B_j(x) = \begin{bmatrix} a_j(x) & 1 \\ D_j(x) & a_j(x) \end{bmatrix}, \quad j = 1,\ 2,\ \Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_5(x), \ldots, p_n(x)).$$

Les propriétés de toutes ces fonctions sont les mêmes qu'au n° 2.4,

$$p_{1,2}(x) = a_1(x) \pm \sqrt{D_1(x)}, \quad p_{3,4}(x) = a_2(x) \pm \sqrt{D_2(x)}.$$

Dans ce cas le système (1) admet des solutions asymptotiques formelles de la forme (13) associées aux fonctions

$$\xi_j(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{D_j(t)}\, dt \right)^{2/3}, \quad j = 1,\ 2,$$

les formules asymptotiques des solutions sont de la même forme qu'au n° 2.4.

Indiquons les formules asymptotiques des solutions de l'équation (9) dans le cas d'une confluence de deux points de retour simples pour $x = 0$. Supposons que les coefficients de l'équation (9) ne dépendent pas de ε, $p_1^0 = p_2^0 \neq 0$, les autres racines $p_3^0, \ldots, p_n^0$ sont distinctes et non nulles en $x = 0$. Ici $p_0 = p_1^0$, $q_0 = -p_1^0$. Notons

$$a(x) = \frac{1}{2}[p_1(x) + p_2(x)],$$

$$f_j(x) = [p_j(x)]^{-1/4} \left\{ \prod_{k=3}^{n} \sqrt{p_j^2(x) - p_k^2(x)} \right\}^{-1}.$$

L'équation (9) admet une solution asymptotique formelle de la forme (6), où

$$A_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\xi(x)}{a(x)\, D(x)}}\, [f_1(x) + f_2(x)],$$

$$B_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{a(x)\, \xi(x)\, D(x)}}\, [f_1(x) - f_2(x)].$$

3. Réduction asymptotique des systèmes.

3.1. *Réduction exacte d'un système.* Supposons que la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ satisfait la condition A du n° 1, $0 \in D$. Alors

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(x)$$

et les fonctions matricielles $A_k(x)$ sont holomorphes dans le domaine D. Soit U un voisinage assez petit du point $x = 0$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, où

ε_1 est assez petit. Pour tout $m \geqslant 0$ entier, il existe une fonction matricielle $T(x, \varepsilon)$ holomorphe par rapport à x et ε pour $x \in U$, $|\varepsilon| \leqslant \leqslant \varepsilon_1$,

$$T(x, 0) = I, \quad x \in U; \quad T(0, \varepsilon) = I, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1,$$

et telle que la transformation

$$y = T(x, \varepsilon) z \tag{19}$$

ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = \left[\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k A_k(x) + \varepsilon^{m+1} B(x)\right] z.$$

Ici $x \in U$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ et la fonction matricielle $B(x)$ est holomorphe dans le domaine U. En particulier, la substitution (19) réduit le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = [A_0(x) + \varepsilon B(x)] z.$$

3.2. *Diagonalisation asymptotique par blocs de systèmes.* Soient $A_0(x)$ une matrice carrée d'ordre n et de classe $C^\infty(I)$, $I = [-a, a]$, $a > 0$, dont les valeurs propres peuvent être classées en deux groupes : $M_1 = \{p_1(x), \ldots, p_k(x)\}$, $M_2 = \{p_{k+1}(x), \ldots, p_n(x)\}$ tels que

$$p_j(x) \neq p_l(x), \quad p_j(x) \in M_1, \quad p_l(x) \in M_2, \tag{20}$$

pour tous les $x \in I$. Il existe alors un nombre b, $0 < b \leqslant a$ et une fonction matricielle régulière $T_0(x)$, $x \in \tilde{I} = [-b, b]$, de classe $C^\infty(\tilde{I})$ tels que

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{bmatrix}, \quad x \in \tilde{I}, \tag{21}$$

où $B_1(x)$ et $B_2(x)$ sont des fonctions matricielles carrées d'ordre k et $n - k$ et de classe $C^\infty(\tilde{I})$ dont les valeurs propres forment respectivement les groupes M_1 et M_2.

On a un résultat identique pour le système (1) si $A(x, \varepsilon)$ satisfait la condition C, la matrice $A_0(x) = A(x, 0)$ vérifie les conditions formulées plus haut. Pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe alors une fonction matricielle $T_N(x, \varepsilon)$ de classe $C^\infty(\tilde{I} \times J)$ telle que la transformation (19) ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) \end{bmatrix} z + \varepsilon^{N+1} C(x, \varepsilon) z, \tag{22}$$

où B_1, B_2 et C sont des matrices carrées d'ordre k, $n-k$ et n respectivement et de classe $C^\infty(\tilde{I}\times J)$,

$$B_j(x, \varepsilon)=B_j(x)+\sum_{l=1}^{N}\varepsilon^l B_{jl}(x), \quad j=1, 2,$$
$$T(x, \varepsilon)=T_0(x)+\sum_{l=1}^{N}\varepsilon^l T_l(x), \quad B_{jl}(x),\ T_l(x)\in C^\infty(\tilde{I}). \tag{23}$$

Supposons qu'une fonction matricielle $A_0(x)$ est holomorphe dans l'adhérence $[D]$ d'un domaine simplement connexe borné D du plan de x complexe et que la condition (20) est satisfaite partout dans $[D]$. Il existe alors une fonction matricielle $T_0(x)$ holomorphe et régulière pour $x\in[D]$ qui ramène la matrice $A_0(x)$ à la forme (21). Si $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x et ε pour $x\in[D]$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, toutes les propositions formulées ci-dessus à propos du système (1) restent en vigueur pour $x\in[D]$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ si $\varepsilon_1>0$ est assez petit, les conditions d'infinie différentiabilité de toutes les matrices étant remplacées par les conditions d'holomorphie.

On peut imposer d'autres conditions au système (1), par exemple les suivantes. Supposons que la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x et ε dans le domaine

$$D_0:\ |x|\leqslant x_0, \quad 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0, \quad |\operatorname{Arg}\varepsilon|\leqslant\theta_0,$$

et qu'elle admet le développement asymptotique

$$A(x, \varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r(x)\varepsilon^r, \quad \varepsilon\to 0, \quad |\operatorname{Arg}\varepsilon|\leqslant\theta_0,$$

uniformément en $|x|\leqslant x_0$. La diagonalisation par blocs du système (1) est alors possible dans le domaine

$$D_1:\ |x|\leqslant x_1, \quad 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1, \quad |\operatorname{Arg}\varepsilon|\leqslant\theta_1,$$

si x_1, ε_1 et θ_1 sont assez petits. Les fonctions matricielles T, B, B_2, C jouissent des mêmes propriétés que la matrice $A(x, \varepsilon)$ mais dans un domaine plus petit: le domaine D_1.

Si le système (1) est auto-adjoint, c'est-à-dire si la matrice $A(x, \varepsilon)$ est antihermitienne:

$$A(x, \varepsilon)=-\overline{A^T(\bar{x}, \bar{\varepsilon})},$$

les matrices B_1 et B_2 seront aussi antihermitiennes moyennant un choix convenable de la transformation (19).

Dans tous les cas envisagés on peut ramener le système à la forme

$$\varepsilon z'=\begin{bmatrix}B_1(x, \varepsilon) & 0\\ 0 & B_2(x, \varepsilon)\end{bmatrix}z+C(x, \varepsilon)z,$$

où $B_j(x, \varepsilon)$ sont des séries asymptotiques de ε, $C(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^\infty)$, $\varepsilon \to 0$ (cf. remarques du chap. I, § 3, n° 3).

3.3. *Systèmes canoniques.* Soient 0 et I_n les matrices nulle et unité d'ordre n,

$$J_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_{2n} = \begin{bmatrix} J_{2p} & 0 \\ 0 & J_{2(n-p)} \end{bmatrix},$$

et supposons que le système (1) est canonique (§ 4) pour $x \in \mathbf{R}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. La fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est réelle et *hamiltonienne*, c'est-à-dire que

$$J_{2n} A(x, \varepsilon) + A^T(x, \varepsilon) J_{2n} \equiv 0.$$

Les valeurs propres de la matrice A forment des couples $(p, -p)$. On dit qu'une fonction $f(x)$ à valeurs complexes est *douce* (gentle) si $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $f^{(k)}(x) \in L_1(\mathbf{R})$ pour tous les $k \geqslant 0$.

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites:

1) Les éléments des fonctions matricielles $A'(x, \varepsilon)$, $A(x, \varepsilon) - A(x, 0)$ sont des fonctions douces.

2) Le développement asymptotique

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x) \varepsilon^r \tag{24}$$

est valable lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en $x \in \mathbf{R}$.

3) Le polynôme caractéristique $d(p^2, x)$ de la matrice $A_0(x)$ se représente pour tous les $x \in \mathbf{R}$ sous la forme

$$d(p^2, x) = d_1(p^2, x)\, d_2(p^2, x),$$

où d_1 et d_2 sont des polynômes non constants de degrés respectifs $2p$ et $2(n - p)$ ne possédant de racine commune pour aucun $x \in \mathbf{R}$.

On dit qu'une matrice M d'ordre $2n$ est *hamiltonienne par blocs* si

$$\tilde{J}_{2n} M + M^T \tilde{J}_{2n} = 0.$$

Dans ces conditions il existe une fonction matricielle réelle $T_0(x)$ qui ramène la matrice $A_0(x)$ à la forme diagonale par blocs

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = \operatorname{diag}(B_0^{11}(x), B_0^{22}(x)) \tag{25}$$

pour tous les $x \in \mathbf{R}$. Les fonctions matricielles $B_0^{jj}(x)$, $j = 1, 2$, sont des matrices hamiltoniennes d'ordres respectifs $2p$, $2(n - p)$; $d_j(p^2, x)$, leurs polynômes caractéristiques et pour tous les $x \in \mathbf{R}$

$$T_0^T(x) J_{2n} T_0(x) = \tilde{J}_{2n}. \tag{26}$$

Les éléments des dérivées des fonctions matricielles $T_0(x)$ et $B_0^{jj}(x)$, $j = 1, 2$, sont des fonctions douces.

Il existe une matrice $T(x, \varepsilon)$ telle que la transformation (19) ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = \left[\sum_{r=0}^{\infty} B_r(x)\varepsilon^r + C(x, \varepsilon)\right] z, \tag{27}$$

$$B_r(x) = \begin{bmatrix} B_r^{11}(x) & 0 \\ 0 & B_r^{22}(x) \end{bmatrix},$$

où $B_r^{jj}(x)$, $j = 1, 2$, sont des matrices hamiltoniennes d'ordres respectifs $2p$ et $2(n-p)$, qui coïncident avec les matrices de (25) pour $r = 0$. Lorsque $\varepsilon \to +0$, pour tout $N \geqslant 1$ on a $C(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ uniformément en $x \in \mathbf{R}$. La matrice T vérifie l'identité (26) pour tous les $x \in \mathbf{R}$, admet le développement asymptotique

$$T(x, \varepsilon) = T_0(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r T_r(x), \quad \varepsilon \to +0, \tag{28}$$

uniforme en $x \in \mathbf{R}$, $T(x, \varepsilon) - T_0(x)$ s'annule pour $x = \pm\infty$ et les éléments des fonctions matricielles $B_r^{jj}(x)$, $j = 1, 2$, $T_r(x)$ pour $r \geqslant 1$ et $T'(x, \varepsilon)$ sont des fonctions douces.

Les résultats des n[os] 3.2, 3.3 sont dus à W. Wasov et Y. Sibuya [115, 116, 128, 132].

3.4. *Formes normales d'Arnold de matrices et réduction de systèmes.* Considérons le système (1) où la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe pour $|x| \leqslant r \ll 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$, et notons $A_0(x) = A(x, 0)$. Supposons que $A_0(0)$ possède une forme normale de Jordan et une seule valeur propre. La dernière condition ne restreint pas la généralité (cf. n° 3.2). Soient $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_p$ les puissances des diviseurs élémentaires de la matrice $A_0(0)$, et supposons que ses blocs de Jordan sont rangés aussi dans l'ordre de décroissance de leurs dimensions. Partageons la matrice $A_0(0)$ en blocs A^{jk} respectivement. Introduisons les matrices $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$, $d = \sum_{k=1}^{p} (2k-1) m_k$, d'ordre n. La matrice Γ_s est composée de zéros et d'un seul élément égal à l'unité. Si Γ_s^{jk} est un bloc non nul, l'élément unité est situé dans la dernière ligne du bloc pour $j \leqslant k$ et dans la première colonne pour $j = k$. Supposons que les matrices Γ_s sont ordonnées de telle sorte que l'élément unité de chacune d'elles soit situé sur la dernière ligne du bloc Γ_1^{11}, etc. Formulons le résultat de V. Arnold [42] pour les fonctions matricielles d'une seule variable. Il existe des fonctions scalaires $\rho_1(x), \ldots, \rho_d(x)$ et une fonction matricielle $T_0(x)$, holomorphes au point $x = 0$, telles que

$$T_0^{-1}(x) A_0(x) T_0(x) = A_0(0) + \sum_{s=1}^{d} \rho_s(x) \Gamma_s \tag{29}$$

dans un certain voisinage du point $x = 0$. De plus,

$$\rho_1(0) = \ldots = \rho_d(0) = 0, \quad \det T_0(0) \neq 0.$$

Sans restreindre la généralité on peut admettre que toutes les valeurs propres de la matrice $A_0(0)$ sont nulles et que $A_0(x)$ est de la forme canonique (29). Il existe alors des fonctions matricielles $T_r(x)$ et des fonctions scalaires $\rho_{sr}(x)$, $r = 0, 1, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots, d$, $T_0(0) = I$, telles que la transformation (19) ramène le système (1) à la forme [134]

$$\varepsilon z' = \Big[A_0(0) + \sum_{s=1}^{d} \rho_s(x, \varepsilon)\Gamma_s\Big] z, \quad \rho_s(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{sr}(x)\varepsilon^r. \tag{30}$$

Ici $T(x, \varepsilon)$ est de la forme (28) et T, $\rho_1, \ldots, \rho_d$ sont des séries entières formelles. Il s'ensuit qu'il existe une matrice T et des fonctions ρ_s de classe C^∞ pour $|x| \leqslant r$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, qui sont holomorphes par rapport à x pour chaque ε fixe et pour lesquelles les séries formelles sont asymptotiques lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en x. La transformation (19) ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = \Big[A_0(0) + \sum_{s=1}^{d} \rho_s(x, \varepsilon)\Gamma_s + B(x, \varepsilon)\Big],$$

$$B(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \to +0,$$

pour tout $N \geqslant 1$ entier uniformément en x.

On ne sait rien de la représentation asymptotique des solutions du système indiqué dans le cas général.

3.5. *Systèmes à singularités mobiles.* Considérons l'équation matricielle

$$\varepsilon^h \varphi(x, \varepsilon) Y' = A(x, \varepsilon) Y, \tag{31}$$

où φ est une fonction scalaire, h une constante, Y et A des matrices carrées d'ordre n. Le système (31) présente des singularités aux points où $\varphi(x, \varepsilon) = 0$. Un exemple type nous est fourni par le système

$$\varepsilon^h (x + \varepsilon) Y' = A(x) Y. \tag{32}$$

La représentation asymptotique des solutions de ce système pour $h = 0$ est étudiée dans [21] dans le cas de fonctions matricielles $A(x)$ non analytiques.

Introduisons les notations: U et V sont les disques $|x| \leqslant x_0$ et $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ des plans de x et ε complexes; $S(x_0, \alpha, \beta)$ et $S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$ les intersections de $U \setminus \{0\}$ et $V \setminus \{0\}$ respectivement avec les secteurs $\alpha < \operatorname{Arg} x < \beta$ et $\alpha < \operatorname{Arg} \varepsilon < \beta$; $U_0 \subset U$ et $V_0 \subset V$ des domaines ouverts tels que $0 \in [U_0]$ et $0 \in [V_0]$. On admet que les nombres $x_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et les domaines U_0, V_0 sont assez petits. Supposons satisfaites les conditions:

1) La fonction $\varphi(x, \varepsilon)$ est holomorphe pour $(x, \varepsilon) \in U \times V$, $\varphi(x, 0) \not\equiv 0$, $\varphi(x, 0) \neq 0$ pour $(x, \varepsilon) \in U_0 \times V_0$.

2) La fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe pour $(x, \varepsilon) \in$ $\in U \times S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$ et se développe en une série asymptotique de la forme (24) lorsque $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in S(\varepsilon_0, \alpha, \beta)$.

3) Les valeurs propres $p_1, \ldots, p_n$ de la matrice $A(0, 0)$ se scindent en deux groupes : $M_1 = \{p_1, \ldots, p_k\}$ et $M_2 = \{p_{k+1}, \ldots$ $\ldots, p_n\}$ tels que $p_j \neq p_l$ pour $p_j \in M_1$ et $p_l \in M_2$.

4) Il existe un point $a \in [U_0]$ et une famille de courbes régulières simples

$$\gamma_x : t = t(s, x), \quad t(0, x) = 0, \quad t(1, x) = a,$$

continues par rapport à $x \in [U_0]$ et contenues dans $[U_0]$, telles que $t'_s(s_x, x) = x$ en un certain point de γ_x.

Grâce à la condition 3) on peut admettre que la matrice $A(x, 0)$ est réduite à la forme diagonale par blocs (21). Notons

$$p_{jl} = p_j - p_l, \quad p_j \in M_1, \quad p_l \in M_2,$$
$$\psi = \operatorname{Arg}(p_{jl} t'_s) - \operatorname{Arg}(\varepsilon^h \varphi(t, \varepsilon)).$$

Indiquons deux procédés de réduction du système (31).

I. $h \geqslant 1$ est un entier. Supposons qu'il existe un δ, $0 < \delta < \pi/2$, tel que ψ soit situé sur l'un des segments

$$I_m^+ = [-\pi/2 + \delta + 2\pi m, \ \pi/2 - \delta + 2\pi m],$$
$$I_m^- = [\pi/2 + \delta + 2\pi m, \ 3\pi/2 - \delta + 2\pi m],$$

où $m = 0, \pm 1, \ldots$, lorsque $t \in \gamma_x$, $\varepsilon \in V_0$.

Il existe alors une transformation de la forme (19) qui ramène le système (31) à la forme diagonale par blocs

$$\varepsilon z' = B(x, \varepsilon) z, \quad B = \begin{bmatrix} B_1(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & B_2(x, \varepsilon) \end{bmatrix}, \tag{33}$$

où $B(x, 0) = A(x, 0)$. Les fonctions matricielles $T(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ sont douées des propriétés suivantes :

1) $T(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ sont holomorphes pour $(x, \varepsilon) \in U_0 \times V_0$ et continues pour $(x, \varepsilon) \in [U_0 \times V_0]$.

2) $T(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ se développent en séries asymptotiques de la forme (28) lorsque $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \in V_0$, uniformément en $x \in [U_0]$.

3) Pour $x \in [U_0]$ et $\det T_0(x) \neq 0$, les fonctions matricielles $B_r(x)$ et $T_r(x)$, $r = 0, 1, \ldots$, sont holomorphes par rapport à $x \in S(x_0, \alpha, \beta)$ et se développent dans ce secteur en séries asymptotiques entières de x lorsque $x \to 0$.

II. Soient $h = \varphi(0, 0) = \varphi'_x(0, 0) = 0$ et m la multiplicité du zéro ($x = 0$) de la fonction $\varphi(x, 0)$, $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi/(m - 1)$. Sup-

posons qu'il existe un s_0, $0 < s_0 < 1$, tel que les valeurs de la fonction ψ soient situées sur l'un des segments I_m^+ et I_m^- lorsque $t = t(s, x)$, $0 < s \leqslant s_0$.

Il existe alors une transformation (19) ramenant le système (31) à la forme (33) et les fonctions matricielles $T(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ possèdent les propriétés énumérées ci-dessus.

Un exemple élémentaire nous est fourni par le système

$$(x^2 - \varepsilon) Y' = AY, \quad A \neq 0.$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ ce système admet deux points singuliers réguliers $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$ qui fusionnent en le point singulier irrégulier $x = 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Remarque. Les conditions imposées à la fonction φ expriment que pour tout point $x \in [U_0]$ il existe une matrice de chemins canoniques d'origine $x = 0$ ou $x = a$.

Les résultats mentionnés au n° 3.5 ont été établis dans [72].

4. Méthode de l'opérateur canonique de Maslov. Les résultats cités dans ce numéro sont dus à V. Maslov et sont des applications particulières de la méthode de l'opérateur canonique développée par lui [22, 23]. Considérons l'équation

$$\hat{L}y \equiv L\left(\overset{2}{x}, \frac{1}{i\lambda}\overset{1}{D};\ \frac{1}{i\lambda}\right) y = 0, \tag{34}$$

où $\lambda > 0$ est un grand paramètre,

$$L(x, p; \varepsilon) = p^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}(x, \varepsilon)\, p^k, \quad \varepsilon = \frac{1}{i\lambda}.$$

La fonction L s'appelle *λ-symbole* de l'opérateur $\hat{L}$, la fonction $L^0(x, p) = L(x, p; 0)$, *λ-symbole principal.*

Les coefficients de l'équation (31) satisfont la condition A du n° 1. On adopte ici les notations de R. Feynman: les chiffres 1 et 2 indiquent l'ordre d'action des opérateurs de multiplication par les fonctions de x et de dérivation. Par exemple, si $L = xp$, on a

$$L\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{\frac{d}{dx}}\right) y = x\frac{d}{dx}y, \quad L\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{\frac{d}{dx}}\right) y = \frac{d}{dx}(xy).$$

4.1. *Passage à la p-représentation.* Introduisons la λ-transformation de Fourier

$$\{F_{\lambda,\, x\to p} f(x)\}(p) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i\lambda p x\}\, dx,$$

$$\{F_{\lambda,\, p\to x}^{-1} g(p)\}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{-2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) \exp\{i\lambda x p\}\, dp,$$

où $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4}$. Alors

$$F_{\lambda,\, x\to p} \hat{L}\left(\overset{2}{x}, \frac{1}{i\lambda}\overset{1}{\frac{d}{dx}};\ \varepsilon\right) F_{\lambda,\, p\to x}^{-1} = \hat{\tilde{L}} = L\left(-\frac{1}{i\lambda}\overset{1}{\frac{d}{dp}},\ \overset{2}{p};\ \varepsilon\right).$$

Si les coefficients de l'opérateur $\hat{L}$ sont des polynômes de x, l'opérateur $\hat{\tilde{L}}$ est différentiel. En général, $\hat{\tilde{L}}$ est pseudo-différentiel.

On cherchera une solution asymptotique formelle de l'équation (31) sous forme de la transformée de Fourier d'une exponentielle multipliée par une série asymptotique de ε:

$$y = F_{\lambda,\, p\to x}^{-1} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = \exp\{i\lambda S(p)\}\, \varphi(p,\ \varepsilon),$$

de sorte que $\hat{\tilde{L}}\tilde{y} = 0$. Si S est une fonction réelle et $\varphi(p)$ une fonction à support borné, on a le développement asymptotique [23]

$$\hat{\tilde{L}}\,[\exp\{i\lambda S(p)\}\, \varphi(p)] = \exp\{i\lambda S(p)\}\Big\{L\varphi + \\ + \frac{1}{i\lambda}\Big[-L_x\varphi' + \Big(\frac{1}{2}L_{xx}S'' - L_{xp}\Big)\varphi + L_\varepsilon\varphi\Big] + \ldots\Big\},$$

où les valeurs du symbole L et de ses dérivées sont calculées au point $(-S'(p),\ p;\ 0)$. Pour la fonction S on obtient l'équation

$$L^0(-S'(p),\ p) = 0.$$

4.2. *Structure des racines.* Supposons que le symbole principal L^0 de l'opérateur $\hat{L}$ est réel et que l'équation

$$L^0(x,\ p) = 0 \tag{35}$$

définit une courbe différentiable Γ sur le plan $(x,\ p)$, de sorte que grad $L^0 \neq 0$ sur Γ. Si le point $r_0 = (x_0,\ p_0) \in \Gamma$, x_0 est un point de retour si et seulement si la tangente à Γ en r_0 est parallèle à l'axe des p. Comme $L_x^0(x_0,\ p_0) \neq 0$, il existe un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tel que

$$\frac{\partial L^0}{\partial p} = \ldots = \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{k-1} L^0 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{k} L^0 \neq 0 \tag{36}$$

au point r_0. Si $k = 2$, le point de retour x_0 est simple.

Dans un petit voisinage du point r_0 la courbe Γ est définie par l'équation $x = x(p)$, où $x(p)$ est une fonction de classe C^∞ pour les petits $|p - p_0|$ et

$$x(p) - x_0 \sim a(p + p_0)^k, \quad p \to p_0, \quad a \neq 0.$$

Remarquons que $k + 1$ racines $p_j(x)$ de l'équation caractéristique (35) sont confondues au point de retour x_0.

Remarque. Dans un petit voisinage du point r_0, le changement de variables $\tilde{p} = p_0 + \psi(x, p)$, $\tilde{x} = x - x_0$ permet de ramener le symbole principal à la forme

$$L^0(x, p) = (\tilde{p}^k \pm \tilde{x}) L_1(\tilde{x}, \tilde{p}), \quad L_1(0, 0) \neq 0.$$

La fonction $\psi(x, p)$ est de classe C^∞ pour les petits $|x - x_0|$, $|p - p_0|$, réelle pour les x et p réels et holomorphe par rapport à p pour x fixe.

4.3. *Représentation asymptotique des solutions.* Supposons que $x_0 = 0$ et $L = L(x, p)$. La fonction $\eta(p)$ est de classe $C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\eta(p) \equiv 1$ au voisinage du point $p_0 = 0$ et le support de la fonction $\eta(p)$ est assez petit. Posons $S(p) = -\int_0^p x(p')\, dp'$. L'équation (34) admet une solution asymptotique formelle y de la forme

$$y(x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{-2\pi i}} \int_0^\infty \exp\left\{ i\lambda \left[px - \int_0^p x(p')\, dp' \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^p \frac{L^0_{px}(x(p'), p')}{L^0_x(x(p'), p')} dp' \right\} [L_x(x(p'), p')]^{-1/2} \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{i\lambda} \right)^k \varphi_k(p) \right] \eta(p)\, dp. \qquad (37)$$

Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ peuvent être déterminées à partir d'une suite d'équations récurrentielles de la forme

$$-L_x \varphi_k' + \left(-\frac{1}{2} L_{xx} S'' + L_{xp} \right) \varphi_k = f(\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}).$$

La formule (37) est l'analogue de la formule (7) du § 1 en termes de p-représentation. L'existence d'une solution admettant un développement asymptotique de la forme (37) est prouvée rigoureusement pour $k = n$ (cf. n° 6).

Le comportement de la solution y dépend essentiellement de la parité du nombre k. Supposons que $L_x < 0$, $(\partial/\partial p)^k L > 0$ au point

$(0, p_0)$ pour fixer les idées, et que $\delta > 0$ est assez petit. Si k est impair, l'intégrale de (37) possède pour les petits $|x|$ un seul point de phase stationnaire réel qui se détermine à partir de l'équation $x = x(p)$ de la courbe Γ, et pour $|x| \geqslant \delta$, $\lambda \to +\infty$,

$$y(x, \lambda) = A(x) \exp\left\{i\lambda \int_0^x p(t)\,dt + c\right\} [1 + O(\lambda^{-1})],$$

où c est une constante, de sorte que la solution oscille de part et d'autre du point de retour. Au point de retour même, on a

$$y(0, \lambda) \sim a\lambda^{1/2-1/(k+1)}, \quad a \neq 0,$$

de sorte que $y(0, \lambda) \to \infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$. L'équation (34) admet aussi la solution $\overline{y(x, \lambda)}$.

Si k est pair, il existe deux points stationnaires réels $p = p_1(x)$ et $p = p_2(x)$ pour $x \geqslant \delta$ et

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{2} A_j(x) \exp\left\{i\lambda \int_0^{p_j(x)} p(t)\,dt\right\} + O(\lambda^{-1}).$$

Pour $x < 0$ il n'existe pas de points stationnaires réels, de sorte que $y(x, \lambda) = O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda \to +\infty$, $x \leqslant -\delta$. La solution $y(x, \lambda)$ peut être choisie réelle. La représentation asymptotique de $y(0, \lambda)$ est de la même forme que pour k impair. Un exemple modèle nous est fourni par l'équation

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dx}\right)^k y - xy = 0$$

(cf. remarque du n° 4.2 ainsi que du n° 6.2).

5. Points de retour des systèmes auto-adjoints. La méthode développée dans ce numéro est due à V. Koutchérenko [88].

5.1. *Système d'équations du premier ordre.* Considérons le système (1) sur l'intervalle $I = [a, b]$. La fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ satisfait la condition C du n° 1 pour $x \in I$, $\varepsilon \in J = [0, \varepsilon_0]$. On admettra que la matrice $A_0(x)$ est *antihermitienne* pour tous les $x \in I$, c'est-à-dire que $A_0^*(x) = -A_0(x)$, où $A_0^*(x) = A^T(x)$, et que le système (1) possède un seul point de retour sur l'intervalle I, $a < x_0 < b$. Supposons qu'en ce point sont confondues exactement deux valeurs propres de la matrice $A_0(x)$:

$$p_1(x_0) = p_2(x_0) = p_0, \quad p_j(x_0) \neq p_k(x_0), \qquad (38)$$
$$p_j(x_0) \neq p_0, \quad 3 \leqslant j, \quad k \leqslant n, \quad j \neq k.$$

Les valeurs propres de la matrice $A_0(x)$ sont imaginaires pures; notons $p_j(x) = iq_j(x)$. Les fonctions $q_j(x)$ sont réelles et $q_j(x) \in \in C^\infty(I)$ pour tous les j. Il existe une base $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ composée de vecteurs propres orthonormés de la matrice $A_0(x)$ qui sont de classe $C^\infty(I)$. La matrice $T_0(x) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))$ est unitaire et ramène la matrice $A_0(x)$ à la forme diagonale. La transformation $y = T_0(x)z$ ramène le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = (\Lambda(x) + \varepsilon B(x, \varepsilon))z, \tag{39}$$

$$B(x) = \varepsilon^{-1}T_0^{-1}(x)[A_0(x, \varepsilon) - A_0(x)]T_0(x) - T_0^{-1}(x)T_0'(x).$$

Considérons le cas élémentaire

$$p_1'(x_0) \neq p_2'(x_0). \tag{40}$$

Cette condition est stable pour les petites perturbations des coefficients du système (1) préservant l'antihermiticité de la matrice $A_0(x)$. Supposons que $x_0 = 0$ et $I = [-a, a]$, $a > 0$.

Remarque. Si $n = 2$, la courbe Γ: $\det(pI - A_0(x)) = 0$ se scinde en deux courbes différentiables $p = p_1(x)$, $p = p_2(x)$, qui se coupent ou sont tangentes au point x_0. C'est pourquoi Γ n'est pas une courbe différentiable et les résultats du n° 4 ne s'appliquent pas à de tels points de retour.

5.2. *Système de deux équations.* Supposons que le système (1) est réduit à la forme (39), de sorte qu'il est de la forme

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda p_1(x)y_1 + b_{11}(x, \varepsilon)y_1 + b_{12}(x, \varepsilon)y_2, \\ y_2' &= \lambda p_2(x)y_2 + b_{21}(x, \varepsilon)y_1 + b_{22}(x, \varepsilon)y_2. \end{aligned} \tag{41}$$

Comme $p_1(0) = p_2(0)$, le système n'admet pas de diagonalisation asymptotique (§ 1, n° 1.3). Faisons le changement

$$y_j = \exp\left\{\lambda \int_0^x p_j(t)\,dt + \int_0^x b_{jj}(t, \varepsilon)\,dt\right\} z_j, \quad j = 1, 2,$$

et remplaçons le système obtenu par le système d'équations intégrales

$$z = c + Kz, \quad (Kz)(x) = \int_0^x K(x, t, \lambda)z(t)\,dt, \tag{42}$$

$$K(x, t, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & b_{21}(t, \varepsilon)\exp\{H\} \\ b_{21}(t, \varepsilon)\exp\{-H\} & 0 \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$S(t, x) = i\lambda \int_t^x [q_1(\tau) - q_2(\tau)]\,d\tau, \quad S_1(t, x) = \int_t^x [b_{22}(\tau) - b_{11}(\tau)]\,d\tau,$$

où $H = i\lambda S(t, x) + S_1(t, x)$, $z = (z_1, z_2)^T$, $c = (c_1, c_2)^T$ et c_j sont des constantes.

La norme $\| K(x, t, \lambda) \|$ du noyau de l'opérateur K est d'ordre $O(1)$ pour tout $\lambda > 0$, puisque les fonctions $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont réelles. On peut déduire de l'équation (42) une équation à petit noyau en la mettant sous la forme

$$z = c + Kc + K^2 z. \tag{44}$$

Ici K^2 est un opérateur intégral:

$$(K^2 z)(x) = \int_t^x K_1(x, t, \lambda) z(t)\, dt,$$

où K_1 est une matrice diagonale d'éléments diagonaux

$$\varphi_1 = b_{21}(t, \varepsilon) \int_t^x b_{12}(\tau, \varepsilon) \exp\{i\lambda [S(\tau, t) + S(\tau, x)] + S_1(\tau, t)\}\, d\tau,$$

$$\varphi_2 = b_{12}(t, \varepsilon) \int_t^x b_{21}(\tau, \varepsilon) \exp\{-i\lambda [S(\tau, t) + S(\tau, x)] - S_1(\tau, t)\}\, d\tau. \tag{45}$$

Comme $p_1(x) \neq p_2(x)$ pour $x \in I$, $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi_j = 0$ en raison de l'oscillation rapide de l'exponentielle. Si la condition (40) est satisfaite, la méthode de phase stationnaire permet d'obtenir la majoration

$$|\varphi_j(t, x, \lambda)| \leqslant c\lambda^{-1/2}, \quad \lambda \gg 1,$$

où la constante c est indépendante de t, $x \in I$.

Indiquons les formules asymptotiques des solutions. Posons $c = (1, 0)^T$; alors $z = c + Kc + K^2 c + O(\lambda^{-1})$. Une analyse plus approfondie montre que $K^2 c = O(\lambda^{-1/2})$, de sorte que

$$z^{(1)} = \Big(0, \int_0^x \exp\{-i\lambda S(t, x) - S_1(t, x)\} b_{21}(t, \varepsilon)\, dt\Big)^T + O(\lambda^{-1/2}),$$

$$z^{(2)} = \Big(\int_0^x \exp\{i\lambda S(t, x) + S_1(t, x)\} b_{12}(t, \varepsilon)\, dt, 0\Big)^T + O(\lambda^{-1/2}), \tag{46}$$

où $|O(\lambda^{-1/2})| \leqslant c\lambda^{-1/2}$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, $x \in I$. Les intégrales de (46) ne peuvent pratiquement plus être simplifiées; au mieux on peut les exprimer au moyen de l'intégrale de Fresnel

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{it^2}\,dt$$

(cf. [8]). Mais si l'on s'éloigne du point de retour, on peut déterminer la représentation asymptotique des intégrales à l'aide de la méthode de la phase stationnaire. Supposons que $\alpha > 0$ est fixe; on peut choisir α aussi petit que l'on veut mais indépendant de λ. Le système (41) admet alors un système fondamental de solutions tel que pour $\lambda \to +\infty$, $x \in I$, $|x| \geqslant \alpha$

$$\begin{gathered} y_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_0^x p_j(t)\,dt + \int_0^x b_{jj}(t, 0)\,dt\right\}[f_j + O(\lambda^{-1/3})], \quad j = 1, 2, \\ f_1 = \left(1, \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda\,|p_1'(0) - p_2'(0)|}}\, b_{21}(0, 0)\, e^{i\pi\delta/4}\,\mathrm{sgn}\, x\right)^T, \\ f_2 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda\,|p_1'(0) - p_2'(0)|}}\, b_{12}(0, 0)\, e^{-i\pi\delta/4}\,\mathrm{sgn}\, x, \ 1\right)^T, \\ \delta = \mathrm{sgn}\,[q_2'(0) - q_1'(0)]. \end{gathered} \tag{47}$$

On rappelle que les racines $p_j(x)$ sont imaginaires pures. La matrice $T_0(x)$ étant unitaire, la matrice $T_0^{-1}(x)\,T'(x)$ est antihermitienne. Si A est indépendant de ε, les éléments $b_{11}(x)$ et $b_{22}(x)$ sont imaginaires purs, $b_{21}(x) = -\overline{b_{12}(x)}$ et $(f_1)_2 = -\overline{(f_2)_1}$.

L'application de la méthode des approximations successives à l'équation (44) et de la méthode de la phase stationnaire nous permet d'obtenir la représentation asymptotique des solutions du système (1). Cette procédure est valable aussi dans le cas où la fonction $p_1(x) - p_2(x)$ admet un zéro d'ordre fini quelconque au point de retour x_0. Ce cas n'est toutefois pas stable pour les petites perturbations des coefficients du système.

5.3. *Système de n équations.* La transformation (19), où $T(x, \varepsilon)$ est de la forme (23), permet de ramener le système (1) pour $x \in I$ à la forme diagonale par blocs (22), où

$$B_1(x, \varepsilon) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k B_k(x),$$

$$B_2(x, \varepsilon) = \Lambda(x) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \Lambda_k(x)$$

et $\Lambda_k(x)$ sont des matrices diagonales. Le système (1) admet des solutions $y_3(x, \varepsilon), \ldots, y_n(x, \varepsilon)$ de la forme (8), § 2, et la représentation asymptotique des solutions $y_{1,2}(x, \varepsilon)$ se détermine à partir du système $\varepsilon y' = B_1(x, \varepsilon)$.

Supposons que x_0 est point de concours de quelques racines, c'est-à-dire que $p_1(x_0) = \ldots = p_k(x_0) = p_0$, $p_j'(x_0) \neq p_l'(x_0)$, $j \neq l$, $1 \leqslant j, l \leqslant k$, les autres racines étant distinctes entre elles et de p_0. La méthode développée ci-dessus est valable dans ce cas aussi, puisque le noyau de l'opérateur K^2 est de l'ordre $O(\lambda^{-1/2})$ pour $\lambda \gg 1$.

Remarque. Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice $A_0(x)$ sont imaginaires pures pour $x \in I$ et qu'il existe une base $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ de classe $C^\infty(I)$ formée de vecteurs propres de cette matrice. Le système (1) est alors justiciable des résultats ci-dessus.

5.4. *Système d'équations du second ordre.* Considérons le système de n équations

$$y'' + \lambda^2 A(x, \lambda^{-1})\, y = 0 \tag{48}$$

de matrice hermitienne $A_0(x) = A(x, 0)$. Supposons que la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$, $\varepsilon = \lambda^{-1}$, satisfait la condition C du n° 1 et que les valeurs propres $p_j(x)$ de la matrice $A_0(x)$ sont strictement positives:

$$p_j(x) > 0, \quad x \in I, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Supposons que l'intervalle I contient un seul point de retour x_0, $a < x_0 < b$, et que sont satisfaites les conditions (38), (40). On admettra également que $x_0 = 0$, $I = [-a, a]$. Le système (48) est équivalent au système de $2n$ équations

$$\varepsilon \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ A(x, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} = 0,$$

qui satisfait les conditions de la remarque du n° 4.2. Ici 0 et I sont les matrices nulle et unité d'ordre n.

Supposons que la matrice $T_0(x)$ ramène la matrice $A_0(x)$ à la forme diagonale $\Lambda(x)$. En posant

$$\begin{bmatrix} z \\ \varepsilon z' \end{bmatrix} = Tw, \quad T(x) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_0(x) \\ T_0(x)\sqrt{\Lambda(x)} & -T_0(x)\sqrt{\Lambda(x)} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

on obtient le système

$$\varepsilon w' + \Lambda_0(x)\, w + \varepsilon B(x, \varepsilon)\, w = 0, \tag{50}$$

$$\Lambda_0(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{\Lambda(x)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\Lambda(x)} \end{bmatrix}, \quad B(x, \varepsilon) = B_1(x) + B_2(x, \varepsilon),$$

$$B_1(x)=\frac{1}{4}\Lambda^{-1}(x)\Lambda'(x)\begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I\end{bmatrix}+\frac{1}{2}T_0^{-1}(x)T_0'(x)\begin{bmatrix} I & I \\ I & I\end{bmatrix}+$$
$$+\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}(x)T_0(x)T_0'(x)\Lambda^{1/2}(x)\begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I\end{bmatrix}, \quad (51)$$
$$B_2(x,\ \varepsilon)=\varepsilon^{-1}T^{-1}(x)\begin{bmatrix} 0 & I \\ A(x,\ \varepsilon)-A_0(x) & 0\end{bmatrix}T(x).$$

Les notations adoptées sont les suivantes : si C et C_j sont des matrices carrées d'ordre n, alors

$$C\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} CC_1 & CC_2 \\ CC_3 & CC_4\end{bmatrix},$$
$$\sqrt{\Lambda(x)}=\operatorname{diag}\left(\sqrt{p_1(x)},\ \ldots,\ \sqrt{p_n(x)}\right),$$

et les racines sont toutes arithmétiques. On remarquera que

$$\operatorname{diag}B_1(x)=\operatorname{diag}[T_0^{-1}(x)T'(x)].$$

D'après la condition (38) il suffit d'envisager un système (48) de deux équations. Notons

$$w_j(x,\ \lambda)=\frac{1}{\sqrt[4]{\mu_j(x)}}\exp\left\{i\lambda\int_0^x\mu_j(t)\,dt-\int_0^x\mu_j^{(1)}(t)\,dt\right\},$$
$$\mu_1(x)=-\mu_3(x)=\sqrt{p_1(x)},\quad \mu_2(x)=-\mu_4(x)=\sqrt{p_2(x)}, \quad (52)$$
$$\mu_j^{(1)}(x)=[B_1(x)+B_2(x,\ 0)]_{jj}.$$

Le système (49) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$w_j(x,\ \lambda)=\tilde{w}_j(x,\ \lambda)\,[f_j+K_jf_j+O(\lambda^{-1})], \quad (53)$$

où f_j est un vecteur de composantes δ_{jk}, K_j l'opérateur intégral :

$$(K_jw)_l(x)=\int_0^x\exp\left\{i\lambda\int_t^x[\mu_l(\tau)-\mu_j(\tau)]\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_t^x[\mu_l^{(1)}(\tau)-\mu_j^{(1)}(\tau)]\,d\tau\right\}[(\tilde{B}_1(t)+\tilde{B}_2(t,\ 0))\,w]_l\,dt,$$
$$\tilde{B}_1(t)=B_1(t)-\operatorname{diag}B_1(t),$$

la matrice $\tilde{B}_2(t,\ 0)$ se définit de façon analogue.

Ces formules se simplifient à l'extérieur d'un certain voisinage du point de retour. Supposons que $\delta>0$ est fixé ; on peut le choisir

aussi petit que l'on veut mais indépendant de ε. Limitons-nous pour simplifier au cas où la matrice $A(x, \varepsilon)$ est indépendante de ε et posons

$$\delta = \operatorname{sgn}[p_1'(0) - p_2'(0)], \tag{54}$$

$$a = -\sqrt[4]{p_1(0)}\sqrt{\frac{\pi}{|p_1'(0) - p_2'(0)|}}\, e^{i\pi\delta/4} e_2^*(0)\, e_1'(0) \operatorname{sgn} x.$$

Lorsque $\lambda \to +\infty$, $|x| \geqslant \delta$, le système (48) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}} \exp\left\{i\lambda \int_0^x \sqrt{p_1(t)}\, dt - \right.$$
$$\left. - \int_0^x e_1^*(t)\, e_1'(t)\, dt\right\} \left[e_1(x) + \frac{a}{\sqrt{\lambda}} e_2(x) + O(\lambda^{-1})\right],$$

$$y_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_2(x)}} \exp\left\{i\lambda \int_0^x \sqrt{p_2(t)}\, dt - \int_0^x e_1^*(t)\, e_1'(t)\, dt\right\} \times$$
$$\times \left[e_2(x) - \frac{\bar{a}}{\sqrt{\lambda}} e_1(x) + O(\lambda^{-1})\right], \tag{55}$$

$$y_3(x, \lambda) = \overline{y_1(x, \lambda)}, \quad y_4(x, \lambda) = \overline{y_2(x, \lambda)}. \tag{56}$$

Les majorations des résidus sont uniformes en $x \in I$, $|x| \geqslant \delta$ et la représentation asymptotique (55) est dérivable par rapport à x et à λ.

6. Points de retour de l'équation d'Airy généralisée perturbée. L'équation

$$y^{(n)} - xy = 0, \tag{57}$$

où $n \geqslant 3$, s'appelle *équation d'Airy généralisée* et ses solutions, *fonctions d'Airy généralisées* ou *distributions d'Airy*. Dans ce numéro on cite les résultats établis dans [130] sur la représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions du système (1) et de l'équation (2) dans un voisinage complexe complet du point de retour dans le cas où le symbole principal est proche du symbole $l^0 = p^n - x$ pour les petits $|x|$.

6.1. *Structure des racines.* Considérons le système (1) où la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x et ε pour $|x| \leqslant r$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et se développe en la série asymptotique

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(x)\, \varepsilon^r, \quad \varepsilon \to +0,$$

uniforme en x, $|x| \leqslant r$. Les nombres $r > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ sont supposés assez petits.

6.2. *Structure des racines.* Supposons que la matrice A_0 (0) admet une forme normale de Jordan:

$$A_0(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d}{dx} \det A_0(x)\,|_{x=0} = (-1)^{n+1}. \tag{58}$$

Le symbole principal du système (1) est alors de la forme

$$l^0(x, p) = (-1)^n \,[p^n + xa_{n-1}(x)\, p^{n-1} + \ldots + xa_1(x)\, p - x + O(x^2)],$$

où les fonctions $a_j(x)$ sont holomorphes pour $|x| \leqslant r$, de sorte que

$$l^0(x, p) = p^n - x + O(|x|^2 + |xp|)$$

pour les petits $|x|$, $|p|$. L'équation $l^0(x, p) = 0$ définit pour les petits $|x|$ et $|p|$ une variété analytique complexe à une dimension Γ dans l'espace complexe à deux dimensions $C_x \times C_p$.

Les valeurs propres $p_j(x)$ de la matrice $A_0(x)$ sont de la forme

$$p_j(x) = \omega^{j-1} x^{1/n} + x^{2/n} \tilde{p}_j(x^{1/n}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

où $\omega = e^{2\pi i/n}$ et les fonctions $\tilde{p}_j(t)$ sont holomorphes pour $|t| \leqslant$ $\leqslant r^{1/n}$.

Au n° 4 on a montré que les conditions imposées au point de retour $x = 0$ étaient génériques.

6.3. *Développement extérieur.* Le développement asymptotique des solutions du système (1) s'obtient à l'aide de la *méthode de raccordement des développements asymptotiques* dont le principe est le suivant. On construit deux types distincts de développements asymptotiques, l'un *extérieur*, l'autre *intérieur*. Le développement extérieur est valable dans la couronne K_1: $0 \leqslant \delta_1(\varepsilon) \leqslant |x| \leqslant r$ qui ne contient pas le point de retour, le développement intérieur, dans un voisinage du point de retour K_2: $|x| \leqslant \delta_2(\varepsilon)$. Pour $0 < \varepsilon \ll 1$ les domaines K_1 et K_2 se recouvrent, ce qui permet d'établir un lien entre les développements asymptotiques extérieur et intérieur (ou, selon l'usage, de raccorder ces développements). La méthode de raccordement est largement utilisée en théorie asymptotique des équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires et des équations aux dérivées partielles.

Le développement extérieur est de la même forme que le développement asymptotique du § 2. Soit $S(\theta_1, \theta_2)$ le secteur

$$|x| \leqslant r, \quad \theta_1 \leqslant \operatorname{Arg} x \leqslant \theta_2, \quad \theta_2 - \theta_1 < \pi n/(n+1).$$

Notons

$$\begin{aligned} &\Lambda(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)), \\ &\Omega(t) = \operatorname{diag}(1, t, \ldots, t^{n-1}), \quad \omega = e^{2\pi i/n}. \end{aligned} \tag{59}$$

Le système (1) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x, \varepsilon) = \Omega(x^{1/n})\,[\varepsilon^{-1/(n+1)}\, x^{1/n}]^{(1-n)/2}\,\tilde{Y}(x, \varepsilon) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \Lambda(t)\,dt\right\}, \tag{60}$$

et l'on a la majoration

$$\|\tilde{Y}(x, \varepsilon)\| \leqslant c, \quad |\varepsilon x^{-(n+1)/n}| \leqslant c_1, \quad x \in S(\theta_1, \theta_2), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{61}$$

Par ailleurs,

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon)\, e^{B(\varepsilon)}, \qquad \varepsilon \to +0,$$

où $B(\varepsilon)$ est une matrice diagonale et

$$B(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r \varepsilon^r, \quad U(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} U_r(x^{1/n})\,[\varepsilon x^{-(n+1)/n}]^r \tag{62}$$

lorsque $\varepsilon \to +0$, $\varepsilon x^{-(n+1)/n} \to 0$. Les matrices $U_r(t)$ sont holomorphes pour $|t| \leqslant r^{1/n}$,

$$U_0(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \ldots & \omega^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega^{n-1} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

6.4. *Développement intérieur.* Introduisons la variable endogène

$$s = x\varepsilon^{-n/(n+1)},$$

et soit Σ le secteur

$$|\operatorname{Arg} s| \leqslant n\pi/2(n+1) \quad \text{si } n \text{ est impair},$$
$$-\pi/2 \leqslant \operatorname{Arg} s \leqslant (n-1)\,\pi/2(n+1) \text{ si } n \text{ est pair},$$

$$Q(s) = \frac{n}{n+1}\,\Omega(\omega)\, s^{(n+1)/n}, \tag{63}$$

la matrice Ω étant définie par la formule (59).

Le système (1) admet une matrice fondamentale de la forme

$$\begin{gathered} Z(x, \varepsilon) = \Omega\,(\varepsilon^{1/(n+1)} s^{1/n})^{(1-n)/(2n)}\, \tilde{Z}(x, \varepsilon)\, e^{Q(s)}, \quad |s| \geqslant s_0 > 0, \\ Z(x, \varepsilon) = \tilde{Z}(x, \varepsilon)\, e^{Q(s)}, \quad |s| \leqslant s_0, \end{gathered} \tag{64}$$

et l'on a la majoration

$$\|Z(x, \varepsilon)\| \leqslant c, \quad |s| \geqslant s_0, \quad \|\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n}\| \leqslant c_1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ s \in \Sigma. \tag{65}$$

Par ailleurs,

$$\tilde{Z}(x, \varepsilon) = V(s, \varepsilon)\, s^{D(\varepsilon)},$$

où $D(\varepsilon)$ est une matrice diagonale, et l'on a les développements asymptotiques

$$\begin{gathered} D(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r \varepsilon^{r/(n+1)}, \\ V(s, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} V_r(s)\, [\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n}]^r \end{gathered} \tag{66}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, $|s| \geqslant s_0$, $s \in \Sigma$, $\varepsilon^{1/(n+1)} s^{(n+2)/n} \to 0$. Les matrices $V_r(s)$ admettent le développement asymptotique

$$V_r(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{r\nu} s^{-\nu/n}, \quad s \to \infty, \quad s \in \Sigma, \quad V_{00} = U_0(0).$$

6.5. *Raccordement des développements asymptotiques.* Choisissons le secteur S de telle sorte que ses rayons frontières soient situés à l'intérieur du secteur Σ. On peut poser

$$\begin{gathered} \theta_1 = -\frac{n\pi}{2(n+1)} + \delta = -\theta_2 \text{ pour } n \text{ impair}, \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{2} + \delta, \quad \theta_2 = \frac{(n-1)\pi}{2(n+1)} - \delta \text{ pour } n \text{ pair}, \end{gathered}$$

où $\delta > 0$ est assez petit, et admettre que $\theta_1 \leqslant \operatorname{Arg} x \leqslant \theta_2$.

Y et Z étant des matrices fondamentales du système (1), on a

$$Y(x, \varepsilon) = Z(x, \varepsilon)\, \Gamma(\varepsilon),$$

où la matrice $\Gamma(\varepsilon)$ est indépendante de x. Les domaines d'applicabilité des développements extérieur et intérieur se recouvrent, puisqu'ils sont tous deux valables pour

$$\varepsilon^{n/(n+1)} \ll |x| \ll \varepsilon^{n/(n+2)}.$$

Dans cette zone on peut les raccorder. Introduisons le domaine intérieur $S_i: |\varepsilon^{1/(n+1)} s^{\varkappa(s)(n+2)/n}| \leqslant \eta$, le domaine extérieur $S_e: |\varepsilon x^{-(n+1)/n}| \leqslant \xi_0$ et le domaine intermédiaire $S_m = S_i \cap S_e$, où

$$s_0 = \xi_0^{-n/(n+1)}, \quad \varepsilon_0 < \xi_0^{n+2} \eta_0^{n+1},$$
$$\varkappa(s) = 1, \quad |s| \geqslant s_0, \quad \varkappa(s) = 0, \quad |s| \leqslant s_0.$$

Si les nombres $\xi_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ sont assez petits, on a les formules de raccordement pour $j, k = 1, \ldots, n$:

$$y_{jk}(x, \varepsilon) = \begin{cases} z_{jk}(x, \varepsilon)[\gamma_{kk}(x, \varepsilon) + \mu_{jk}(x, \varepsilon)], & (x, \varepsilon) \in S_m, \\ z_{jk}(x, \varepsilon) + \mu_{jk}(x, \varepsilon), & (x, \varepsilon) \in (S_i \cap S_m), \end{cases}$$

où $\mu_{jk}(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ lorsque $\varepsilon \to +0$, $(x, \varepsilon) \in S_i$ et pour tout N. Les éléments $\gamma_{kk}(\varepsilon)$ admettent le développement asymptotique

$$\gamma_{kk}(\varepsilon) = \varepsilon^{nb_{kk}(\varepsilon)/(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{kk,r} \varepsilon^{r/(n+1)}, \quad \varepsilon \to +0, \tag{67}$$

où $b_{kk}(\varepsilon)$ sont les éléments diagonaux de la matrice $B(\varepsilon)$ de (62).

6.6. *Réduction du système* (1) *pour n pair.* Soit S_0 le secteur

$$|x| \leqslant x_0, \quad \pi + \delta \leqslant \operatorname{Arg} x \leqslant \pi + \frac{2\pi}{n+1} - \delta,$$

où $\delta > 0$ peut être choisi aussi petit que l'on veut. Il existe alors une transformation (19) ramenant le système (1) à la forme

$$\varepsilon z' = A_0(x) z, \quad A_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ x & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $T(x, \varepsilon)$ se développe en une série asymptotique (28) lorsque $\varepsilon \to +0$ uniformément en $x \in S_0$ et est holomorphe par rapport à x et ε pour $x \in S$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Les coefficients du développement asymptotique se déterminent à partir de l'identité formelle

$$\varepsilon \frac{dT}{dx} = A_0(x) T - TA(x, \varepsilon)$$

pour la série formelle (28).

7. Systèmes quasi diagonaux. Considérons le système (1) où la fonction matricielle $A(x, \varepsilon)$ est holomorphe par rapport à x et ε pour

$$|x| \leqslant x_0, \quad 0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad |\operatorname{Arg} \varepsilon| \leqslant \theta_0, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad x_0 > 0, \quad \theta_0 > 0 \tag{68}$$

et satisfait les conditions:

1) Il existe une matrice $T(x)$ holomorphe et régulière pour $|x| \leqslant x_0$ telle que

$$T^{-1}(x) A_0(x) T(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), \ldots, p_n(x)).$$

2) Si les valeurs propres $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ de la matrice $A_0(x)$ sont toutes distinctes, alors $p_j(x) = x^q \tilde{p}_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, où $q \geqslant 1$ est un entier, les fonctions $\tilde{p}_j(x)$ sont holomorphes pour $|x| \leqslant x_0$ et $\tilde{p}_j(0)$ sont tous distincts. Ici $A_0(x) = A(x, 0)$.

Supposons que S est le secteur $|\operatorname{Arg} x - \alpha| \leqslant \beta$, $0 < \beta < \pi/(2(q+1))$, α est réel et les nombres x_0, ε_0 et θ_0 sont assez petits. On a montré dans [91] que le système (1) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x A_0(t)\, dt\right\}$$

et que

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} U_r(x, \varepsilon)\, \varepsilon^{r/(q+1)}, \quad \varepsilon \to +0,$$

uniformément en x et ε si $x \in S$ et x, ε appartiennent au domaine (68). Par ailleurs

$$U(x, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{N} U_r(x, \varepsilon)\, \varepsilon^{r/(q+1)} = O(\gamma(\varepsilon)^{N+1}),$$
$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{1/(q+1)} (\ln \varepsilon)^{\delta_{1q}/2},$$

où δ_{1q} est le symbole de Kronecker.

Les deux conditions 1) et 2) sont remplies si, en particulier, la matrice $A_0(x)$ est antihermitienne pour les x réels (cf. n° 5).

8. Equation de Turritin. L'équation

$$x^n y^{(n)} - x^m y = 0, \tag{69}$$

où m est un nombre complexe quelconque, s'appelle *équation de Turritin*. Pour $m = 0$ c'est une *équation d'Euler*. Plus bas on admet que $m \neq 0$. Pour $n = 2$ les solutions de l'équation (69) s'expriment au moyen des fonctions de Bessel ; pour $m = 3$, en particulier, ses

solutions sont des fonctions d'Airy. Pour $m = n + 1$, l'équation (69) est une *équation d'Airy généralisée.*

Les solutions de l'équation (69) s'expriment au moyen des G-fonctions de Meyer [11] (les généralisations de la série hypergéométrique) dont la représentation asymptotique est peu étudiée. Nous suivons plus bas l'exposé du travail [47].

8.1. *Représentations intégrales et séries.* Soit dans le plan de la variable complexe t le contour C composé du demi-axe $]+\infty - ia, w - ia]$, de l'intervalle $[w - ia, w + ia]$ et du demi-axe $[w + ia, +\infty[$, où

$$a > (n-1)\left|\operatorname{Im}\frac{1}{m}\right|, \quad w < \operatorname{Re}\left(\frac{n-1}{m}\right), \quad w < 0.$$

Posons

$$\varphi_j(t) = \left\{\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + t - \frac{k}{m}\right)\right\}^{-1} \left\{\sin \pi\left(t - \frac{j}{m}\right)\right\}^{-1} m^{-nt} e^{-i\pi t},$$
$$j = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\tilde{\varphi}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{m} - t\right) m^{-nt} e^{-\pi i n t}.$$

Les fonctions

$$y_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_j(t)\, x^{mt}\, dt, \quad \tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \tilde{\varphi}(t)\, x^{mt}\, dt$$

sont alors solutions de l'équation (69) et se développent en séries

$$y_j(x) = -\frac{1}{\pi} e^{-\pi i j/m} m^{-nj/m} x^j \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + \nu + \frac{j-k}{m}\right)\right\}^{-1} m^{-n\nu} x^{m\nu}, \tag{70}$$

convergentes pour $x^m \neq 0$. La branche

$$x^{mt} = \exp\{mt[\ln|x| + i \operatorname{Arg} x]\}$$

dépend du choix de $\operatorname{Arg} x$. La formule (70) donne la représentation asymptotique des solutions lorsque $x \to 0$.

Les solutions $y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ sont linéairement indépendantes pour $m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)$. Supposons que

$$m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1). \tag{71}$$

Introduisons les fonctions

$$\varphi_{jk}(t) = \left\{\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(1 + t - \frac{k}{m}\right)\right\}^{-1} \left\{\sin \pi\left(t - \frac{j}{m}\right)\right\}^{-1} m^{-nt} e^{-\pi i(h+1)t},$$

où j, h sont des entiers tels que

$$0 \leqslant h\,|\,m\,|+j \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant h \leqslant n-1, \quad 0 \leqslant j \leqslant |\,m\,|-1. \tag{72}$$

Les fonctions

$$y_{jh}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_{jh}(t)\, x^{mt}\, dt \tag{73}$$

forment un système fondamental de solutions de l'équation (69) et se développent en séries convergeant pour $x^m \neq 0$:

$$y_{jh}(x) = -\sum_{l=0}^{h} [\ln (m^{-n}x^m)]^{h-l} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{l\nu}(j,\, h)\, x^{m\nu+j},$$

$a_{l\nu}(j,\, h) =$

$$= \frac{1}{(h-l)!}\, \pi^{-h-1} m^{-n\nu-nj/m} e^{-j(h+1)\pi i/m} \sum_{\mu=0}^{l} \frac{(2\pi i)^{\mu}}{\mu!\,(l-\mu)!}\, B_{\mu}^{(h+1)} f_j^{(l-j)}(\nu),$$

où $B_{\mu}^{(h+1)}$ sont des nombres de Bernoulli d'ordre $h+1$,

$$f_j(t) = \left\{ \prod_{h=0}^{n-1} \Gamma\left(1+t+\frac{j-h}{m}\right)\right\}^{-1}.$$

En particulier, $y_{j0} = y_j(x)$.

Indiquons quelques propriétés des solutions de l'équation (69). Posons

$$\omega = e^{2\pi i/m}, \qquad \omega^{\alpha} = e^{2\pi i \alpha/m}. \tag{74}$$

1. Si $y(x)$ est une solution, il en est de même de $y(\omega x)$.
2. Si m n'est pas de la forme (71), alors

$$y_j(x) = \omega^p y_j(x\omega^{-p}), \quad p = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots, n-1. \tag{75}$$

3. Si m est de la forme (71), alors

$$y_{jh}(x) = \sum_{q=0}^{h} C_p^q\, (2i)^q\, \omega^{(2p-q)j} y_{j,\, h-q}(x\omega^{-p}). \tag{76}$$

4. Toutes les solutions $y_{jh}(x)$ s'expriment en fonction de la solution $\tilde{y}(x)$:

$$y_{jh}(x) = \sum_{k=0}^{n-h-1} c_k(j,\, h)\, \tilde{y}(x\omega^k),$$

les constantes $c_k(j, h)$ se déduisant des relations

$$\sum_{k=0}^{n-h-1} c_k(j, h) x^k = c_0(j, h) \prod_{k=0}^{n-1}{}' (1 - x\omega^{-k}),$$

$$c_0(j, h) = (2\pi i)^{-n} (-2i)^{h+1} \exp\left\{\left[\frac{n(n-1)}{2} - j(h+1)\right]\frac{\pi i}{m}\right\},$$

$$c_{n-h-1}(h) = (-2\pi i)^{-n} (2i)^{h+1} \exp\left\{\left[j(h+1) - \frac{n(n-1)}{2}\right]\frac{\pi i}{m}\right\}.$$

L'accent prime indique que les facteurs de numéros $k = j$, $j + |m|, \ldots, j + h\,|m|$ sont omis.

5. Les solutions $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}(x\omega^{-1}), \ldots, \tilde{y}(x\omega^{-n+1})$ forment un système fondamental.

8.2. *Représentation asymptotique de la solution* $\tilde{y}(x)$. Tous les développements asymptotiques de ce numéro lorsque $|x^m| \to \infty$ sont uniformes en x, ε est un nombre fixe, $0 < \varepsilon < \pi$. Pour

$$|x| \to \infty, \quad -\pi \leqslant \operatorname{Arg}(m^{-n}x^m) \leqslant (2n+1)\pi$$

on a le développement asymptotique

$$\tilde{y}(x) = E(x) \equiv$$
$$\equiv \exp\left\{\frac{n}{m} x^{m/n}\right\} (m^{-n}e^{-n\pi i}x^m)^{\alpha_{mn}} \left[n^{-1/2}(2\pi)^{(n-1)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^{-mk/n}\right],$$

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{2}(n-1)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right), \tag{77}$$

uniformément en $\operatorname{Arg} x$. Les coefficients $d_1, d_2, \ldots$ sont choisis de telle sorte que la série formelle $E(x)$ vérifie l'équation (69).

Les identités du n° 8.1 permettent d'exprimer la représentation asymptotique du système fondamental de solutions lorsque $|x| \to \infty$ en fonction de celle de la solution $\tilde{y}(x)$. Les solutions $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}(x\omega^{-1}), \ldots$ $\ldots, \tilde{y}(x\omega^{-n+1})$ forment un système fondamental défini de façon unique par la condition : la solution d'indice j est asymptotiquement égale à $E(x\omega^{-m})$ pour

$$|x^m| \to \infty, \quad -\pi + \varepsilon \leqslant \operatorname{Arg}(m^{-n}x^m\omega^{-j}) \leqslant (2n+1)\pi - \varepsilon.$$

Les constantes $c_k(j, h)$ sont les multiplicateurs de Stokes du système fondamental de solutions $\{y_{jh}(x)\}$ par rapport au système fondamental $\{\tilde{y}_j(x\omega^{-j})\}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Dans [47] on indique un autre système fondamental de solutions identique à celui envisagé précédemment par Turritin, mais les multiplicateurs de Stokes du système fondamental $\{y_{jh}(x)\}$ sont plus volumineux.

8.3. *Représentation asymptotique d'un système fondamental de solutions.* Posons

$$c = -\pi^{-n}(2i)^{1-n}\,\omega^{n(n-1)/4}.$$

Indiquons les développements asymptotiques des solutions lorsque $|x^m| \to \infty$ dans les secteurs mentionnés plus bas. Si m n'est pas de la forme (71), alors $h = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$; si m est de la forme (71), j et h sont des entiers satisfaisant les inégalités (72). Posons

$$\alpha = \operatorname{Arg}(m^{-n}x^m). \tag{78}$$

1. Si $-\pi+\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant (2h+3)\pi-\varepsilon$, alors

$$y_{jh}(x) = c(-2i)^h\,\omega^{-j(h+1)/2}E(x) + c(2i)^h\,\omega^{j(h+1)/2}E(x\omega^{-h-1}),$$

à l'exception du cas $m = \pm 1$, $j = 0$, $h = n-1$.

2. Si $-\pi+\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant (h+1)\pi-\varepsilon$, alors

$$y_{jh}(x) = c(-2i)^h\omega^{-j(h+1)/2}E(x).$$

3. Si $(h+1)\pi+\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant (2h+3)\pi-\varepsilon$, alors

$$y_{jh}(x) = c(2i)^h\,\omega^{j(h+1)/2}E(x\omega^{-h-1}).$$

4. Si $(2p-1)\pi+\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant (2p+3)\pi-\varepsilon$, alors

$$y_{jh}(x) = c(2i)^h\,\omega^{j(2p-h-1)/2}\binom{p-1}{h}E(x\omega^{-p}) + \omega^j\binom{p}{h}E(x\omega^{-p-1}),$$

où p est un entier, $p \leqslant -1$ ou $p \geqslant h+1$.

5. Si $(2p-1)\pi+\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant (2p+1)\pi-\varepsilon$, alors

$$y_{jh}(x) = c(2i)^h\binom{p-1}{h}\omega^{j(2p-h-1)/2}E(x\omega^{-p}),$$

où p est un entier, $p < 0$ ou $p > h+1$.

Les constantes $c_k(j, h)$ sont les multiplicateurs de Stokes du système fondamental $\{y_{jh}(x)\}$ par rapport au système fondamental $\{\tilde{y}(x\omega^{-j})\}$. Dans [47] le premier de ces systèmes fondamentaux est cité avec un autre pour lequel les multiplicateurs de Stokes sont exprimés par des formules plus volumineuses.

8.4. *Distributions d'Airy.* Considérons l'équation

$$y^{(n)} - xy = 0,$$

de sorte que $m = n+1$ dans l'équation de Turritin (69). Posons

$$\varphi_p = \frac{2p-1}{m+1}\pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2,$$

et supposons que $\varepsilon > 0$ est petit mais fixe. Introduisons la fonction

$$\tilde{E}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{1/2}\pi}\,(n+1)^{(n-1)/2(n+1)}\, x^{(1-n)/(2n)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{n}{n+1}\, x^{(n+1)/n}\right\}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k x^{-(n+1)k/n}\right], \quad (79)$$

qui diffère de $E(x)$ par un facteur constant. Alors, pour $|x| \to \infty$,

$$y_j(x) = (p-1)\exp\{2pj\pi i/(n+1)\}\,\tilde{E}(x\exp\{-2p\pi i/m\}) \quad (80)$$

dans les secteurs

$$\varphi_p + \varepsilon < \operatorname{Arg} x < \varphi_{p+1} - \varepsilon,$$

de sorte que ces solutions se comportent comme des exponentielles. Dans les autres secteurs, c'est-à-dire dans de petits voisinages des rayons $\operatorname{Arg} x = \varphi_p$, les solutions $y_j(x)$ se conduisent comme des sommes d'exponentielles. On a

$$y_j(x) = \exp\{j(2p-1)\pi i/(n+1)\}\,\tilde{E}(x\exp\{-2p\pi i/(n+1)\}) +$$

$$+ \exp\{j(2p+1)\pi i/(n+1)\}\,\tilde{E}(x\exp\{-2(p+1)\pi i/(n+1)\}) \quad (81)$$

lorsque $|x| \to \infty$, $|\varphi - \varphi_{p+1}| \leqslant \varepsilon$. Sur le rayon $\varphi = \varphi_{p+1}$ on a

$$|\exp\{(xe^{-2\pi i p/(n+1)})^{(n+1)/n}\}| = |\exp\{(xe^{-2\pi i(p+2)/(n+1)})^{(n+1)/n}\}|,$$

de sorte que les deux termes de la formule (81) ont le même ordre de croissance lorsque $|x| \to \infty$ et la solution $y_j(x)$ peut présenter une infinité de zéros au voisinage des rayons $\operatorname{Arg} x = \varphi_p$.

8.5. *Distributions d'Airy de première espèce.* Supposons que $n = 2N$ est pair. M. Kohno [86] a introduit les fonctions $\operatorname{Ai}(z)$ qui pour $n = 2$ sont confondues avec la fonction d'Airy (chap. IV, § 1):

$$\operatorname{Ai}(z) = \gamma \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (n+1)^{n(j-1)/(n+1)}\, \eta_{n-j} w_j(z),$$

$$w_j(z) = z^{n-j} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(m+1+\frac{k-j}{n+1}\right)\right\}^{-1} [z^{n+1}(n+1)^{-n}]^m, \quad (82)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

où γ et η_j sont des constantes réelles,

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (n+1)^{\frac{(2n+1)(1-n)}{2(n+1)}} \left\{\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{n+1}\right\}^{-1},$$

$$\eta_0 x^{n-1} + \eta_1 x^{n-2} + \ldots + \eta_{n-1} = (x+1)\prod_{k=1}^{N-1}\left(x^2 + 2x\cos\frac{\pi k}{n+1} + 1\right).$$

Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes:

1) Supposons que les entiers $k_1, \ldots, k_n$ sont distincts mod $(n+1)$, $\omega = \exp\{2\pi i/(n+1)\}$. Les fonctions $\mathrm{Ai}(\omega^{k_j} z)$, $j = 1, \ldots, n$, forment alors un système fondamental de solutions et leur wronskien est égal à

$$W = c_1 \ldots c_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left[\sin\left(\frac{k_i - k_j}{n+1}\pi\right)\right] \exp\left\{\left(\frac{k_i + k_j}{n+1} + \frac{1}{2}\right)\pi i\right\},$$

$$c_j = \check{\gamma}(-1)^j (n+1)^{n(n-j)/(n+1)} \eta_{n-j} = \mathrm{Ai}^{(n-j)}(0).$$

2) On a l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k \mathrm{Ai}(\omega^{-k} z) = 0,$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_k = -\omega^{-k} \prod_{j=1}^{k-1} \left|\sin\left(\frac{j-k}{n+1}\pi\right)\right| \left|\sin\frac{j}{n+1}\pi\right|^{-1}, \quad k \geqslant 1.$$

3) Pour $|z| \to \infty$ la fonction $\mathrm{Ai}(z)$ est de la forme

$$\bar{d} z^{-(n-1)/(2n)} \exp\left\{-\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n} \omega_n\right\}(1+\varepsilon_1), \quad -2\pi \leqslant \operatorname{Arg} z < -\pi,$$

$$z^{-(n-1)/(2n)} \exp\left\{-\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n}\right\}(1+\varepsilon_2), \quad -\pi \leqslant \operatorname{Arg} z < \pi,$$

$$d z^{-(n-1)/(2n)} \exp\left\{-\frac{n}{n+1} z^{(n+1)/n} \omega_n^{-1}\right\}(1+\varepsilon_3), \quad -\pi \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi,$$

$$\omega_n = \exp\left\{\frac{2\pi i}{n}\right\}, \quad d = \exp\left\{\frac{n-1}{n}\pi i\right\}, \quad \varepsilon_j = O\left(z^{-(n+1)/n}\right).$$

§ 7. Problème de diffusion, invariants adiabatiques et problème aux valeurs propres

1. Matrice de diffusion. Considérons le système de n équations

$$y'' + \lambda^2 A(x) y = 0, \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre. Soient remplies les conditions:

1) Les limites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} A(x) = A_\pm$ existent et sont finies, les valeurs propres p_j^+ (resp. p_j^-) de la matrice A_+ (resp. A_-) sont strictement positives et distinctes.

2) $A(x) \in C^2(\mathbf{R})$, $A(x) - A_+ \in L_1(]0, \infty[)$, $A(x) - A_-(x) \in L_1(]0, \infty[)$.

Pour $\lambda > 0$ fixe, toute solution du système (1) peut alors être mise sous la forme

$$y(x, \lambda) = A_-^{-1/4} \exp\{i\lambda \sqrt{A_-} x\} [b_+ + \lambda^{-1} \varepsilon_1^-] + \\ + A_-^{-1/4} \exp\{-i\lambda \sqrt{A_-}\, x\} [b_- + \lambda^{-1} \varepsilon_2^-] = \\ = A_+^{-1/4} \exp\{i\lambda \sqrt{A_+}\, x\} [c_+ + \lambda^{-1} \varepsilon_1^+] + \\ + A_+^{-1/4} \exp\{-i\lambda \sqrt{A_+}\, x\} [c_- + \lambda^{-1} \varepsilon_2^+].$$

La matrice $\sqrt{A_-}$ est semblable à une matrice diagonale d'éléments $\sqrt{p_1^-} > 0, \ldots, \sqrt{p_n^-} > 0$; les autres racines carrées des matrices se déterminent de façon analogue. Les vecteurs $b_\pm$ et $c_\pm$ dépendent seulement de λ, $|\varepsilon_j^-(x, \lambda)| \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ et $|\varepsilon_j^+(x, \lambda)| \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On appelle *matrice de diffusion* (ou *S-matrice*) une matrice d'ordre $2n$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_+ \\ b_- \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} b_+ \\ c_- \end{bmatrix}, \tag{2}$$

où S_{jk} sont des matrices carrées d'ordre n. La matrice de diffusion est indépendante du choix de la solution Y et possède les propriétés suivantes:

1. Si la matrice $A(x)$ est hermitienne pour tous les x, la S-matrice est unitaire.

2. Si la matrice $A(x)$ est réelle pour tous les x, alors

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{S_{22}} & \overline{S_{12}} \\ \overline{S_{21}} & \overline{S_{11}} \end{bmatrix}.$$

Supposons remplies les conditions:

3) La matrice $A(x)$ est réelle et symétrique, ses valeurs propres sont strictement positives et distinctes pour tous les $x \in \mathbf{R}$.

4) Les éléments des matrices $A(x) - A_+$ et $A(x) - A_-$ sont des fonctions douces (§ 6, n° 3.3) respectivement sur les demi-axes $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Lorsque $\lambda \to +\infty$, on a alors des formules de type (9) du § 11, chap. II:

$$s_{jj}(\lambda) = \exp\left\{i\lambda \int_0^\infty \left(\sqrt{p_j(x)} - \sqrt{p_j^+}\right) dx + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 \left(\sqrt{p_j(x)} - \sqrt{p_j^-}\right) dx + \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \lambda^{-k}\right\},$$

$$s_{jl}(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}), \quad j \neq l.$$

Si la fonction matricielle $A(z)$ est holomorphe dans une bande de la forme Π : $|\operatorname{Im} z| < a$, $a > 0$, et les conditions 1), 2) et 4), satisfaites dans Π, alors les éléments non diagonaux de la S-matrice sont d'ordre $O(e^{-c\lambda})$, $c > 0$, $\lambda \to +\infty$.

2. Invariants adiabatiques du système (1). Sous les conditions 1) à 4) et pour $\lambda \gg 1$, les équations (1) décrivent les oscillations d'un système composé d'oscillateurs linéaires faiblement liés dont les pulsations varient lentement dans le temps (chap. II, § 11, n° 3). Soient $\{e_1(x), \ldots, e_n(x)\}$ une base orthonormale de vecteurs propres réels de classe $C^\infty(\mathbf{R})$, y une solution du système (1). Les fonctions

$$J_k(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{p_k(x)}}[p_k(x)(e_k(x), y(x))^2 + (e_k(x), y'(x))^2], \; 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3}$$

sont alors des invariants adiabatiques du système (1). La quantité

$$J_k(\lambda) = J_k(+\infty, \lambda) - J_k(-\infty, \lambda)$$

s'appelle *variation totale de l'invariant adiabatique*.

Soient y_j^+ des solutions du système (1) telles que

$$y_j^+ = (p_j^+)^{-1/4} \exp\{i\lambda \sqrt{p_j^+}\, x\}[e_j(+\infty) + o(1)], \qquad x \to +\infty,$$

et y_j^- des solutions ayant le même comportement asymptotique lorsque $x \to -\infty$. Les solutions $\{y_1^+, \overline{y_j^+}\}$ et $\{y_j^-, \overline{y_j^-}\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, forment deux systèmes fondamentaux et toute solution est de la forme

$$y = Y^+a^+ + \overline{Y^+}b^+ = Y^-a^- + \overline{Y^-}b^-,$$

où $a^\pm$ et $b^\pm$ sont des n-vecteurs et Y^+ une matrice d'ordre n de colonnes $y_1^+(x), \ldots, y_n^+(x)$, les autres matrices se définissant de façon analogue. Alors

$$J_k(\lambda) = 2(a_k^+b_k^+ - a_k^-b_k^-). \tag{4}$$

Si les conditions 1) à 4) sont satisfaites, $J_k(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ et $J_k(\lambda) = O(e^{-c\lambda})$, $c > 0$, $\lambda \to +\infty$, sous réserve que la matrice $A(x)$ vérifie les conditions formulées à la fin du n° 1.

3. Invariants adiabatiques de systèmes canoniques. Considérons le système de $2n$ équations

$$\varepsilon y' = A(x)\, y, \tag{5}$$

où $J_{2n}A(x)$ est une matrice symétrique réelle (J_{2n} intervient dans le § 4). Introduisons les conditions:

1) Les valeurs propres de la matrice $A(x)$ sont distinctes et imaginaires pures pour tous les x, $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

2) Les limites $\lim_{x\to\pm\infty} A(x) = A_\pm$ existent et sont finies, et les éléments de la fonction matricielle $A'(x)$ sont des fonctions douces.

Soient $p_j(x)$ les valeurs propres et $e_j(x)$ les vecteurs propres à droite de la matrice $A(x)$. Numérotons-les de telle sorte que

$$p_{j+n}(x) = -p_j(x) = \overline{p_j(x)}, \quad e_{j+n}(x) = \overline{e_j(x)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

et prenons les vecteurs propres à gauche de la forme $e_j^*(x) = \overline{e_j^T(x)}$. Le système (5) admet n invariants adiabatiques indépendants

$$J_s(x, \varepsilon) = i\frac{(e_s^* y)(\overline{e_s^* y})}{e_s^* J \overline{e_s^*}}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

qui sont réels si les solutions y le sont. Ces invariants sont en involution, c'est-à-dire que les crochets de Poisson $[J_r, J_s]$, $r \neq s$, sont nuls. Sous les conditions 1), 2), les variations totales des invariants adiabatiques

$$J_s(\varepsilon) = J_s(+\infty, \varepsilon) - J_s(-\infty, \varepsilon)$$

sont d'ordre $O(\varepsilon^\infty)$ lorsque $\varepsilon \to +0$. Signalons que la formule (4) est un cas particulier de la formule (6). L'article [133] passe en revue les travaux consacrés à la théorie des invariants adiabatiques.

4. Problèmes aux valeurs propres.

4.1. *Problème sur un demi-axe.* Considérons le système de n équations

$$y' = \lambda A(x) y \tag{7}$$

sur le demi-axe $\mathbf{R}^+$: $x \geqslant 0$ et posons la condition à la limite

$$Uy(0, \lambda) = 0, \tag{8}$$

où U est une $m \times n$-matrice constante de rang m. Un point λ_0 s'appelle *valeur propre* du problème (7), (8) sur le demi-axe $\mathbf{R}^+$ si le système (7) admet une solution non triviale (dite *fonction propre*) $y(x, \lambda_0) \in L_2(\mathbf{R}^+)$ vérifiant la condition à la limite (8). On traite plus bas le cas où les valeurs propres constituent un ensemble discret et l'on détermine leur représentation asymptotique pour certaines classes de systèmes.

On admettra que la matrice $A(x)$ satisfait les conditions 1) à 4) du § 4, n° 1.1, et, de plus, que

$$q(x) > 0, \quad \int_0^\infty q(x)\,dx = \infty. \tag{9}$$

Soient η_j et $p_j(x)$ les valeurs propres respectives des matrices $B(+\infty)$ et $A(x)$. Alors

$$p_j(x) = [\eta_j + o(1)]\, q(x), \quad x \to \infty.$$

Supposons que les nombres η_j sont tels que

$$\operatorname{Re}\eta_1 < \operatorname{Re}\eta_2 < \ldots < \operatorname{Re}\eta_m < 0 < \operatorname{Re}\eta_{m+1} < \ldots < \operatorname{Re}\eta_n,$$

où $m = \text{rang}\, U$. Le système (7) admet alors un système fondamental de solutions $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de la forme (10) du § 4:

$$y_j(x, \lambda) = \exp\left\{\lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)\, dt\right\} [e_j(x) + \lambda^{-1} u_j(x, \lambda)], \quad (10)$$

où pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ et $x \geqslant x(\lambda_0)$ on a les majorations

$$|u_j(x, \lambda)| \leqslant k(x), \quad \lim_{x \to \infty} k(x) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

D'autre part, il existe un secteur S: $|\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$, $|\operatorname{Arg}\lambda| \leqslant \delta$ dans le plan de λ complexe tel que

1) la solution $y_j(x, \lambda)$ est holomorphe par rapport à λ pour $\lambda \in S$ et pour chaque $x \geqslant 0$ fixe, $1 \leqslant j \leqslant n$;

2) les solutions $y_1, \ldots, y_m$ sont de classe $L_2(\mathbf{R}^+)$, les solutions $y_{m+1}, \ldots, y_n$ et aucune de leurs combinaisons linéaires non triviales ne le sont, quel que soit $\lambda \in S$ fixe.

Notons $\tilde{Y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \ldots, y_m(x, \lambda))$; toute fonction propre est alors de la forme

$$y(x, \lambda) = \tilde{Y}(x, \lambda)\, c(\lambda), \quad (11)$$

où $c(\lambda)$ est un vecteur à m composantes et les valeurs propres se déterminent à partir de l'équation

$$\det \Omega_0(\lambda) = 0, \quad \Omega_0(\lambda) = U\tilde{Y}(0, \lambda). \quad (12)$$

Des propriétés d'un système fondamental de solutions il s'ensuit que pour $\lambda \in S_\delta$ ou bien les valeurs propres forment un ensemble discret, ou bien $\det \Omega_0(\lambda) \equiv 0$, de sorte que tout point du secteur S_δ est point du spectre. Le dernier cas est exceptionnel.

Posons les conditions suivantes:

1) Le demi-axe $x \geqslant 0$ contient un seul point de retour qui est simple: $x_0 > 0$, $p_m(x_0) = p_{m+1}(x_0)$.

2) $\operatorname{Re} p_m(x_0) \equiv \operatorname{Re} p_{m+1}(x_0)$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant x_0$, $\quad \operatorname{Re} p_j(x) < \operatorname{Re} p_{j+1}(x)$ pour tous les $x \geqslant 0$ si $j \neq m$ et pour $x \geqslant x_0$ si $j = m$.

3) La fonction matricielle $A(x)$ est holomorphe dans un voisinage V de l'intervalle $I = [0, x_0]$.

Ici I est une ligne de Stokes et la structure locale des lignes de Stokes issues du point x_0 est la même que pour l'équation d'Airy

$y'' - \lambda^2 (x - x_0) y = 0$. Du point x_0 sont encore issues deux lignes de Stokes l_1, $l_2 = l_1^*$, $\operatorname{Im} x > 0$ sur l_1.

4.2. *Représentation asymptotique des solutions*. Pour déterminer la représentation asymptotique des valeurs propres il faut connaître celle des solutions $y_1 (x, \lambda), \ldots, y_m (x, \lambda)$ pour $x = 0$, $\lambda \to +\infty$. Vu que le demi-axe $x \geqslant 0$ contient le point de retour x_0, les développements asymptotiques (10) sont mis en défaut pour $x = 0$ et l'on est

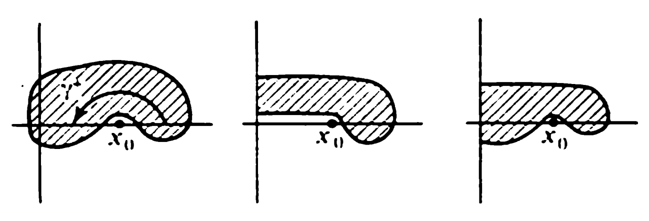


Fig. 25

contraint par conséquent d'envisager la représentation des solutions dans divers domaines du plan de x complexe. Supposons que les domaines G, G_m et G^+ représentés sur la figure 25 sont suffisamment étroits et que le domaine G^- est symétrique de G^+ par rapport à l'axe réel. Tous ces domaines contiennent le point $x_1 > x_0$, et leurs frontières, le point ia, $a > 0$. Notons $\widetilde{G} = G \cup [a, +\infty[$: les domaines $\widetilde{G}_m$ et $\widetilde{G}^\pm$ se définissent de façon analogue.

Les raisonnements ultérieurs sont identiques à ceux du § 5, chap. III, nº 2.1. Si $1 \leqslant j \leqslant m - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $j \neq k$, $j \neq m$, $m + 1$, il existe pour tout $x \in [\widetilde{G}]$ un chemin canonique γ_{jk} reliant les points x_{jk} et x, situé dans $[\widetilde{G}]$. Ici $x_{jk} = +\infty$ pour $k > j$, $x_{jk} = ia$, $k < j$, de sorte que les solutions $y_1, \ldots, y_{m-1}$ admettent des développements (10) lorsque $\lambda \to +\infty$, $x \in G$. Les solutions y_m et $y_{m+1}^\pm$ ont des développements asymptotiques identiques dans les domaines $[G_m]$ et $[G^\pm]$.

Les solutions $y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}^+, y_{m+1}^-$ sont linéairement dépendantes, de sorte que

$$y_m (x, \lambda) = a_+ (\lambda) y_{m+1}^+ (x, \lambda) + a_- (\lambda) y_{m+1}^- (x, \lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j (\lambda) y_j (x, \lambda). \tag{13}$$

Les solutions $y_{m+1}^\pm$ possèdent le plus grand, et le même, ordre de croissance lorsque $x \to +\infty$ et puisque la représentation asymptotique (10) est double, on a $a_1^+ (\lambda) + a_2^+ (\lambda) = 0$, $\lambda \gg 1$. Précisons la norma-

lisation des solutions y_m et $y^{\pm}_{m+1}$. Le point x_0 étant un point de retour simple, on a

$$p_{m+1}(x) = q(x) + \sqrt{D(x)}, \quad p_m(x) = q(x) - \sqrt{D(x)},$$

où $D(x)$ présente un zéro simple au point $x = x_0$. $D(x) > 0$ pour $x > x_0$ et $q(x)$ est une fonction différentiable. Par ailleurs (§ 5),

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{1}{4(x-x_0)} + p_j^{(2)}(x), \qquad j = m,\ m+1,$$

où $p_j^{(2)}(x) = O((x-x_0)^{-1/2})$, $x \to x_0$. Pour $x > x_0$, $j = m,\ m+1$, posons

$$\tilde{y}_j(x, \lambda) = (x-x_0)^{-1/4} \exp\{\lambda S_j(x) + S_j^{(2)}(x)\},$$

$$S_j^{(2)}(x) = \int_{x_0}^{x} p_j^{(2)}(t)\, dt,$$

où $\sqrt[4]{x - x_0} > 0$. Faisons $x = ia$ dans l'identité (13). On obtient les valeurs de toutes les fonctions et fonctions vectorielles pour $x = ia$ en les prolongeant analytiquement le long de chemins γ contenus dans les domaines respectifs. Ceci étant, on peut poser $\gamma = \gamma^+$ (voir fig. 25) dans les domaines G, G_m et $G^{\pm}$, $\gamma = \gamma^-$ dans le domaine G^-. Désignons les valeurs correspondantes de $\tilde{y}_{m+1}$ et e_{m+1} par $\tilde{y}^{\pm}_{m+1}$ et $e^{\pm}_{m+1}$; alors

$$(e_{m+1}(x)\, e^{S_{m+1}^{(2)}(x)})_- = e_m(x)\, e^{S_m^{(2)}(x)},$$

$$(x-x_0)_+^{1/4} = i(x-x_0)_-^{1/4}, \quad (S_{m+1}(x))_- = S_m(x);$$

donc pour $x = ia$ tous les rapports $\tilde{y}_j/y_m$ et y^+_{m+1}/y^-_m sont des valeurs exponentiellement petites et après simplification par $\tilde{y}_m$ l'identité (13) devient

$$e_m(x) = ia_-(\lambda)\,[e_m(x) + O(\lambda^{-1})] + \sum_{j=1}^{m} a_j(\lambda) \frac{y_j(x, \lambda)}{\tilde{y}_m(x, \lambda)} [e_j(x) + O(\lambda^{-1})].$$

La multiplication de cette identité à gauche par les vecteurs $e_1^*(x), \ldots, e_m^*(x)$ nous fournit un système d'équations, d'où l'on tire $a_+(\lambda) = i + O(\lambda^{-1})$, de sorte que

$$a_+(\lambda) = i + O(\lambda^{-1}), \qquad a_-(\lambda) = -i + O(\lambda^{-1}).$$

De là il suit que

$$y_m(0, \lambda) = [i + O(\lambda^{-1})]\, y^+_{m+1}(0, \lambda) + [-i + O(\lambda^{-1})]\, y^-_{m+1}(0, \lambda) + \\ + O(|y^{\pm}_{m+2}(0, \lambda)|\, e^{-c\lambda}), \quad c > 0. \quad (14)$$

Pour cela il suffit de poser $x = x_1 > x_0$ dans le système obtenu ci-dessus et d'utiliser le fait que

$$\mathrm{Re}\int_{x_0}^{x}[p_j(t)-p_k(t)]\,dt\to-\infty,\quad x\to+\infty,$$

pour $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $k = m$, $m+1$. La dernière estimation est identique à la formule (8) du § 5.

4.3. *Représentation asymptotique des valeurs propres.* Les développements asymptotiques des solutions $y_1, \ldots, y_{m-1}, y^{\pm}_{m+1}$ sont valables au point $x = 0$, et la solution y_m s'exprime en fonction d'elles. En remplaçant les valeurs de toutes les solutions par celles de leurs développements asymptotiques pour $x = 0$, $\lambda\to+\infty$ et en tenant compte de (13), (14), on déduit de (12) l'équation aux valeurs propres. Notons

$$\xi_0=\frac{1}{2}\int_0^{x_0}[p_{m+1}(t)-p_m(t)]\,dt, \tag{15}$$

$$\xi_1^{\pm}=[S^{(2)}_{m+1}(x_0,\ 0)]_{\pm},\quad \Delta_{\pm}=\det B_{\pm},$$

où $B_{\pm}$ sont les matrices

$$B_{\pm}=U\{e_1(0),\ \ldots,\ e_{m-1}(0),\ e^{\pm}_{m+1}(0)\}.$$

Supposons que l'un au moins des nombres Δ_+ et Δ_- est non nul. On a

$$B_+e^{-i\pi/4}\exp\{-i\lambda\xi_0+\xi_1^+\}+B_-e^{i\pi/4}\exp\{i\lambda\xi_0+\xi_1^-\}=O(\lambda^{-1}),$$

d'où l'on déduit la représentation asymptotique de la séquence de valeurs propres

$$\lambda_k=\Big\{k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{i}{2}[(S^{(2)}_{m+1}(x_0,\ 0))_+-(S^{(2)}_{m+1}(x_0,\ 0))_-]+ \\ +\frac{i}{2}\ln\frac{A_+}{A_-}\Big\}\xi_0^{-1}+O(k^{-1}),\quad k\to+\infty. \tag{16}$$

Les formules (12) à (16) nous permettent de trouver la représentation asymptotique des fonctions propres partout sur le demi-axe $x \geqslant 0$ à l'exception d'un petit voisinage du point de retour x_0. On peut trouver la représentation asymptotique des solutions au voisinage du point x_0 en appliquant les résultats du § 4.

4.4. *Equation d'ordre n.* Considérons l'équation

$$y^{(n)}+\lambda q_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+\lambda^n q_n(x)\,y=0 \tag{17}$$

sous les mêmes conditions que plus haut sur les racines de l'équation caractéristique, et le problème aux valeurs propres sur le demi-axe $x \geqslant 0$ avec les conditions aux limites élémentaires

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \ldots, \quad y^{(m-1)}(0)=0.$$

Ici $\Delta_{\pm}$ est le déterminant de Vandermonde des fonctions $p_1(x), \ldots$ $\ldots, p_{m-1}(x), \ p^{\pm}_{m+1}(x)$ pour $x=0$, de sorte que

$$\frac{\Delta_+}{\Delta_-}=\prod_{j=1}^{m-1} \frac{p^+_{m+1}(0)-p_j(0)}{p^-_{m+1}(0)-p_j(0)}.$$

En se servant des expressions explicites des fonctions $p_j^{(1)}(x)$, on obtient pour les valeurs propres la représentation asymptotique

$$\lambda_k=\left[k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\ln\frac{p^+_{m+1}(0)-p_j(0)}{p^-_{m+1}(0)-p_j(0)}-\right.$$

$$\left.-\frac{i}{4}\int_0^{x_0}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{(p^+_{m+1}(t))'}{p^+_{m+1}(t)-p_j(t)}-\frac{(p^-_{m+1}(t))'}{p^-_{m+1}(t)-p_j(t)}\right\}dt\right]\xi_0^{-1}+O(k^{-1}).$$

Dans le cas de l'équation $y''-\lambda^2 q(x)\,y=0$ cette formule est confondue avec celle indiquée au chap. III, § 5, nº 2.1.

4.5. *Problème sur l'axe tout entier.* Dans ce cas le nombre λ_0 s'appelle *valeur propre* si le système (7) admet une solution non triviale $y(x, \lambda_0) \in L_2(]-\infty, \infty[)$. On admettra que les conditions du § 4, nº 4.1, sont satisfaites sur chacun des demi-axes $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, de sorte que

$$A(x)=q_+(x)\,Q_+^{-1}(x)\,B_+(x)\,Q_+(x), \qquad x\geqslant 0,$$
$$A(x)=q_-(x)\,Q_-^{-1}(x)\,B_-(x)\,Q_-(x), \qquad x\leqslant 0,$$

chacune des matrices $Q_{\pm}(x)$, $B_{\pm}(x)$ et des fonctions $q_{\pm}(x)$ vérifie les conditions 3), 4) du § 4. Supposons que

$$q_{\pm}(x)>0, \qquad \int_0^{+\infty} q_+(x)\,dx=\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} q_-(x)\,dx=\infty$$

et que les valeurs propres $\eta_j^{\pm}$ des matrices $B_{\pm}(\pm\infty)$ sont telles que

$$\operatorname{Re}\eta_1^+<\ldots<\operatorname{Re}\eta_m^+<0<\operatorname{Re}\eta_{m+1}^+<\ldots<\operatorname{Re}\eta_n^+,$$
$$\operatorname{Re}\eta_1^-<\ldots<\operatorname{Re}\eta_m^-<0<\operatorname{Re}\eta_{m+1}^-<\ldots<\operatorname{Re}\eta_n^-.$$

Le système (7) admet alors deux systèmes fondamentaux de solutions $\{y_1^+, \ldots, y_n^+\}$ et $\{y_1^-, \ldots, y_n^-\}$ pour lesquelles la représen-

tation asymptotique (10) est double respectivement lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$. Pour chaque λ fixé, $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$, on a

1) les solutions $y_1^+(x, \lambda), \ldots, y_m^+(x, \lambda)$ sont de classe $L_2(\mathbf{R}^+)$, les solutions $y_{m+1}^+(x, \lambda), \ldots, y_n^+(x, \lambda)$ et aucune de leurs combinaisons linéaires non triviales ne le sont;

2) les solutions $y_{m+1}^-(x, \lambda), \ldots, y_n^-(x, \lambda)$ sont de classe $L_2(\mathbf{R}^-)$, les solutions $y_1^-(x, \lambda), \ldots, y_m^-(x, \lambda)$ et aucune de leurs combinaisons linéaires non triviales ne le sont;

3) il existe $\rho > 0$, $\delta > 0$ et $a > 0$ tels que les solutions $y_j^\mp(x, \lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont holomorphes par rapport à λ pour $|\lambda| \geqslant \rho$, $|\operatorname{Arg} \lambda| \leqslant \delta$ et pour chaque $x \geqslant a$ (respectivement $x \leqslant a$) fixe.

Toute fonction propre est de la forme

$$y(x, \lambda) = c_1^+(\lambda) y_1^+(x, \lambda) + \ldots + c_m^+(\lambda) y_m^+(x, \lambda) =$$
$$= c_{m+1}^-(\lambda) y_{m+1}^-(x, \lambda) + \ldots + c_n^-(\lambda) y_n^-(x, \lambda),$$

$\lambda \in S_\delta$, $|\lambda| \gg 1$. Les valeurs propres se déterminent à partir de l'équation $W(\lambda) = 0$, où W est le wronskien des solutions $y_1^+, \ldots$ $\ldots, y_m^+, y_{m+1}^-, \ldots, y_n^-$. Supposons que sont satisfaites des conditions identiques aux conditions 1) à 3) du nº 4.1:

1) L'axe réel ne contient que deux points de retour $x_1 < x_2$, simples tous deux, $p_m(x_j) = p_{m+1}(x_j)$, $j = 1, 2$.

2) Re $p_m(x) \equiv$ Re $p_{m+1}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, Re $p_j(x) <$ Re $p_{j+1}(x)$ pour tous les x si $j \neq m, n$ et pour $x \notin]x_1, x_2[$ si $j = m$.

3) La fonction matricielle $A(x)$ est holomorphe au voisinage de l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Soit C un contour fermé simple du plan de x complexe renfermant l'intervalle $[x_1, x_2]$ et orienté dans le sens positif. Notons

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \oint_C [p_{m+1}(x) - p_m(x)]\, dx,$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \oint_C [p_{m+1}^{(1)}(x) - p_m^{(1)}(x)]\, dx.$$

Le système (7) admet une séquence infinie de valeurs propres de la forme

$$\lambda_k = \xi_0^{-1} [\pi(k + 1/2) - i\xi_1] + O(k^{-1}), \qquad k \to \infty.$$

On obtient des résultats analogues dans le cas où le système (7) admet plusieurs points de retour simples réels [62].

§ 8. Exemples

1. Système de Stueckelberg. Ce système, qui se présente lorsqu'on étudie les chocs non élastiques de deux atomes, est de la forme

$$h^2u_1'' + \varphi_1 u_1 = \alpha u_2, \qquad h^2 u_2'' + \varphi_2 u_2 = \alpha u_1, \tag{1}$$

où $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\alpha(x)$ sont des fonctions réelles régulières sur l'intervalle $I = [a, b]$, $h > 0$, un petit paramètre. Posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)], \quad \psi(x) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]. \tag{2}$$

Les valeurs et vecteurs propres de la matrice du système sont

$$\begin{gathered} p_{1,2}(x) = \varphi(x) \pm \sqrt{D(x)}, \quad D = \psi^2 + \alpha^2, \\ e_{1,2}(x) = \left(\alpha, \psi \mp \sqrt{\psi^2 + \alpha^2}\right)^T, \quad e_j^*(x) = e_j^T(x), \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{3}$$

Le système (1) admet deux types de points de retour.

A. $\varphi^2(x) = \psi^2(x) + \alpha^2(x)$. Dans ce cas, ou bien $p_1 = 0$, ou bien $p_2 = 0$.

B. $\psi^2(x) + \alpha^2(x) = 0$. Dans ce cas $p_1 = p_2$.

Supposons que l'intervalle I ne contienne pas de point de retour. Comme

$$\exp\left\{-\int^x \frac{e_j^*(t)e_j'(t)}{e_j^*(t)e_j(t)}\,dt\right\} = \frac{c}{\sqrt{e_j^T(x)e_j(x)}},$$

le système (1) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$u_j^\pm(x, h) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_j(x)}}\frac{1}{\sqrt{e_j^T(x)e_j(x)}} \times \\ \times \exp\left\{\pm\frac{i}{h}\int_{x_0}^x \sqrt{p_j(t)}\,dt\right\}[e_j(x) + O(h)], \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Ces formules peuvent être mises sous la forme

$$\begin{gathered} u_1^+(x, h) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_1 D}}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} - \psi}}\exp\left\{\frac{i}{h}\int_{x_0}^x \sqrt{p_1(t)}\,dt\right\} \times \\ \times\left[\begin{bmatrix}\alpha \\ \psi - \sqrt{D}\end{bmatrix} + O(h)\right], \\ u_2^+(x, h) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_2 D}}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{D} + \psi}}\exp\left\{\frac{i}{h}\int_{x_0}^x \sqrt{p_2(t)}\,dt\right\} \times \\ \times\left[\begin{bmatrix}\alpha \\ \psi + \sqrt{D}\end{bmatrix} + O(h)\right], \\ u_j^-(x, h) = \overline{u_j^+(x, h)}, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{5}$$

2. Ondes dans le plasma. L'étude de la propagation des ondes électro-magnétiques dans un milieu anisotrope stratifié plan non homogène et notamment dans le plasma magnétisé conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}[AE_x+iCE_y]=0, \\ \frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}[-iCE_x+BE_y]=0, \end{aligned} \tag{6}$$

où $\omega > 0$ est la pulsation, c la vitesse de la lumière dans le vide, A, B et C des fonctions de z. Ce cas correspond à une incidence normale de l'onde sur la couche de plasma. Les valeurs et vecteurs propres de la matrice du système sont:

$$p_{1,2}(z)=\frac{1}{2}(A+B\pm\sqrt{D}), \qquad D=(A-B)^2+4C^2,$$

$$e_{1,2}(z)=\begin{bmatrix} -2iC \\ A-B\mp\sqrt{D}\end{bmatrix}, \quad e^*_{1,2}(z)=[2iC,\ A-B\mp\sqrt{D}].$$

Les points de retour du système se déterminent à partir des équations $D=0$, $AB=C^2$.

Supposons que $\omega/c \gg 1$, l'intervalle I ne contient pas de point de retour et les fonctions $\operatorname{Re}\sqrt{p_1(z)}$, $\operatorname{Re}\sqrt{p_2(z)}$, $\operatorname{Re}(\sqrt{p_1(z)}-\sqrt{p_2(z)})$ ne changent pas de signe pour $z\in I$. Si les fonctions A, B et C sont réelles, cette condition est satisfaite. Ici les vecteurs propres à droite et à gauche sont tels que $e_j=(\alpha_j,\ \beta_j)^T$ et $e^*_j=(-\alpha_j,\ \beta_j)$, et par suite

$$\exp\left\{-\int^x \frac{e^*_j(t)\,e'_j(t)}{e^*_j(t)\,e_j(t)}\,dt\right\}=\frac{c}{\sqrt{\beta_j^2(x)-\alpha_j^2(x)}}\,.$$

Le système (6) admet un système fondamental de solutions de la forme

$$E_1^{\pm}=\frac{1}{\sqrt[4]{D}}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{D}-A+B}}\exp\left\{\pm i\,\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z}\sqrt{p_1(t)}\,dt\right\}[e_1(z)+O(h)],$$

$$E_2^{\pm}=\frac{1}{\sqrt[4]{D}}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{D}+A-B}}\exp\left\{\pm i\,\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z}\sqrt{p_2(t)}\,dt\right\}[e_2(z)+O(h)],$$

où $E_j=(E_{xj},\ E_{yj})^T$.

3. Système de théorie de l'élasticité. Les faibles oscillations d'un milieu isotrope élastique plan se décrivent par le système

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\rho\omega^2 u_1=0,\\ &\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\rho\omega^2 u_2=0, \end{aligned} \tag{7}$$

où $u=(u_1, u_2)^T$ est le vecteur des déplacements, $\sigma=(\sigma_{jk})$ le tenseur des déformations,

$$\begin{aligned} &\sigma_{jj}=\lambda\,\mathrm{div}\,u+2\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad j=1, 2,\\ &\sigma_{12}=\sigma_{21}=\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \end{aligned}$$

λ et μ les coefficients de Lamé, ρ la densité du milieu, ω la pulsation. Considérons un milieu stratifié non homogène: λ, μ et ρ dépendent de la seule variable $x_1=x$. Le système (7) admet alors des solutions de la forme $u(x_1, x_2)=e^{ikx_2}v(x_1)$, où la fonction vectorielle v est solution du système

$$Av''+(ikB+A')v'+(-k^2C+ikD+\rho\omega^2 I)v=0; \tag{8}$$

A, B, C et D sont des matrices dépendant de x:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0 & \lambda+\mu\\ \lambda+\mu & 0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda+2\mu\end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix}0 & \lambda'\\ \mu' & 0\end{bmatrix}.$$

Au système (8) est associé le faisceau

$$L(x, p)=Ap^2+(ikB+A')p-k^2C+ikD+\rho\omega^2 I$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} &p_{1,2}(x)=-\frac{1}{2}[\ln(\lambda+2\mu)]'\pm\sqrt{k^2+\frac{1}{2}[\ln(\lambda+2\mu)]'-\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}},\\ &p_{3,4}(x)=-\frac{1}{2}(\ln\mu)'\pm\sqrt{k^2+\frac{1}{2}(\ln\mu)'-\frac{\rho\omega^2}{\mu}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Traitons les deux cas suivants.

3.1. *La pulsation ω est indépendante de k.* Les racines du faisceau sont alors asymptotiquement multiples:

$$p_{1,2}(x) = \pm k - \frac{1}{2}[\ln(\lambda + 2\mu)]' + O(k^{-1}),$$

$$p_{3,4}(x) = \pm k - \frac{1}{2}(\ln \mu)' + O(k^{-1}).$$

Ce cas est identique à celui envisagé au chap. II, § 8, n° 2, A. Le terme principal de la représentation asymptotique n'est pas donné par une quadrature, il s'exprime en fonction des solutions de l'équation différentielle du second ordre

$$lw \equiv (\mu w)'' + \mu w' + 2\mu \left[\frac{(\mu w)'}{\lambda + \mu}\right]' = 0. \tag{10}$$

Soient I un intervalle fini, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x) \in C^\infty(I)$. On cherchera une solution asymptotique formelle du système (8) sous la forme

$$v(x, k) = e^{kx}\left[f_0(x) + \frac{1}{k} f_1(x) + \ldots\right];$$

pour les fonctions vectorielles $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... on obtient alors le système récurrentiel d'équations

$$\begin{aligned} &(A + B - C) f_0 = 0,\\ &(A + B - C) f_1 = -(2A + B) f_0' - (A' + D) f_0, \qquad (11)\\ &(A + B - C) f_j = -(2A + B) f_{j-1}' - (A' + D) f_{j-1} -\\ &\qquad\qquad - A f_{j-2}'' + \rho\omega^2 f_{j-2}, \quad j = 2, 3, \ldots,\\ &\qquad A + B - C = (\lambda + \mu)\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les solutions de la première équation (11) sont toutes de la forme $f_0(x) = w_0(x)(1, i)^T$, où $w_0(x)$ est une fonction arbitraire. La matrice $A + B - C$ est singulière ; il n'empêche que la deuxième équation (11) admet pour toute fonction $w_0(x)$ les solutions

$$f_1(x) = w_1(x)\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda + \mu}\begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda + 3\mu) w_0'(x) + 2\mu' w_0(x) \end{bmatrix},$$

où $w_1(x)$ est une fonction arbitraire. La fonction $w_0(x)$ qui reste indéterminée se définit seulement à partir de la condition de solubilité de la troisième équation (11). Cette condition est la suivante:

la fonction $w_0(x)$ vérifie l'équation (10). Pour la solution asymptotique formelle du système (9) on obtient en définitive l'expression

$$v^+(x, k) = e^{kx}\begin{bmatrix} w_0(x) + \frac{1}{k} w_1(x) + \frac{1}{k^2} w_2(x) + \dots \\ iw_0(x) + \frac{i}{k} q_1 + \frac{i}{k^2} q_2 + \dots \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$a_j(x) = (\lambda + 3\mu) w'_{j-1} + 2\mu' w_{j-1} - (\lambda + \mu)\left(\frac{a_{j-1}}{\lambda+\mu}\right)' -$$
$$- \frac{\lambda'}{\mu} a_{j-1} + [(\lambda + 2\mu) w'_{j-2}]' + \rho\omega^2 w_{j-2}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

où $q_n = w_n(x) + \frac{a_n(x)}{\lambda(x)+\mu(x)}$, $n = 1, 2$, $a_{-1} = a_0 \equiv 0$, $w_j(x)$ est solution de l'équation non homogène

$$[(\lambda + \mu) w'_j - a_{j+1}] - 2\mu\left(\frac{a_{j+1}}{\lambda+\mu}\right)' - \left[\mu\left(\frac{a_j}{\lambda+\mu}\right)'\right]' + \frac{\rho\omega^2 a_j}{\lambda+\mu} = 0. \quad (13)$$

Cette équation est de la forme $lw_j = q_j(w_0, w_1, \dots, w_{j-1})$, où l est l'opérateur de (10).

La formule (12) définit deux solutions asymptotiques formelles linéairement indépendantes $v_1^+(x, h)$ et $v_2^+(x, h)$ du système (8). Plus exactement, soient $\{w_{01}, w_{02}\}$ un système fondamental de solutions de l'équation (10), et w_j une solution particulière de l'équation (13). En posant $w_0 = w_{0j}$ dans la formule (12), on obtient les solutions asymptotiques formelles v_j^+, $j = 1, 2$.

Le système (8) admet aussi une solution asymptotique formelle

$$v_{1,2}^-(x) = e^{-kx}\begin{bmatrix} w_0(x) - \frac{1}{k} w_1(x) + \frac{1}{k^2} w_2(x) + \dots \\ -iw_0(x) + \frac{i}{k} q_1 - \frac{i}{k^2} q_2 + \dots \end{bmatrix}, \quad (14)$$

où $q_n = w_n(x) + \frac{a_n(x)}{\lambda(x)+\mu(x)}$, $n = 1, 2$.

Supposons qu'est remplie la condition

$$\lambda(x) \neq 0, \quad \mu(x) \neq 0, \quad \lambda(x) + 2\mu(x) \neq 0,$$
$$\lambda'(x)\mu(x) - \lambda(x)\mu'(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Le système (8) admet alors un système fondamental de solutions $\{v_1^+(x, k), v_2^+(x, k), v_1^-(x, k), v_2^-(x, k)\}$ et ces solutions sont justiciables des développements asymptotiques (12), (14) pour $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, $|k| \to \infty$, uniformes en $x \in I$.

Remarque. Si $\mu(x) \equiv \text{const}$, l'équation (11) est intégrable : l'une de ses solutions est $w_0(x) \equiv 1$.

3.2. *La pulsation* ω *dépend de* k: $\omega = k\sigma$, $\sigma > 0$. On cherchera une solution asymptotique formelle du système (8) sous la forme

$$v(x, k) = \exp\left\{ik\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right\}\left[e_0(x) + \frac{1}{k}e_1(x) + \ldots\right].$$

La fonction $p(x)$ et les fonctions vectorielles $e_0(x)$, $e_1(x)$, ... se déterminent alors à partir d'un système récurrentiel d'équations dont les deux premières sont:

$$L(x, p)\,e_0 = 0,$$
$$L(x, p)\,e_1 = i\,(2pAe_0' + p'Ae_0 + Be_0' + pA'e_0 + De_0),$$
$$L(x, p) = A(x)\,p^2 + B(x)\,p + C(x) - \rho(x)\,\sigma^2 I.$$

L'équation caractéristique est $\det L(x, p) = 0$ et ses racines sont égales à

$$p_{1,2}^2 = -1 + \frac{\rho\sigma^2}{\mu}, \quad p_{3,4}^2 = -1 + \frac{\rho\sigma^2}{\lambda + 2\mu}. \tag{15}$$

Les vecteurs propres du faisceau $L(x, p)$ sont égaux à

$$f = (1, -p)^T, \quad f^* = (1, -p),$$

où $p(x)$ est une racine de l'équation caractéristique. La condition de solubilité de la deuxième équation est:

$$e_0^*\,(2pAe_0' + p'Ae_0 + Be_0' + pA'e_0 + De_0) = 0.$$

En faisant $e_0(x) = \alpha(x)\,f(x)$ dans cette identité, on trouve

$$\alpha(x) = \frac{c}{\sqrt{\mu p\,(p^2+1)}}.$$

Le système (8) admet une solution asymptotique formelle de la forme

$$\begin{aligned} v_j(x, k) &= \frac{1}{\sqrt{p_j(x)}}\exp\left\{\pm k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p_j(t)}\,dt\right\}[(1, -p_j(x))^T + O(k^{-1})], \\ &\qquad\qquad j = 1, 2, \\ v_j(x, k) &= \sqrt{\frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\mu(x)\,p_j(x)}}\exp\left\{\pm k\int_{x_0}^{x}\sqrt{p_j(t)}\,dt\right\}\times \\ &\qquad \times [(1, -p_j(x))^T + O(k^{-1})], \quad j = 3, 4 \end{aligned} \tag{16}$$

Supposons que $\lambda(x) > 0$, $\mu(x) > 0$, $\rho(x) > 0$ pour $x \in I$ et soit remplie l'une des conditions

$$\rho(x)\,\sigma^2 < \mu(x), \quad \rho(x)\,\sigma^2 > \lambda(x) + 2\mu(x), \quad x \in I.$$

Le système (8) ne possède pas alors de point de retour pour $x \in I$ et il existe un système fondamental de solutions $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ pour lequel est valable le développement asymptotique (16) uniforme en $x \in I$ lorsque $k \to +\infty$. La représentation asymptotique des solutions du système (8) avec des points de retour est étudiée dans [40].

4. Système de Stueckelberg à points de retour. Le système (1) se présente lorsqu'on étudie les chocs non élastiques de deux atomes [121] de masses M_1 et M_2, distants de r fini, sur le demi-axe $]0, \infty[$. Ses coefficients sont de la forme

$$\varphi_j = [\varepsilon - V_j(r)]\, 2m - \frac{h^2 l(l+1)}{r^2}, \quad \alpha = 2mV_{12}(r), \quad M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

où $\varepsilon > 0$, $V_j(r)$ sont les termes énergétiques des états électroniques, $V_{12}(r)$ l'élément matriciel d'interaction des états électroniques,

$$V_1(\infty) = 0, \quad V_2(\infty) = \Delta\varepsilon, \quad 0 < \Delta\varepsilon < \varepsilon, \quad V_{12}(\infty) = 0.$$

Les conditions aux limites sont :

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(r) = \eta_l e^{ik_2 r} + o(1),$$
$$u_1(r) = \alpha_l e^{ik_1 r} - e^{-ik_1 r} + o(1), \quad r \to \infty,$$
$$k_1 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{h}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(\varepsilon - \Delta\varepsilon)}}{h}.$$

Supposons que les fonctions $V_1(r)$ et $V_2(r)$ sont de la forme représentée sur la figure 26 ; le système (1) admet alors deux points de re-

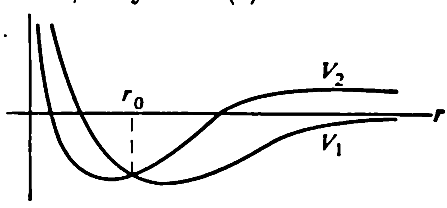


Fig. 26

tour réels $r_1 < r_2$, $\varphi_j(r_j) = 0$. Si la fonction $V_{12}(r)$ est petite, et les coefficients du système (1), holomorphes au voisinage du demi-axe $r > 0$, il existe deux points de retour complexes proches du point r_0. Les formules de raccordement ont été établies pour ce cas dans [121] et utilisées à maintes reprises sans la moindre analyse. Ces formules n'ont pas été encore rigoureusement prouvées. On expose plus bas des méthodes permettant d'établir certaines formules de raccordement.

Si $I = [a, b]$, les fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ et $\alpha(z)$ sont holomorphes dans un domaine U du plan de z complexe contenant I et

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)>0, \quad 4\varphi_1(x)\varphi_2(x)>\alpha^2(x), \quad \alpha(x)>0, \quad x\in I.$$

Alors $p_1(x)>p_2(x)>0$ pour $x\in I$ et le système (1) n'a pas de points de retour réels. Considérons les branches des racines $\sqrt{p_1(x)}$, $\sqrt{p_2(x)}$ et $\sqrt{D(x)}$ qui sont strictement positives pour $x\in I$. Supposons qu'il existe un seul point $x_0\in I$, $a<x_0<b$, tel que $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$ et que

$$\varphi_1'(x_0)\neq\varphi_2'(x_0), \quad \varphi_1(x)>\varphi_2(x), \quad x\in I, \tag{17}$$
$$\alpha(x)=\delta\tilde{\alpha}(x), \quad \delta>0,$$

où δ est un petit paramètre indépendant de h. Pour $\delta=0$ le point x_0 est un point de retour du système (1), pour les petits $\delta>0$ il existe deux points de retour complexes voisins z_0, $\bar{z}_0$,

$$z_0(\delta)=\frac{\delta i\psi(x_0)}{\varphi_1'(x_0)-\varphi_2'(x_0)}+O(\delta^2).$$

Supposons que $\varepsilon>0$ est fixe et indépendant de h et δ : le système (1) admet un système fondamental de solutions $\{u_1^{\pm}, u_2^{\pm}\}$ justiciable du développement asymptotique (4) pour $h\to 0$, $a\leqslant x\leqslant x_0-\varepsilon$, et un système fondamental $\{v_1^{\pm}, v_2^{\pm}\}$ justiciable du développement asymptotique (4) lorsque $h\to 0$, $x_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant b$. Le développement (4) n'est généralement pas valable au voisinage du point x_0. On demande d'exprimer un système fondamental en fonction de l'autre. On peut le faire après avoir déterminé les domaines de validité du développement (4) pour les diverses solutions. Ce problème est identique à celui envisagé au chap. III, § 8, nº 7.

4.1. *La solution* u_1^+. Supposons que $\delta>0$ est fixé. Le point z_0 est alors la confluence de deux points de retour simples, puisque $p_1(z_0)=p_2(z_0)\neq 0$. Du point z_0 sont issues trois lignes de Stokes l_1, l_2 et l_3 définies par l'équation

$$\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z}\left(\sqrt{p_1(t)}-\sqrt{p_2(t)}\right)dt=0,$$

du point $\bar{z}_0$ sont issues les lignes de Stokes l_1^*, l_2^* et l_3^*.

Pour les petits $|z-z_0|$ on a

$$\sqrt{p_1(z)}-\sqrt{p_2(z)}=\frac{2\sqrt{D(z)}}{\sqrt{\varphi(z)+\sqrt{D(z)}}+\sqrt{\varphi(z)-\sqrt{D(z)}}}\sim$$
$$\sim\sqrt{\frac{2i\alpha(x_0)\left(\varphi_1'(x_0)-\varphi_2'(x_0)\right)}{\varphi(x_0)}}\sqrt{z-z_0}, \tag{18}$$

de sorte que l'une des lignes de Stokes (désignons-la par l_2) touche l'axe imaginaire au point z_0, $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_0$ pour $z \in l_2$. Appelons l_1 la ligne de Stokes sur laquelle $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0$. Il existe par ailleurs une ligne l reliant les points z_0, $\bar{z}_0$, $l = l^*$, sur laquelle

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)})\, dt = 0.$$

La structure locale des lignes de Stokes est la même que pour l'équation $h^2 w'' + D(z) w = 0$.

Trouvons un domaine 1-admissible D_1^+ (§ 4): il existe des chemins canoniques γ_{1k}, $1 \leqslant k \leqslant 4$, reliant tout point $z \in D_1^+$ aux points z_{1k}. Le chemin γ_{11} est arbitraire et les fonctions

$$\operatorname{Re}\left[i \int_{z_{12}}^{\zeta} (\sqrt{p_2(t)} - \sqrt{p_1(t)})\, dt\right], \quad \operatorname{Re}\left[-i \int_{z_{13}}^{\zeta} \sqrt{p_1(t)}\, dt\right],$$

$$\operatorname{Re}\left[-i \int_{z_{14}}^{\zeta} (\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)})\, dt\right]$$

décroissent lorsque ζ se déplace le long du chemin canonique γ_{1k} du point z_{1k} vers le point z.

Supposons que D est un rectangle $a_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b_1$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant c$, contenant l'intervalle I et les points z_0, $\bar{z}_0$, que $c > 0$ est assez petit, en sorte que les coefficients du système (1) sont holomorphes dans D, et posons $\tilde{D}_1 = D \diagdown (l_3 \cup l_2^*)$. Choisissons les points a_1 et b_1 proches de a et b et posons $z_{12} = a_1 + ic$. Il existe alors un chemin canonique γ_{12} contenu dans $\tilde{D}_1$ qui relie tout point $z \in \tilde{D}_1$ au point z_{12} (chap. III, § 8, n° 8).

Construisons le chemin canonique $\gamma_{13}(z)$. Comme $p_1(x) > 0$ pour $x \in I$ et $\delta > 0$ est petit, les lignes de niveau $\operatorname{Re} S_1(z) = \text{const}$ contenues dans D et ne passant pas par les points z_0 et $\bar{z}_0$ sont des courbes régulières voisines des segments $\operatorname{Re} z = \text{const}$. La fonction $-iS_1(0, z)$ applique bijectivement le domaine $\tilde{D}$ sur un domaine U du plan de z complexe voisin d'un rectangle Π d'axes parallèles aux axes de coordonnées, muni de deux coupures L_3 et L_2^*. Ici L_3 et L_2^* sont les images des coupures l_3 et l_2^*, images qui diffèrent peu respectivement des segments $\operatorname{Im} S = \text{const}$ et $\operatorname{Re} S = \text{const}$. Posons $z_{13} = \bar{z}_{12}$, $A = -iS_1(0, z_{13})$. Si l'on retire du domaine U les points en lesquels $\operatorname{Re} S_1 < \operatorname{Re} A$ et éventuellement le demi-voisinage de droite de la coupure L_3, tout point z de la contre-image $\tilde{D}_1$ de ce domaine peut être relié au point z_3 par le chemin canonique $\gamma_{13}(z)$.

On construit de la même façon les chemins canoniques $\gamma_{14}(z)$ d'origine z_{13}.

Il existe donc un domaine $D_1^+ \supset (I \cup z_0 \cup \bar{z}_0)$ dans lequel est valable le développement asymptotique (4) et ce domaine diffère peu du domaine $\tilde{D}_1$.

4.2. *Les solutions u_1^-, u_2^+ et u_2^-.* Construisons les chemins canoniques $\gamma_{2j}(z)$, $j = 1, 3, 4$, le long desquels les fonctions

$$\operatorname{Re}\left[i \int_{z_{21}}^{\zeta} (\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)})\, dt \right], \quad \operatorname{Re}\left[-i \int_{z_{23}}^{\zeta} (\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)}) dt \right],$$

$$\operatorname{Re}\left[-i \int_{z_{24}}^{\zeta} \sqrt{p_1(t)}\, dt \right]$$

décroissent. Soient D le domaine du n° 4.1, $\tilde{D}_2 = D \setminus (l_2 \cup l_3^*)$. Les raisonnements du n° 2.1 montrent que le développement asymptotique (4) est valable pour la solution u_2^+ dans le domaine $D_2^+ \supset (I \cup z_0 \cup \bar{z}_0)$ qui diffère peu du domaine $\tilde{D}_2$. Posons

$$u_1^-(z, h) = \overline{u_1^+(\bar{z}, h)}, \quad u_2^-(z, h) = \overline{u_2^+(\bar{z}, h)} ;$$

les développements asymptotiques des solutions u_1^- et u_2^- sont valables respectivement dans les domaines $(D_1^+)^*$ et $(D_2^+)^*$. En particulier, les développements asymptotiques des solutions $u_{1,2}^{\pm}$ sont valables sur l'intervalle $[a, x_0 - \varepsilon]$.

4.3. *Les solutions $v_j^{\pm}$.* Soit D le domaine du n° 4.1, $\tilde{D} = D \setminus (l_1 \cup l_2^*)$, $z_2 = b_1 + ic$. Tout point $z \in \tilde{D}$ peut alors être relié à z_2 par un chemin canonique $\gamma_{12}(z)$ le long duquel la fonction $\operatorname{Re}[i(S_2(0, z) - S_1(0, z))]$ décroît. Comme au n° 4.1, on démontre que le développement asymptotique (4) est valable pour la solution v_1^+ dans un domaine D_1^+ différant peu du domaine $\tilde{D}_1$. Soit $\tilde{D}_3 = D \setminus (l_2 \cup l_1^*)$; le développement asymptotique (4) est valable pour la solution v_2^+ dans un domaine D_2^+ proche de $\tilde{D}_2$. Posons

$$v_1^-(z, h) = \overline{v_1^+(\bar{z}, h)}, \quad v_2^-(z, h) = \overline{v_2^+(\bar{z}, h)}.$$

4.4. *Formules de raccordement.* On a

$$\begin{aligned} v_1^+ &= A_1^+ u_1^+ + A_2^+ u_2^+ + A_1^- u_1^- + A_2^- u_2^-, \\ v_2^+ &= B_1^+ u_1^+ + B_2^+ u_2^+ + B_1^- u_1^- + B_2^- u_2^-, \end{aligned} \tag{19}$$

où $A_j^{\mp}$ et $B_j^{\mp}$ dépendent seulement de h. De par le choix des solutions, on a

$$\begin{aligned} v_1^- &= \overline{A_1^-}u_1^+ + \overline{A_2^-}u_2^+ + \overline{A_1^+}u_1^- + \overline{A_2^+}u_2^-, \\ v_2^- &= \overline{B_2^-}u_1^+ + \overline{B_2^-}u_2^+ + \overline{B_1^+}u_1^- + \overline{B_2^+}u_2^-. \end{aligned} \tag{20}$$

On demande de trouver la représentation asymptotique des coefficients $A_j^{\mp}$ et $B_j^{\mp}$ lorsque $h \to 0$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, où $\delta_0 > 0$ est assez petit, mais ne dépend pas de h.

Des nos 4.1 à 4.3 il s'ensuit que les développements asymptotiques (4) sont valables pour les solutions v_1^+ et $u_{1,2}^{\pm}$ aux points d'un domaine borné par les lignes de Stokes l_1 et l_2. Fixons un tel point $\tilde{z}$ et posons $z = \tilde{z}$ dans les identités

$$\begin{aligned} v_1^+ &= A_1^+u_1^+ + A_2^+u_2^+ + A_1^-u_1^- + A_2^-u_2^-), \\ \frac{d}{dz}v_1^+ &= \frac{d}{dz}(A_1^+u_1^+ + A_2^+u_2^+ + A_1^-u_1^- + A_2^-u_2^-; \end{aligned} \tag{21}$$

alors $A_1^- = \Delta_1^-/\Delta$, où Δ est le déterminant du système, Δ_1^- le déterminant déduit de Δ par substitution de la colonne $(v_1^+, (v_1^+)')^T$ à la troisième. Les branches des racines figurant dans la formule (4) des développements asymptotiques des solutions $u_j^{\mp}$ sont strictement positives pour $z \in I$; quant aux valeurs au point $\tilde{z}$, on les obtient par prolongement analytique le long de l'intervalle $\gamma_1 = [x_0, \tilde{z}]$. Donc $\Delta = 16 + O(h)$.

Les branches des racines figurant dans la formule (4) du développement asymptotique de la solution v_1^+ sont acquises par prolongement analytique le long du chemin γ_2 qui relie les points x_0 et $\tilde{z}$ et passe à droite du point de retour. Comme $\delta > 0$ est petit, on a

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} \sqrt{p_j(z)}\, dz > 0, \qquad j = 1, 2, \\ &\operatorname{Im} \int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)}\, dz > 0, \end{aligned} \tag{22}$$

de sorte que les solutions v_1^+, u_1^+ et u_2^+ décroissent exponentiellement, les solutions u_1^- et u_2^- croissent exponentiellement au point $\tilde{z}$,

$$A_1^- = \exp\left\{\frac{i}{h}\left(\int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)}\, dz + \int_{\gamma_1} \sqrt{p_1(z)}\, dz\right)\right\} O(1)$$

et par suite

$$A_1^- = O(e^{-\xi/h}), \quad \xi > 0, \quad \xi = \operatorname{Im} \int_0^z \sqrt{\varphi(t)}\, dt + O(\delta). \tag{23}$$

On établit de façon analogue que $A_2^- = O(e^{-\xi/h})$.

Par ailleurs, de par le choix des branches des racines, on a

$$\int_{\gamma_2} \sqrt{p_1(z)}\, dz - \int_{\gamma_1} \sqrt{p_1(z)}\, dz = A, \qquad \operatorname{Im} A < 0,$$

de sorte que $A_1^- = O(e^{a/h})$. Le second membre de cette formule croît exponentiellement lorsque $h \to 0$, donc la représentation asymptotique du coefficient A_1^+ reste indéfinie. Trouvons la représentation asymptotique de $A_2^+ = \Delta_2^+/\Delta$, où le déterminant Δ_2^+ se déduit de Δ par substitution de la colonne $(u_2^+, (u_2^+)')^T$ à la deuxième. Faisons une coupure le long du segment l passant par les points z_0 et $\tilde{z}$ jusqu'à la frontière du domaine D. Les branches de la fonction $\sqrt{D(z)}$ diffèrent sur les lèvres de la coupure du facteur -1, de sorte que $p_1(z)|_{l_+} = p_2(z)|_{l_-}$, où l_+ et l_- sont les lèvres droite et gauche de la coupure. Donc

$$\int_0^{\tilde{z}} \sqrt{p_1(t)}\, dt - \int_0^{\tilde{z}} \sqrt{p_1(t)}\, dt = \int_0^{z_0} \left(\sqrt{p_1(t)} - \sqrt{p_2(t)}\right) dt = \eta, \quad \operatorname{Im} \eta > 0,$$

où les intégrales sont prises sur les chemins γ_1 et γ_2 et

$$v_1^+(\tilde{z}, h) = e^{i\eta/h} u_1^+(\tilde{z}, h)\,[1 + O(h)].$$

D'où l'on déduit

$$A_2^+ = e^{i\eta/h}\,[1 + O(h)]. \tag{24}$$

Les coefficients A_1^- et A_2^- sont donc exponentiellement petits, la représentation asymptotique du coefficient A_2^+ est donnée par la formule (24) et A_1^+ reste à déterminer. On démontre de façon analogue que

$$B_1^+ = e^{-2i\eta/h}\,[1 + O(h)], \qquad B_{1,2}^- = O(e^{-\xi/h}),$$

le coefficient B_2^+ restant indéterminé. Pour déterminer les coefficients A_1^+ et B_2^+ on peut se servir de l'identité : si u et v sont solutions du système (1), alors

$$v^T u' - u^T v' \equiv \text{const.}$$

On a, en particulier, la formule

$$|A_1^+|^2 (1 + \varepsilon_1) + |A_2^+|^2 (1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 \operatorname{Im}(\overline{A_1^+} A_2^+) = 1 + \varepsilon_4, \qquad \varepsilon_j = O(h),$$

on obtient une identité analogue pour les coefficients B_1^+ et B_2^+:

DÉFORMATIONS ISOMONODROMES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Systèmes d'équations

1. Introduction. Considérons le système de n équations

$$\frac{dw}{dz} = A(z, t)\, w, \tag{1}$$

où $t = (t_1, \ldots, t_m)$ sont des paramètres complexes situés dans un voisinage U du point $t = 0$. Partout dans la suite on admettra que U est un domaine assez petit.

Le système (1) s'appelle *déformé* du système $w' = A(z, 0)\, w$. Supposons que tous les éléments de la matrice A sont des fonctions rationnelles de z pour tout $t \in U$, de sorte que le système (1) présente des points singuliers qui dépendent en général de t. Le groupe de monodromie $G(t)$ du système (1) dépend aussi de t. Par abus de langage on dit qu'une déformation est *isomonodrome* ou est une *isomonodromie* si le système (1) possède une matrice fondamentale telle que le groupe de monodromie qui lui est associé est indépendant de t pour $t \in U$. Cette définition devra être précisée si parmi les points singuliers du système (1) il en est qui sont irréguliers.

Si le déformé (1) est isomonodrome, les éléments de la matrice A doivent nécessairement vérifier un système d'équations aux dérivées partielles. Le premier exemple de cette nature fut envisagé par R. Fuchs [69] en 1907 (cf. § 2, n° 3). Les déformés isomonodromes de systèmes d'équations furent étudiés au début du siècle par Schlezinger [114] et Garnier [70]. Puis ils furent délaissés pendant environ 60 ans. Et ce n'est qu'au cours des 10-15 dernières années qu'ils furent remis à l'honneur grâce à la découverte de leurs liens avec des équations intégrables de physique mathématique (équations de Korteweg-de Vries, sin-Gordon etc.) et la théorie quantique du champ [31]. Les recherches les plus intenses sont menées au Japon ; signalons tout particulièrement le travail d'Ueno [123].

2. Points singuliers réguliers. Isomonodromie locale. Mettons le système (1) sous la forme

$$Lw = 0, \quad L = \frac{d}{dz} - A(z, t). \tag{2}$$

Soient D un domaine simplement connexe du plan de la variable complexe z et

$$A(z, t) = \frac{B(z, t)}{z - a(t)}, \tag{3}$$

où la matrice $B(z, t)$ et la fonction $a(t)$ sont holomorphes dans $D \times U$ et U respectivement et le point $z = a(t)$ est contenu dans D pour tous les $t \in U$, $B(a(t), t) \neq 0$. Le point $z = a(t)$ est un point singulier régulier du système (2). Le domaine U étant petit, on peut admettre que $a(t)$ appartient à un domaine D_0 dont l'adhérence est contenue dans D. Fixons un point $b \notin D_0$. Soit γ une courbe fermée simple orientée dans le sens positif, d'origine et d'extrémité en b et supposons que D_0 se trouve à l'intérieur de γ. Désignons par $\hat{\gamma}$ l'opérateur de prolongement analytique le long de γ.

On dit que le déformé (2) est *isomonodrome* dans D s'il existe une matrice fondamentale $W(z, t)$ telle que

$$\hat{\gamma} W(z, t) = W(z, t) C, \tag{4}$$

où la $(n \times n)$-matrice C est indépendante de t pour $t \in U$. Appelons cette matrice fondamentale *canonique*. A cette matrice canonique est associé un groupe de monodromie G à une génératrice C. Toute autre matrice fondamentale est de la forme

$$\tilde{W}(z, t) = W(z, t) T(t), \tag{5}$$

où $T(t)$ est une $(n \times n)$-matrice régulière. On a

$$\hat{\gamma}\tilde{W} = \hat{\gamma}(WT) = WCT = \tilde{W} \cdot T^{-1}CT,$$

de sorte qu'à la matrice fondamentale $\tilde{W}$ est associé le groupe de monodromie $G(t) = T^{-1}(t) CT(t)$ semblable au groupe G.

Soit d un opérateur de différentiation extérieure par rapport aux variables $t_1, \ldots, t_m$, de sorte que $dW = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial t_j} dt_j$. Ceci étant,

$$dt_j \wedge dt_k = -dt_k \wedge dt_j, \quad d^2 = 0.$$

Considérons la 1-forme différentielle

$$\Omega(z, t) = dW(z, t) \cdot W^{-1}(z, t), \tag{6}$$

où W est une $(n \times n)$-matrice.

Théorème 1. *Le déformé* (2) *est isomonodrome dans le domaine D si et seulement si le système* (2) *admet une matrice fondamentale $W(z, t)$ telle que la forme Ω soit univoque dans $D \setminus a$.*

En effet, si W est canonique, on a

$$\hat{\gamma}\Omega = dWC \cdot C^{-1}W^{-1} = \Omega,$$

et la forme Ω est univoque dans $D \setminus a$. Supposons qu'il existe une matrice fondamentale W telle que la forme Ω soit univoque dans $D \setminus a$. Alors

$$\hat{\gamma}W = WC(t), \quad \hat{\gamma}\Omega - \Omega = W\, dC \cdot C^{-1}W^{-1} = 0,$$

de sorte que $dC = 0$ et par suite la matrice C est indépendante de t.

On remarquera que si W est une matrice fondamentale canonique et C_0 une matrice constante, WC_0 est une matrice fondamentale canonique.

Etudions les propriétés analytiques de la forme Ω. Le système (2) admet une matrice fondamentale canonique de la forme

$$W^0(z, t) = \hat{W}(z, t)\,(z - a(t))^{M(t)}, \tag{7}$$

où $\hat{W}(z, t)$ est une matrice holomorphe et régulière dans $D \times U$, $\hat{W}(a, t) \equiv I$, $M(t)$ une matrice holomorphe dans U (cf. [4], [15]). On a

$$\hat{\gamma}W^0 = W^0 e^{2\pi i M(t)}.$$

Par ailleurs, $W^0 = WT(t)$, où W est une matrice fondamentale canonique, de sorte que $\hat{\gamma}W^0 = W^0T^{-1}CT$. Donc $e^{2\pi i M(t)} = T^{-1}(t)\, CT(t)$ et par suite

$$M(t) = T^{-1}(t)\, M_0 T(t),$$

où la matrice M_0 est indépendante de t. La matrice fondamentale $W = W^0T^{-1}$ est canonique et est de la forme

$$W(z, t) = \tilde{W}(z, t)\,(z - a(t))^{M_0}, \tag{8}$$

où $\tilde{W}(a, t) = T^{-1}(t)$. On a

$$dW \cdot W^{-1} = -\frac{1}{z-a}\,\tilde{W}M_0\, da\tilde{W} + d\tilde{W} \cdot \tilde{W}^{-1}.$$

Donc, si W est de la forme (8), la forme Ω présente un pôle simple au point $z = a(t)$ de résidu

$$\operatorname*{res}_{z=a} \Omega = -M(t)\, da \tag{9}$$

Nous avons pris en considération le lien entre $M(t)$ et M_0. Toute autre matrice fondamentale canonique est égale à WC_0, où C_0 est une matrice constante, le résidu (9) restant invariant. Supposons remplie la condition:

1.1. *Aucune différence des valeurs propres de la matrice B $(a(t), t)$ n'est entière.*

Il existe alors (cf. [4], [15]) une matrice fondamentale canonique de la forme

$$W^0(z, t) = \hat{W}(z, t)(z-a)^{B(a, t)}, \quad \hat{W}(a, t) = I, \tag{10}$$

et dans ce cas

$$\operatorname*{res}_{z=a} \Omega = -B(a, t)\, da. \tag{11}$$

Si $z = \infty$ est un point singulier régulier du système (2), alors

$$A(z, t) = z^{-1}B(z, t),$$

où $B(\infty, t) \neq 0$, la matrice $B(z, t)$ est holomorphe dans $D \times U$, D étant un voisinage de $z = \infty$. Il existe dans ce cas une matrice fondamentale canonique de la forme

$$W^0(z, t) = \hat{W}(z, t)\, z^{M(t)}, \quad \hat{W}(\infty, 0) = I, \tag{12}$$

où $\hat{W}(z, t)$ et $M(t)$ sont des matrices holomorphes respectivement dans $D \times U$ et U. Le théorème 1 reste en vigueur. Toute matrice fondamentale canonique est de la forme

$$W(z, t) = \tilde{W}(z, t)\, z^{M_0},$$

où $\tilde{W}$ est une matrice holomorphe et régulière dans $D \times U$, à la multiplication à droite près par une matrice constante C_0. Si W est une matrice fondamentale canonique, la forme Ω est holomorphe dans D:

$$\Omega = d\tilde{W} \cdot \tilde{W}^{-1}.$$

Supposons que Ω est de la forme (6), où W est une matrice fondamentale canonique. On a alors les identités

$$dL = [\Omega, L], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega, \tag{13}$$

où $[\Omega, L] = \Omega L - L\Omega$. On remarquera que $d\left(\frac{d}{dz}\right) = 0$ (l'opérateur d agit sur les fonctions de t) et que $\Omega \frac{d}{dz} = 0$ (la forme Ω agit sur les fonctions de t), de sorte que $[\Omega, L] = [A, \Omega] - \frac{d\Omega}{dz}$. On a

$$\frac{d\Omega}{dz} = d\left(\frac{dW}{dz}\right) W^{-1} + dW \frac{dW^{-1}}{dz} = d(AW) \cdot W^{-1} - dWW^{-1}AWW^{-1} =$$
$$= dA + A\Omega - \Omega A, \quad dL = -dA,$$

ce qui prouve la première relation (13). On sait [32] que si ω est une forme différentielle de degré k, alors

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Donc

$$d\Omega = -dW \wedge dW^{-1} = dW \wedge W^{-1} dWW^{-1} = \Omega \wedge \Omega.$$

Les relations (13) sont les conditions d'intégrabilité complète du système de Pfaff

$$LW = 0, \quad dW = \Omega W. \tag{14}$$

On appelle *système de Pfaff* un système d'équations de la forme

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = 0, \quad k < n, \tag{15}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, ω_j sont des 1-formes différentielles. En coordonnées, le système (15) s'écrit

$$\sum_{m=1}^{n} \omega_{jm}(x)\, dx_m = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

Le rang r de la matrice $(\omega_{jm}(x))$ s'appelle *rang* du système (15) au point x. On dit qu'une variété $M^l \subset \mathbf{R}^n$ est une *variété intégrale* du système (15) si les identités (15) sont satisfaites sur M^l. On dit qu'un système de Pfaff est *complètement intégrable* si par chaque point x du domaine donné de $\mathbf{R}^n$ il passe une et une seule variété intégrale de dimension maximale $n - r$. Le théorème suivant est local : on admet que le système (15) est traité dans un petit domaine de $\mathbf{R}^n$.

Théorème de Frobenius [3, 29]. *Pour que le système de Pfaff* (15) *soit complètement intégrable il est nécessaire et suffisant que soient réalisées les identités*

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Ce théorème est valable aussi pour $x \in \mathbf{C}^n$.

Revenons au système (14). On peut le mettre sous la forme

$$\frac{\partial W}{\partial z} = AW, \quad \frac{\partial W}{\partial t_j} = \Omega_j W, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Ce système est redondant : nous disposons de $m + 1$ équations pour une seule fonction matricielle W. La condition de compatibilité du système est la condition de son intégrabilité complète.

Le système (14) se résout de façon élémentaire. Pour qu'il soit compatible, il est nécessaire et suffisant que soient satisfaites les identités

$$d\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{d}{dz}(dW), \quad d^2W = 0$$

En appliquant l'opérateur d à la première des équations (14) et l'opérateur d/dz à la seconde, on obtient

$$d(AW)=\frac{d}{dz}(\Omega W),$$

$$dA\cdot W+A\,dW=(d\dot{A}+A\Omega)\,W=\left(\frac{d\Omega}{dz}+\Omega A\right)W,$$

d'où résulte la première relation (13). La deuxième relation découle des identités

$$0=d^2W=d(\Omega W)=d\Omega\cdot W-\Omega\wedge\Omega W.$$

Théorème 2. *Supposons que la condition* 1.1 *est satisfaite. Pour que le déformé* (2) *soit isomonodrome dans le domaine D, il est nécessaire et suffisant qu'existe une* 1*-forme $\Omega(z, t)$ holomorphe pour $z \in D\setminus a$, $t \in U$, et vérifiant les relations* (13).

La nécessité a déjà été prouvée. Démontrons la suffisance. Supposons qu'une telle forme Ω existe et soit W une matrice fondamentale quelconque du système (2). Comme

$$d(LW)=0,\quad LW=0,\quad dL=\Omega L-L\Omega,$$

il vient

$$L\Phi=0,\qquad \Phi=dW-\Omega W$$

Donc $\Phi = W\Omega_0(t)$, où Ω_0 est une 1-forme différentielle dont les coefficients sont indépendants de z. On a

$$\hat{\gamma}W=WC(t),\qquad \hat{\gamma}\Phi=\Phi C+W\,dC=WC\Omega_0,$$
$$\Phi C=W(C\Omega_0-dC)=W\Omega_0 C$$

et par suite

$$dC=[C,\ \Omega_0].$$

Remarquons que la condition 1.1 n'est encore pas intervenue. Si elle est satisfaite, la matrice $B(a, t)$ est diagonalisable dans le domaine D:

$$T^{-1}(t)\,B(a,\ t)\,T(t)=\Lambda(t)=\operatorname{diag}(\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t)).$$

Prenons pour W une matrice fondamentale de la forme (7), où $M(t) = \Lambda(t)$. On obtient alors

$$2\pi i e^{2\pi i\Lambda}d\Lambda=[e^{2\pi i\Lambda},\ \Omega_0].$$

On a $\Omega_0(t)=\sum_{j=1}^{m}\Omega_{0j}(t)\,dt_j$. La matrice $\Lambda(t)$ étant diagonale, les éléments diagonaux des matrices $[e^{2\pi i\Lambda},\ \Omega_{0j}]$ sont tous nuls, de sorte que $d\Lambda=0$, Λ ne dépend pas de t, C_0 de t, et le déformé (2) est isomonodrome.

2. Systèmes de classe de Fuchs. Isomonodromie globale. Considérons le système de classe de Fuchs

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)}{z - a_j(t)} w. \tag{17}$$

Les matrices $A_j(t)$ et les fonctions $a_j(t)$ sont holomorphes pour $t \in U$ et $a_j(t) \neq a_l(t)$ pour $j \neq l$, $t \in U$. Le système (17) possède des points singuliers réguliers $a_1(t), \ldots, a_k(t)$ ($z = a_j(t_0)$ est point singulier si $A_j(t_0) \neq 0$). Le point $z = \infty$ est singulier régulier pour t donné si

$$\sum_{j=1}^{k} A_j(t) \neq 0 \tag{18}$$

et non singulier dans le cas contraire.

On admettra que pour $t \in U$ chaque point $z = a_j(t)$ est situé dans un domaine D_j du plan de z complexe et que les adhérences de ces domaines ne s'intersectent pas. Soit b un point n'appartenant pas à la réunion des adhérences de ces domaines. Soit γ_j une courbe fermée simple orientée dans le sens positif, d'origine et d'extrémité b, et telle que pour $t \in U$ le point $z = a_j(t)$ est situé dans son intérieur et les autres points singuliers dans son extérieur. Appelons $\hat{\gamma}_j$ l'opérateur de prolongement analytique le long de γ_j.

On dit que le déformé de (17) est *isomonodrome* s'il existe une matrice fondamentale $W(z, t)$ du système (17) telle que

$$\hat{\gamma}_j W = W C_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{19}$$

les matrices C_j sont indépendantes de t. Une telle matrice fondamentale sera dite *canonique*.

Supposons que la condition 1.1 est satisfaite pour tous les points singuliers du système (17). La forme (6), où W est une matrice fondamentale canonique, présente alors des pôles simples aux points $a_1, \ldots, a_k$, est holomorphe au point $z = \infty$ et ne possède pas d'autres singularités. D'après le théorème de Liouville, la forme

$$\Omega_0(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)\, da_j}{z - a_j}$$

est indépendante de z, de sorte que

$$\Omega(z, t) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)\, da_j}{z - a_j} + \Omega_0(t), \tag{20}$$

où la forme Ω_0 ne dépend que de t. On obtient le système déformé isomonodrome en portant (20) dans (13). Les équations de ce système

renfermeront la forme inconnue $\Omega_0(t)$. Exigeons que $\Omega(z, \infty) = 0$. On trouve alors que $\Omega_0(t) = 0$ et la forme Ω devient

$$\Omega(z, t) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)\, da_j}{z - a_j}. \tag{21}$$

On peut le faire de deux manières. Soit admettre, suivant Schlesinger, que $z = \infty$ est un point non singulier — le premier membre de (18) sera alors identiquement nul — et que la matrice fondamentale canonique est normalisée par la condition : $W(\infty, t)$ est indépendante de t. Soit admettre que la matrice fondamentale canonique est au voisinage du point $z = \infty$ de la forme $W = \hat{W}(z, t)\, z^A$, où $\hat{W}(\infty, t)$ est indépendante de t. Déterminons le système isomonodrome déformé dans le cas où Ω est de la forme (21). L'identité $dL = [\Omega, L]$ (cf. (13)) devient

$$\frac{d\Omega}{dz} - dA = A\Omega - \Omega A.$$

On a

$$\frac{d\Omega}{dz} - dA = -\sum_{j=1}^{k} \frac{dA_j}{z - a_j},$$

$$A\Omega - \Omega A = \sum_{j,\, l=1}^{k} \frac{-A_j A_l da_l + A_l A_j da_l}{(z - a_j)(z - a_l)} =$$

$$= \sum_{j \neq l} \frac{-A_j A_l da_l + A_l A_j da_l}{a_j - a_l} \left(\frac{1}{z - a_j} - \frac{1}{z - a_l} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{j \neq k} \frac{[A_k, A_j](da_k - da_j)}{a_j - a_k}$$

et finalement

$$dA_j = \sum_{l \neq j} \frac{[A_l, A_j]}{a_l - a_j} d(a_l - a_j), \tag{22}$$

$$[A_l, A_j] = -[A_j, A_l],$$

où $[A_l, A_j] = [A_l A_j - A_j A_l]$. Le système isomonodrome peut également s'écrire

$$dA_j = \sum_{l \neq j} [A_l, A_j]\, d \ln (a_l - a_j). \tag{23}$$

Ce système est complètement intégrable. Si l'on admet que $a_1, \ldots, a_k$ sont des variables indépendantes, on obtient ce système sous la forme de Schlesinger

$$\frac{\partial A_j}{\partial a_k} = \frac{[A_j, A_l]}{a_j - a_l}, \quad \frac{\partial A_j}{\partial a_j} = -\sum_{l \neq j} \frac{[A_j, A_l]}{a_j - a_l}. \tag{24}$$

On rappelle que les valeurs propres des matrices $A_j(t)$ sont indépendantes de t.

Supposons que la matrice fondamentale canonique est normalisée par la condition $W(z_0, t) = I$ et prenons pour variables indépendantes les points $a_1, \ldots, a_k, z_0$. Au système (24) s'ajoute alors le système

$$\frac{\partial A_j}{\partial z_0} = \sum_{l \neq j} \frac{[A_j, A_l]}{z_0 - a_l}.$$

3. Monodromie locale au voisinage d'un point singulier irrégulier. Considérons le système

$$\frac{dw}{dz} = A(z, t)\, w, \tag{25}$$

où la série $A = \sum_{j=-\infty}^{r-1} A_j(t) z^j$ converge pour $|z| > R$, $t \in U$ et $r \geqslant 1$, $A_{r-1}(0) \neq 0$. Supposons satisfaite la condition:

1.2. *Les valeurs propres* $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ *de la matrice* $A_{r-1}(t)$ *sont distinctes pour* $t \in U$.

Alors $z = \infty$ est un point singulier irrégulier du système (25) et il existe une matrice $T(t)$ holomorphe et inversible pour $t \in U$ telle que

$$T^{-1} A_{r-1} T = \Lambda(t) \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)).$$

Voici quelques généralités sur la représentation asymptotique des solutions du système (25) lorsque $z \to \infty$. Ce système admet une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{W}_1(z, t) = \hat{W}(z, t)\, z^{D(t)} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{r} D_j(t) z^j \right\}, \tag{26}$$

où $D(t)$ et $D_j(t)$ sont des matrices diagonales, $D_r(t) = r^{-1}\Lambda(t)$, $\hat{W} = T(t) + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t) z^{-j}$ et toutes les matrices dépendant de t sont holomorphes dans U.

Soit S le secteur $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$, $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{r} + \delta$, $\delta > 0$ dans le plan de z complexe, de sorte que son ouverture est supérieure à

π/r. Si $\delta > 0$ est suffisamment petit, le système (25) admet une matrice fondamentale telle que la série formelle (26) est asymptotique:

$$W(z, t) \sim \tilde{W}(z, t), \quad z \to \infty, \quad z \in S,$$

uniformément en $t \in U$ (cf. [37]). Cette matrice fondamentale est en outre unique. La représentation asymptotique de W est valable dans un domaine qui peut être plus vaste que S (cf. [15], [37]). On rappelle que toute matrice fondamentale du système (25) est analytique dans la couronne $R < |z| < \infty$, mais en général est multivalente: le point $z = \infty$ peut être point de branchement pour les éléments de la matrice fondamentale.

Fixons un petit $\delta > 0$ et considérons les secteurs

$$S_l : \pi(l-1)/r - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi l/r, \quad |z| > R, \quad l = 1, \ldots, 2r+1.$$

Dans chaque secteur S_l il existe une matrice fondamentale et une seule telle que

$$W_l(z, t) \sim \tilde{W}(z, t), \quad z \to \infty, \quad z \in S_l, \tag{27}$$

uniformément en $t \in U$. Les matrices fondamentales W_1 et W_2 sont définies sur l'intersection $S_1 \cap S_2$ qui, par définition, n'est pas vide. Ces matrices sont liées par la relation $W_2 = W_1C_1(t)$ et le prolongement analytique de W_1 du secteur S_1 au secteur S_2 est donné par la formule $W_2C_1^{-1}$. On obtient de façon analogue

$$W_{l+1}(z, t) = W_l(z, t)\, C_l(t). \tag{28}$$

Les matrices $C_l(t)$ s'appellent *multiplicateurs de Stokes*. Nombre de leurs importantes propriétés ont été établies par G. Birkhoff (cf. [15], [37]).

Soit γ un cercle $|z| = R_0 > R$ d'origine et d'extrémité en $z_0 \in S_1 \cap S_{2r+1}$ (cette intersection n'est pas vide), orienté dans le sens positif. De (28) il s'ensuit que

$$\hat{\gamma} W_1 = W_{2r+1} C_{2r}^{-1} \ldots C_1^{-1}$$

Montrons que

$$W_{2r+1} = W_1 e^{2\pi i D}. \tag{29}$$

On a $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Fixons les branches des fonctions $z^{d_1}, \ldots, z^{d_n}$ (donc la branche de la matrice z^D) dans le secteur S_1, puis prolongeons-les analytiquement le long de γ de S_1 à S_2, de S_2 à S_3 et ainsi de suite. D'après (27)

$$W_1 \sim \tilde{W}, \quad z \in S_1, \quad z \to \infty, \quad W_{2r+1} \sim \tilde{W}, \quad z \in S_{2r+1}, \quad z \to \infty,$$

mais les branches de z^D sont différentes dans ces formules : on obtient la deuxième en multipliant la première par $e^{2\pi i D}$. Donc, lorsque $z \to \infty$, $z \in S_1$,

$$W_1 \sim \tilde{W}, \quad W_{2r+1} \sim \tilde{W} e^{2\pi i D},$$

où $\tilde{W}$ est la branche initiale de la matrice W. La relation (29) résulte de ce que la matrice fondamentale est définie de façon unique par sa représentation asymptotique. Donc

$$\hat{\gamma} W_1 = W_1 C, \quad C = e^{2\pi i D} C_{2r}^{-1} \ldots C_1^{-1},$$

et le groupe de monodromie du système (25) est au voisinage du point $z = \infty$ un groupe à une seule génératrice $C(t)$.

Les matrices $D(t)$, $C_1(t)$, . . ., $C_{2r}(t)$ s'appellent *données de monodromie* associées au point $z = \infty$. On dit que le déformé (25) est isomonodrome au voisinage de $z = \infty$ si les données de monodromie sont indépendantes de t, c'est-à-dire si

$$dD = 0, \quad dC_l = 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant 2r. \tag{30}$$

Cette définition ainsi que tous les résultats concernant les propriétés d'isomonodromie locale sous la condition 1.2 sont acquis dans [123]. Les relations (30) s'appellent aussi *propriétés de déformation.* Si elles sont satisfaites, la génératrice C est indépendante de t.

Soit la 1-forme différentielle

$$\Omega = dW_1 \cdot W_1^{-1}. \tag{31}$$

Cette forme est univalente dans le domaine $R < |z| < \infty$. En effet, $\hat{\gamma} W_1 = W_1 C$ et comme C est indépendante de t, on a $\hat{\gamma}\Omega = \Omega$. Les C_l étant indépendantes de t, il vient en vertu de (28)

$$\Omega = dW_l \cdot W_l^{-1} \tag{32}$$

pour tous les l. La forme Ω est donc holomorphe dans la couronne $R < |z| < \infty$. De (27), (31) et (32) il s'ensuit que pour tout $\operatorname{Arg} z$ on a le développement asymptotique

$$\Omega \sim d\hat{W} \cdot \hat{W}^{-1} + \hat{W} \left(\sum_{j=1}^{r} dD_j z^j \right) \hat{W}^{-1},$$

lorsque $z \to \infty$, uniforme en $t \in U$. L'holomorphie de la forme Ω dans la couronne $R < |z| < \infty$ entraîne la convergence de la série pour $|z| > R$, de sorte que

$$\Omega(z, t) = \sum_{j=-\infty}^{r} \sum_{k=1}^{m} \Omega_{jk}(t) z^j dt_k \tag{33}$$

pour $|z|>R$, $t\in U$, les matrices $\Omega_{jk}(t)$ sont holomorphes pour $t\in U$ et

$$\Omega_{rk}(t)=r^{-1}\frac{\partial}{\partial t_k}\Lambda(t).$$

Si $\Lambda(t)\not\equiv$ const, la forme Ω présente un pôle d'ordre r au point $z=\infty$. Comme au n° 2 on démontre que la forme Ω vérifie les relations (13) qui sont équivalentes à la compatibilité du système (14). Signalons que les matrices Ω_{jk} se calculent à partir du développement (33).

La réciproque est vraie. Si une 1-forme différentielle $\Omega(z, t)$ est holomorphe pour $R<|z|<\infty$, $t\in U$, et présente un pôle d'ordre $\leqslant r$ au point $z=\infty$, elle se développe en une série de Laurent (33). Supposons que les matrices Ω_{jk}, $0\leqslant j\leqslant r$, $1\leqslant k\leqslant m$, sont les mêmes que dans (33). Les propriétés de déformation (30) sont alors vérifiées.

Si $LW=0$, on déduit de (13) que

$$d(LW)=0=L(dW-\Omega W),$$

de sorte qu'en posant $W=W_1$, on obtient

$$dW_1-\Omega W_1=W_1B(t),$$

où $B(t)=\sum_{k=1}^{m}B_k(t)\,dt_k$. Montrons que les matrices $B_k(t)$ sont diagonales. Des conditions imposées à Ω, il s'ensuit que

$$dW_1\cdot W_1^{-1}-\Omega=O(z^{-1})$$

pour $z\to\infty$, $z\in S_1$, et par suite $W_1B_k(t)\,W_1^{-1}=O(z^{-1})$ ou, ce qui revient au même,

$$z^De^SB_k(t)\,z^{-D}e^{-S}=O(z^{-1}), \tag{34}$$

où $S=\sum_{j=1}^{r}D_j(t)\,z^j$. Supposons que la matrice $B_k(t)$ possède un élément $b_{pq}(t)$ tel que $b_{pq}(0)\neq 0$ si $p\neq q$. La matrice du premier membre de la formule (34) contient un élément de la forme

$$b_{pq}(t)\,z^{d_p-d_q}\exp\{(S)_{pp}-(S)_{qq}\} \tag{35}$$

Lorsque $z\to\infty$, on a

$$(S)_{pp}-(S)_{qq}\sim r^{-1}z^r(\lambda_p(t)-\lambda_q(t))$$

Vu que $\lambda_p(t)\neq\lambda_q(t)$ et que l'ouverture du secteur S est supérieure à π/r, le module de l'élément (35) croît exponentiellement le long d'un rayon $\operatorname{Arg} z=\alpha$, $|z|>R$, contenu dans S_1. Ce qui contredit la relation (34), de sorte que $b_{pq}(t)\equiv 0$ pour $p\neq q$. La matrice $B_k(t)$ étant diagonale, le premier membre de la relation (34) est égal à

$B_k(t)$ et $B_k(t) = O(z^{-1})$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S_1$. Donc $B_k(t) \equiv 0$ pour tous les k et Ω est de la forme (31). On démontre de façon analogue que Ω est de la forme (32) pour tous les l. De (28) il s'ensuit que

$$\Omega = dW_{l+1} \cdot W_{l+1}^{-1} = \Omega + W_l dC_l C_l^{-1} W_l^{-1},$$

donc $dC_l = 0$ pour tout l. Enfin,

$$\hat{\gamma}\Omega = \Omega, \quad \hat{\gamma} W_1 = W_1 e^{2\pi i D} \tilde{C}, \quad \tilde{C} = C_1^{-1} \ldots C_{2r}^{-1},$$

$$\hat{\gamma}(dW_1 \cdot W_1^{-1}) = \Omega = dW_1 \cdot W_1^{-1} + 2\pi i \, W_1 dD \, W_1^{-1},$$

de sorte que $dD = 0$.

Considérons un point singulier irrégulier $z = \infty$ de forme plus générale. Désignons par $\lambda_1(z, t), \ldots, \lambda_n(z, t)$ les valeurs propres de la matrice $A(z, t)$. Pour $|z| \geqslant R_0 \gg 1$ ces valeurs se développent en séries de Puiseux de puissances fractionnaires de z:

$$\lambda_j(z, t) = z^{p_j/q_j} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{js}(t) \, z^{-s/q_j},$$

où p_j, $q_j \geqslant 1$ sont des entiers premiers entre eux. Posons la condition

1.3. *Pour* $|z| > R$ *et* $t \in U$, *on a les développements*

$$\lambda_j(z, t) = z^{p/q} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{js}(t) \, z^{-s/q}, \tag{36}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux, $q \geqslant 1$, $p/q > -1$ et $\lambda_{j0}(t) \neq \lambda_{k0}(t)$, $j \neq k$.

Si cette condition est satisfaite, les racines $\lambda_j(z, t)$ admettent toutes le même ordre de croissance lorsque $z \to \infty$ à l'exception éventuellement d'une dont l'ordre de croissance sera inférieur. Ces systèmes forment une classe bien plus large que celle des systèmes satisfaisant la condition 1.2. Par exemple, l'équation

$$w'' - a(t) \, z^{r-1} w = 0$$

est équivalente au système

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) \, z^{r-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad A_{r-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}$$

dont la matrice $A_{r-1}(t)$ est dégénérée.

En plus des conditions sur les valeurs propres, il est nécessaire d'en poser sur les vecteurs propres de la matrice $A(z, t)$. Ces conditions sont de la même nature qu'au chap. V, § 4, nº 1.

1.4. *Il existe une matrice T diagonalisant la matrice A* :

$$T^{-1}(z,\ t)\,A\,(z,\ t)\,T\,(z,\ t)=\Lambda\,(z,\ t)\equiv \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$$

et telle que

$$T\,(z,\ t)=\Lambda_0\,(z)\,T_0\,(z,\ t),$$

$$\Lambda_0\,(z)=\operatorname{diag}\,(z^{m_1/q},\ldots,\ z^{m_n/q}),$$

$$T_0\,(z,\ t)=\sum_{s=0}^{\infty} T_s\,(t)\,z^{-s/q},\quad \det\ T_0\,(t)\neq 0.$$

Cette série converge pour $|\,z\,|>R$, $t\in U$, et la matrice $T\,(z,\ t)$ est holomorphe par rapport à z et t.

Le système (25) admet alors une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{W}\,(z,\ t)=T\,(z,\ t)\,\hat{W}\,(z,\ t)\,z^{D(t)}\exp\{S\,(z,\ t)\},\tag{37}$$

$$S\,(z,\ t)=\sum_{j=1}^{p+q} D_j\,(t)\,z^{j/q},\quad \hat{W}=I+\sum_{j=1}^{\infty} B_j\,(t)\,z^{-j/q}.$$

Les matrices $D\,(t)$, $D_j\,(t)$ et $B_j\,(t)$ sont holomorphes pour $t\in U$, les matrices D et D_j, diagonales et

$$(D_{p+q}\,(t))_{jj}=(p/q+1)^{-1}\,\lambda_{j0}\,(t).$$

Soit S un secteur du plan de z complexe de sommet $z=0$ et d'ouverture $\pi q/(p+q)+\delta$, $0<\delta\ll 1$. Le système (25) admet une matrice fondamentale telle que

$$W\,(z,\ t)\sim\tilde{W}\,(z,\ t),\quad z\in S,\quad z\to\infty.$$

La matrice fondamentale W est définie de façon unique par sa représentation asymptotique. Considérons les secteurs

$$S_l:\frac{\pi q\,(l-1)}{p+q}-\delta\leqslant\operatorname{Arg} z\leqslant\frac{\pi q l}{p+q},\quad |\,z\,|>R,$$

où $\delta>0$ est suffisamment petit. Le système (25) admet alors dans le secteur S_l une matrice fondamentale W_l telle que sont satisfaites les relations (27). Ces matrices fondamentales sont liées par les relations (28). Choisissons une branche de la matrice z^D dans le secteur S_1 et prolongeons-la analytiquement le long de γ aux autres secteurs.

Si $q=1$, la condition 1.2 est remplie, de sorte que l'on admettra que $q\geqslant 2$.

Si les relations (30) sont remplies et Ω est de la forme (31), alors pour $z\in S_1$ on a

$$\Omega\sim dT\cdot T^{-1}+T\,d\hat{W}\,\hat{W}^{-1}T^{-1}+T\,\hat{W}\,dS\,\hat{W}^{-1}T^{-1}\tag{38}$$

On démontre comme plus haut que ce développement asymptotique est valable dans tous les secteurs S_l, de sorte que la forme Ω se développe en la série

$$\Omega(z, t) = \sum_{j=-\infty}^{p+q} \sum_{k=1}^{m} \Omega_{jk}(t) z^{j/q} dt_k, \tag{39}$$

convergente pour $|z| > R_0$, $t \in U$. Les coefficients de la série (39) se déduisent du développement (38).

La forme $\Omega(z, t)$ est généralement multivalente au voisinage du point $z = \infty$ qui peut être un point de branchement d'ordre q. On a $\hat{\gamma}^q S(z, t) = S(z, t)$ et on démontre comme plus haut que

$$\hat{\gamma}^q W_1 = W_1 C_0, \quad C_0 = e^{2\pi i q D} C_1^{-1} \ldots C_{2(p+q)}^{-1}.$$

D'où il suit que

$$\hat{\gamma}^q \Omega(z, t) = \Omega(z, t).$$

On a par ailleurs

$$\hat{\gamma} W_1(z, t) = W_1(z, t) C(t),$$

de sorte que

$$C^q(t) = C_0.$$

Supposons que $\mu_j(t)$ et μ_{j0} sont les valeurs propres respectives des matrices $C(t)$ et C_0. Alors $\mu_j^q(t) = \mu_{j0}$ et par suite μ_j sont indépendantes de t. Posons la condition:

1.5. *Les valeurs propres de la matrice C_0 sont distinctes.* En particulier, la matrice C_0 est semblable à la matrice diagonale: $C_0 = T_0^{-1} \Lambda_0 T_0$ et de façon analogue $C(t) = T^{-1}(t) \Lambda T(t)$, où

$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}(\mu_{10}, \ldots, \mu_{n0}), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

On a $\mu_j^q = \mu_{j0}$, de sorte que $\Lambda^q = \Lambda_0$, $\Lambda_0 = (T(t) T_0^{-1}) \Lambda_0 (T(t) T_0^{-1})^{-1}$, d'où il suit que la matrice $T(t) T_0^{-1} = \Lambda_1(t)$ est diagonale et par suite $C(t)$ est indépendante de t. Donc, $\hat{\gamma}\Omega = \Omega$ et le déformé (25) est isomonodrome.

Si donc les conditions 1.3 à 1.5 sont satisfaites, la forme Ω présente un pôle au point $z = \infty$ et vérifie les identités (13). La réciproque est vraie: elle s'énonce comme pour la condition 1.2. Ces faits ont été établis par l'auteur.

Expliquons le sens de la condition 1.5. Considérons le système

$$w' = z^{-1} A w, \quad A \neq 0,$$

pour lequel $z = 0$ est un point singulier régulier. Si la matrice A admet des valeurs propres multiples et n'est pas diagonalisable, ce système possède des solutions contenant $\ln z$. Les valeurs propres de A sont distinctes dans le cas générique. La condition 1.5 est aussi une condition générique.

Signalons encore que le cas $q = 2$ est dans une certaine mesure exceptionnel. Dans ce cas l'ouverture de chaque secteur S est égale à $2\pi/(p+2)$ et il suffit de prendre seulement $p+3$ secteurs S_l.

4. Isomonodromie globale. Considérons le système

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)}{z - a_j(t)} + \sum_{j=0}^{r} B_j(t) z^j, \tag{40}$$

où $r \geqslant 0$, les matrices $A_j(t)$, $B_j(t)$ et les fonctions $a_j(t)$ sont holomorphes dans U, les points $a_1(t), \ldots, a_k(t)$ distincts pour $t \in U$ et $A_j(0) \neq 0$, $B_r(0) \neq 0$. Le système (40) présente des points singuliers réguliers $a_1(t), \ldots, a_k(t)$ et un point singulier irrégulier $z = \infty$. On admettra que sont remplies soit la condition 1.2, soit les conditions 1.3 à 1.5. Prenons $W_1(z, t)$ pour matrice fondamentale canonique. Supposons que les différences $\lambda_{jk}(t) - \lambda_{jl}(t)$, $k \neq l$, des valeurs propres de la matrice $A_j(t)$, ne sont pas entières (condition 1.1). Soit l_j une courbe simple différentiable reliant $z_0 \in S_1$ et a_j, $a_j \notin l_j$. Les courbes $l_1, \ldots, l_k$ peuvent être choisies non sécantes. En prolongeant analytiquement la matrice fondamentale W_1 le long du chemin l_j, on trouve qu'au voisinage du point $z = a_j$

$$W_1(z, t) = \hat{W}_j(z, t)(z - a_j)^{L_j}, \quad \hat{W}_j = \sum_{s=0}^{\infty} W_{js}(t) z^{-s}. \tag{41}$$

Cette série converge au voisinage du point a_j et

$$\det W_{j0} \neq 0, \quad A_j(t) = W_{j0}(t) L_j(t) W_{j0}^{-1}(t).$$

Si γ_j est un cercle de petit rayon centré en a_j et orienté dans le sens positif, alors $\hat{\gamma}_j W_1 = W_1 e^{2\pi i L_j}$.

Les matrices $D, C_1, \ldots, C_N, L_1, \ldots, L_k$ s'appellent *données de monodromie* (on rappelle que D se détermine à partir de (26) ou (37), C_l sont les multiplicateurs de Stokes, leur nombre N a été indiqué plus haut). Le déformé (40) s'appelle *isomonodrome* si les propriétés de déformation

$$dD = 0, \quad dC_j = 0, \quad dL_j = 0 \tag{42}$$

sont vérifiées. En particulier, de (42) il s'ensuit que le groupe de monodromie $G(t)$ du système (40) est semblable à un groupe constant, c'est-à-dire que toute matrice de $G(t)$ est de la forme $T^{-1}(t)\, C\, T(t)$, où $T(t)$ est une matrice fixée, C une matrice constante.

Considérons comme plus haut la 1-forme différentielle

$$\Omega(z, t) = dW_1(z, t)\, W_1^{-1}(z, t) = \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(z, t)\, dt_j.$$

Pour tout $t \in U$ fixe, les éléments de toute matrice Ω_j sont des fonctions rationnelles de z qui peuvent présenter des pôles uniquement aux points $a_1(t), \ldots, a_k(t), \infty$. De (11), il s'ensuit que

$$\operatorname*{res}_{z=a_j} \Omega = -A_j(t)\, da_j.$$

Au voisinage du point $z = \infty$, la forme Ω se développe en la série de Laurent

$$\Omega(z, t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{N} \Omega_{js}(t)\, z^{-s}\, dt_j, \quad N \geqslant 0$$

(sous la condition 1.2, on a $N = r + 1$). Le théorème de Liouville entraîne

$$\Omega(z, t) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(t)\, da_j}{z - a_j} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{N} \Omega_{js}(t)\, z^{-s}\, dt_j. \tag{43}$$

Pour que le déformé (40) soit isomonodrome, il est nécessaire et suffisant que la forme Ω vérifie les identités (13). Ces identités nous fournissent un système d'équations aux dérivées partielles pour les éléments des matrices $A_j(t)$ et $B_j(t)$ et pour les points $a_j(t)$. Ceci étant, les plus grandes difficultés analytiques sont liées au calcul de la représentation asymptotique de la matrice fondamentale W_1 lorsque $z \to \infty$, $z \in S_1$. Citons quelques exemples (cf. [31], [123], [124]) dans lesquels la forme Ω et les équations du système déformé isomonodrome sont explicitement trouvées.

1. Considérons le système

$$\frac{dw}{dz} = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{z - a_j} + A_\infty \right) w, \quad A_\infty = \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n).$$

Les matrices A_j sont constantes et possèdent des valeurs propres simples, les variables indépendantes sont $a_1, \ldots, a_k$ et $t_1, \ldots, t_n$. La forme Ω s'écrit

$$\Omega = \sum_{j=1}^{k} A_j d \ln(z - a_j) + d(zA_\infty) + \theta,$$

$$\theta_{jj} = 0, \quad \theta_{jl} = \sum_{j=1}^{k} (A_s)_{jl}\, d \ln(t_j - t_l).$$

Le système déformé isomonodrome est :

$$dA_j = -\sum_{j' \neq j} [A_j, A_{j'}]\, d \ln (a_j - a_{j'}) - [A_j, d(a_j A_\infty) + \theta].$$

2. Considérons le système

$$z\frac{dw}{dz} = (A(t)\, z^2 + B(t)\, z + C(t))\, w, \quad A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n),$$

où $a_i(t) \neq a_j(t)$ pour $t \in U$, $i \neq j$, les valeurs propres de la matrice $C(t)$ sont telles que les différences $\lambda_i(t) - \lambda_j(t)$, $i \neq j$, ne sont pas des nombres entiers. Soit $X = (x_{ij})$ une $(n \times n)$-matrice. Notons

$$X^{(+)} = \operatorname{diag}(x_{11}, \ldots, x_{nn}).$$

Soient $\Lambda(t)$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ sont distincts, $\{X\}$ une matrice d'éléments $\{X\}_{\Lambda,\, ii} = 0$: $\{X\}_{\Lambda,\, ij} = (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} x_{ij}$, $i \neq j$, et $\{X, X'\}_\Lambda = \{[X, X']\}_\Lambda$.
Dans ce cas

$$\Omega = z^2\Phi + z\Psi + \theta, \quad \Phi = \frac{1}{2}\, dA, \quad \Psi = dB^{(+)} + \frac{1}{2}\{dA, B\}_A,$$

$$\theta = \{\Phi, C\}_A + \{\Psi, B\}_A + \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k \neq l} b_{lk} b_{kl}\, d\left(\frac{1}{a_l - a_k}\right)\right\}_{1 \leqslant l \leqslant n},$$

et le système déformé isomonodrome s'écrit

$$dB = \Psi + [\theta, B] + [\Psi, C], \quad dC = [\theta, C].$$

Pour variables indépendantes on peut prendre les éléments des matrices A et $B^{(+)}$.

3. Considérons le système

$$z\frac{dw}{dz} = (z^{-1}E(t) + F(t) + zG(t))\, w, \quad E = K\widetilde{E}K^{-1},$$

où $G(t)$, $\widetilde{E}(t)$ sont des matrices diagonales d'éléments diagonaux respectifs $g_j(t)$ et $e_j(t)$ distincts, la matrice $K(t)$ holomorphe et régulière pour $t \in U$. Les systèmes des exemples 1 et 2 présentaient un point singulier irrégulier $z = \infty$; le système envisagé ici admet deux points singuliers irréguliers: $z = 0$ et $z = \infty$.

Ce système possède une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\widetilde{W}(z, t) = \hat{W}(z, t)\, z^{D_\infty(t)} \exp\{zG(t)\}, \quad \hat{W} = I + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t)\, z^{-j}$$

et trois matrices fondamentales $W_l(z, t)$ pour lesquelles cette série formelle est asymptotique pour $z \in S_l$, $z \to \infty$, $l = 1, 2, 3$.

Etudions la représentation asymptotique des solutions lorsque $z \to 0$. La substitution $W = KZ$ nous conduit au système

$$\frac{dZ}{dz} = (z^{-2}\tilde{E} + z^{-1}K^{-1}FK + K^{-1}GK)\,Z,$$

qui possède une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{Z}(z,\ t) = \hat{Z}(z,\ t)\, z^{D_0(t)} \exp\{-z^{-1}\tilde{E}(t)\},\quad \hat{Z} = I + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_j(t)\, z^j.$$

Soit $\tilde{S}_l$ le secteur $-\delta + \pi(l-1) \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi l$, $|z| < r$, $\delta > 0$ est petit. Il existe alors trois matrices fondamentales $Z_l(z,\ t)$ telles que $Z_l \sim \tilde{Z}$ lorsque $z \to 0$, $z \in \tilde{S}_l$. Les multiplicateurs de Stokes associés aux points $z = \infty$ et $z = 0$ sont définis par les formules

$$W_{l+1} = W_l C_l^{(\infty)},\quad Z_{l+1} = Z_l C_l^{(0)}.$$

Introduisons la matrice de liaison Q:

$$W_1 = kZ_lQ$$

et définissons les propriétés de déformation de la manière suivante:

$$dD_\infty = 0,\quad dD_0 = 0,\quad dC_l^{(\infty)} = 0,\quad dC_l^{(0)} = 0,\quad dQ = 0.$$

Posons $L = z\, d/dz - (z^{-1}E + F + zG)$.

Les propriétés de déformation sont vérifiées si et seulement si les matrices G, F, $\tilde{E}$ et K satisfont le système non linéaire

$$dL = [\Omega,\ L],\quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega,$$

$$dK = K\{d\tilde{E},\ K^{-1}FK\}_{\tilde{E}} + \{dG,\ F\}_G K.$$

La forme Ω s'écrit

$$\Omega = z\Phi + \Psi + z^{-1}\theta,\quad \Phi = dG,\quad \Psi = \{dG,\ F\}_G,\quad \theta = -K\, d\tilde{E}K^{-1}.$$

Le système ci-dessus est équivalent au système complètement intégrable

$$dK = K\{d\tilde{E},\ K^{-1}FK\}_{\tilde{E}} + \{dG,\ F\}_G K,$$
$$dF = [\Phi,\ E] + [\theta,\ G] + [\Psi,\ F].$$

4. Considérons le système de deux équations

$$Lw = 0,\quad L = \frac{d}{dz} - \left[z^{-2}E + z^{-1}F + \sum_{j=1}^{N} H_j (z - a_j)^{-1}\right],$$

où

$$G = \operatorname{diag}(g_1(t),\ g_2(t)),\quad E = K\tilde{E}K^{-1},\quad \tilde{E} = \operatorname{diag}(e_1(t),\ e_2(t)),$$
$$H_j = T_j \operatorname{diag}(0,\ 1)\, T_j^{-1},\quad g_1(t) \neq g_2(t),\quad e_1(t) \neq e_2(t),$$

toutes les matrices sont holomorphes dans U, et a_j, des constantes distinctes. Ce système admet des points singuliers réguliers en $a_1, \ldots$ $\ldots, a_N$ et des points singuliers irréguliers en 0, ∞.

Ce système possède une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\widetilde{W}(z, t) = \hat{W}(z, t)\, z^{D_\infty(t)} \exp\{zG(t)\},$$

où la matrice $\hat{W}$ se développe comme dans l'exemple 3°, et trois matrices fondamentales telles que $W_l \sim \widetilde{W}$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S_l$.

Le changement $W = KZ$ ramène le système à la forme

$$\frac{dZ}{dz} = \left[z^{-2}\widetilde{E} + z^{-1}K^{-1}FK + K^{-1}GK + \sum_{j=1}^{N} K^{-1}H_jK\,(z - a_j)^{-1}\right] Z.$$

Ce système admet une matrice fondamentale de la forme

$$\widetilde{Z}(z, t) = \hat{Z}(z, t)\, z^{D_0(t)} \exp\{-z^{-1}\widetilde{E}(t)\},$$

où la matrice $\hat{Z}$ se développe comme dans l'exemple 3°, et trois matrices fondamentales Z_l telles que $Z_l \sim \widetilde{Z}$ lorsque $z \to 0$, $z \in \widetilde{S}_l$ (les secteurs $\widetilde{S}_l$ sont les mêmes que plus haut). Les multiplicateurs de Stokes $C_l^{(\infty)}$ et $C_l^{(0)}$ sont définis par les mêmes formules que dans l'exemple 3°. Au voisinage du point a_j on a la matrice fondamentale

$$W_{a_j}(z, t) = T_j\,(z - a_j)^J\, \Phi_j(z, t)\,(z - a_j)^{L_j},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_j(t) & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice Φ_j est holomorphe au point a_j et $\Phi_j(a_j, t) = I$. Introduisons les matrices de liaison

$$W_1 = KZ_1Q_0, \quad W_1 = W_{a_j}Q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

et les propriétés de déformation

$$dD_\infty = 0, \quad dD_0 = 0, \quad dC_l^{(\infty)} = 0, \quad dC_l^{(0)} = 0, \quad dQ_0 = 0,$$

$$d(Q_j^{-1}L_jQ_j) = 0, \quad (I - J)\,dQ_j \cdot Q_j^{-1}J = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Ces propriétés de déformation sont vérifiées si et seulement si les matrices G, F, $\widetilde{E}$, K et H_j satisfont le système d'équations non linéaires

$$dL = [\Omega, L], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega,$$

$$dK = K\{d\widetilde{E}, K^{-1}FK\}_{\widetilde{E}} + \left\{dG, F + \sum_{j=1}^{N} H_j\right\}_G K.$$

La forme Ω s'écrit

$$\Omega = z\Phi + \Psi + z^{-1}\theta, \qquad \Phi = dG,$$

$$\Psi = \left\{dG,\ F + \sum_{j=1}^{N} H_j\right\}_G, \quad \theta = -K\, d\tilde{E}K^{-1}.$$

Le système ci-dessus est équivalent au système complètement intégrable

$$dK = K\{d\tilde{E},\ K^{-1}FK\}_{\tilde{E}} + \left\{dG,\ F + \sum_{j=1}^{N} H_j\right\}_G K,$$

$$dF = [\Phi,\ E] + [\theta,\ G] + [\Psi,\ F] - \sum_{j=1}^{N} a_j^{-1}[\theta,\ H_j],$$

$$dH_j = [\Omega|_{z=a_j},\ H_j], \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Signalons que l'équation contenant dK est la condition de compatibilité du système

$$K^{-1}LKZ_1 = 0, \quad dZ_1 = (K^{-1}\Omega K - K^{-1}\,dK)\,Z_1.$$

5. Considérons le système

$$Lw = 0, \quad L = \frac{d}{dz} - \left[zG + F + \sum_{j=1}^{N} H_j(z - a_j)^{-1}\right],$$

où les matrices G, F et H_j satisfont les mêmes conditions que dans l'exemple 4. Ce système admet des points singuliers réguliers en $a_1, \ldots, a_N$ et un point singulier irrégulier en $z = \infty$. Il possède une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{W}(z,\ t) = \hat{W}(z,\ t)\, z^{D(t)} \exp\{(z^2G)/2 + zF^{(+)}\},$$

où $\hat{W}$ se développe en série comme plus haut, et quatre matrices fondamentales telles que $W_l \sim \tilde{W}$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S_l$. Les multiplicateurs de Stokes C_l et les matrices de liaison Q_j sont donnés par les formules

$$W_{l+1} = W_lC_l, \quad W_1 = W_{a_j}Q_j,$$

et les propriétés de déformation s'écrivent

$$dD = 0, \quad dC_l = 0, \quad d(Q_j^{-1}L_jQ_j) = 0, \quad (I - J)\,dQ_j \cdot Q_j^{-1}J = 0.$$

Ces propriétés sont vérifiées si et seulement si les matrices G, F et H_j satisfont le système d'équations non linéaires

$$dL = [\Omega,\ L], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega.$$

La forme Ω s'écrit

$$\Omega = z^2\Phi + z\Psi + \theta, \quad \Phi = dG/2, \quad \Psi = dF^{(+)} + \{\Phi, F\}_G,$$

$$\theta = \left\{\Phi, \sum_{j=1}^{N} H_j\right\}_G + \{\Psi, F\}_G + $$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{diag} (f_{12}f_{21}d(g_1 - g_2)^{-1}, f_{21}f_{12}d(g_2 - g_1)^{-1}).$$

Le système ci-dessus est équivalent au système complètement intégrable

$$dF = \Psi + [\theta, F] + \sum_{j=1}^{N} a_j [\Phi, H_j] + \sum_{j=1}^{N} [\Psi, H_j],$$
$$dH_j = [\Omega|_{z=a_j}, H_j], \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Considérons le système

$$\frac{dw}{dz} = Lw, \quad L = \sum_{j=1}^{K} \frac{A_j}{z - a_j} + \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{s_j} \frac{B_{js}}{(z - b_j)^s}\right) + \sum_{j=1}^{M} Q_j z^j, \qquad (44)$$

où $s_j \geqslant 2$, les matrices $A_j(t)$, $B_j(t)$, $Q_j(t)$ et les fonctions $a_j(t)$, $b_j(t)$ sont holomorphes pour $t \in U$, les points $a_1(t), \ldots, a_k(t)$, $b_1(t), \ldots, b_N(t)$ sont distincts pour $t \in U$, $A_j(0) \neq 0$, $B_{j.s_j}(0) \neq 0$ et $Q_M(0) \neq 0$. Ce système admet des points singuliers réguliers en $a_1, \ldots, a_k$ et des points (généralement) irréguliers en $b_1, \ldots, b_N$, ∞. Supposons que les différences des valeurs propres de chaque matrice $A_j(t)$ ne sont pas des nombres entiers (condition 1.1), et que les valeurs propres de chaque matrice $B_{j.s_j}(t)$ et $Q_M(t)$ sont distinctes pour $t \in U$ (condition 1.2).

Soit S_l le secteur $\pi(l-1)/(M+1) - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi l/(M+1)$, où $\delta > 0$ est petit. Le système (44) admet une matrice fondamentale formelle de la forme (26) et des matrices fondamentales W_l telles que $W_l \sim \tilde{W}$ pour $z \to \infty$, $z \in S_l$. Les multiplicateurs de Stokes sont définis par les relations $W_{l+1} = W_l C_l^{(\infty)}$.

Fixons j et soient S_{jl} les secteurs

$$\pi(l-1)/(s_j - 1) - \delta \leqslant \operatorname{Arg}(z - b_j) \leqslant \pi l/(s_j - 1), \quad l = 1, \ldots, 2s_j - 1,$$

où $\delta > 0$ est assez petit. Le système (44) possède une matrice fondamentale formelle de la forme

$$\tilde{W}_{b_j}(z, t) = \hat{W}_{b_j}(z, t)(z - b_j)^{D_j} e^{S_j},$$

où

$$\hat{W}_{b_j} = T_j(t) + \sum_{s=1}^{\infty} F_{js}(t)(z - b_j)^s \quad \text{et} \quad S_j = \sum_{s=1}^{s_j - 1} D_{js}(t)(z - b_j)^{-s}.$$

Les matrices $D_j(t)$ et $D_{js}(t)$ sont diagonales

$$T_j^{-1}(t)\, B_{j,\, s_j}(t)\, T_j(t) = \Lambda_j(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{j1}(t), \ \ldots, \ \lambda_{jn}(t)),$$

où λ_{js} sont les valeurs propres de la matrice $B_{j,\, s_j}(t)$ et

$$D_{j,\, s_j-1} = (1-s_j)^{-1}\Lambda_j.$$

Le système (44) admet des matrices fondamentales telles que $W_{b_j,\, l} \sim \tilde{W}_{b_j}$ lorsque $z \to b_j$, $z \in S_l$. Les multiplicateurs de Stokes sont définis par les formules

$$W_{b_j,\, l+1} = W_{b_j,\, l}\, C_l^{(b_j)}.$$

Introduisons les matrices de liaison Q_j:

$$W_1 = T^{-1} T_j W_{b_j,\, 1}\, Q_j,$$

où $T(t)$ est une matrice telle que $T^{-1}(t)\, Q_M(t)\, T(t)$ est diagonale.

Au voisinage du point $z = a_j$ on a (cf. (41))

$$W_1(z, \ t) = \hat{W}_{a_j}(z, \ t)\,(z-a_j)^{L_j}, \quad \hat{W}_{a_j} = \sum_{s=0}^{\infty} G_{js}(t)\,(z-a_j)^s,$$

$$\det G_{j0}(t) \neq 0, \quad A_j(t) = G_{j0}(t)\, L_j(t)\, G_{j0}^{-1}(t);$$

la matrice $\hat{W}_{a_j}(z, \ t)$ est holomorphe au point $z = a_j$.

On appelle *données de monodromie* l'ensemble de matrices

$$D, \ D_j, \ L_j, \ C_l^{(\infty)}, \ C_l^{(b_j)}, \ Q_j.$$

Les propriétés de déformation sont définies de la manière suivante :

$$dD = 0, \quad dC_l^{(\infty)} = 0, \quad dD_j = 0, \quad dC_l^{(b_j)} = 0, \quad dQ_j = 0, \quad dL_j = 0.$$

Pour que ces propriétés soient vérifiées, il est nécessaire et suffisant qu'existe une 1-forme différentielle $\Omega(z, \ t)$ (possédant les propriétés mentionnées plus bas) satisfaisant les identités (13):

$$dL = [\Omega, \ L], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega.$$

La forme Ω s'écrit

$$\Omega(z, \ t) = -\sum_{j=1}^{K} \frac{A_j da_j}{z-a_j} + \sum_{s=0}^{M+1} \Omega_s(t)\, z^s + \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{s_j-1} \Omega_{js}(t)\,(z-b_j)^{-s} \right).$$

Les formes Ω_s et Ω_{js} sont les coefficients des développements asymptotiques de

$$dW_1 \cdot W_1^{-1} \ (z \to \infty, \ z \in S_1) \quad \text{et} \quad dW_{b_j,\, 1} \cdot W_{b_j,\, 1}^{-1} \ (z \to b_j, \ z \in S_{j1}).$$

(Pour le point $z = \infty$, ce fait a été établi plus haut; cf. (26) et (27)).

On a des résultats analogues dans le cas où des conditions de type 1.3-1.5 sont imposées aux points singuliers irréguliers $b_1, \ldots, b_N, \infty$.

§ 2. Déformations isomonodromes des équations scalaires

1. Isomonodromie locale. Soient D un domaine simplement connexe borné du plan de la variable complexe z, $U \subset C^m$ le domaine des valeurs des paramètres $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $0 \in U$, le domaine U étant supposé assez petit. Considérons l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n

$$Lw \equiv w^{(n)} - \sum_{j=0}^{n-1} p_j(z, t)\, w^{(j)} = 0 \tag{1}$$

pour $z \in D$, $t \in U$. Cette équation s'appelle *déformée* d'une équation de la même forme dans laquelle $t = 0$. Soit $\{w_1(z), \ldots, w_n(z)\}$ un système fondamental de solutions de l'équation (1). On écrira ce système sous forme d'un vecteur ligne $w(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$. La matrice fondamentale correspondante est de la forme

$$W(z, t) = \begin{pmatrix} w_1(z, t) & \ldots & w_n(z, t) \\ w_1'(z, t) & \ldots & w_n'(z, t) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{(n-1)}(z, t) & \ldots & w_n^{(n-1)}(z, t) \end{pmatrix}.$$

Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont tous de la forme

$$p_j(z, t) = (z - a(t))^{j-n} q_j(z, t), \tag{2}$$

où les fonctions $q_j(z, t)$ et $a(t)$ sont holomorphes dans $D \times U$ et U respectivement. Le point $z = a(t)$ sera alors généralement singulier régulier pour l'équation (1). Les conditions imposées au point $a(t)$ et au domaine U sont les mêmes qu'au § 1 du présent complément, γ est une courbe analogue contournant le point $z = a(t)$ dans le sens positif.

On dit que l'équation déformée (1) est *isomonodrome* dans le domaine D s'il existe un système fondamental de solutions $w(z)$ tel que

$$\hat{\gamma} w = wC, \tag{3}$$

où C est une matrice constante d'ordre n. Ce système fondamental et la matrice fondamentale correspondante seront appelés *canoniques*.

A l'équation (1) est associée l'équation déterminante en $z = a(t)$:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)-\lambda(\lambda-1)\ldots$$
$$\ldots(\lambda-n+2)\,q_{n-1}(a(t),\ t)+\ldots=0. \qquad (4)$$

Si l'équation (1) est isomonodrome dans le domaine D, les racines de l'équation (4) sont indépendantes de t. Montrons ceci dans le cas élémentaire où est satisfaite la condition

2.1. *Pour $j \neq k$, les différences $\lambda_j(t) - \lambda_k(t)$ des racines de l'équation* (4) *ne sont pas des nombres entiers.*

Il existe dans ce cas un système fondamental canonique de solutions de la forme

$$w_0(z,\ t)=((z-a)^{\lambda_1(t)}\varphi_1(z,\ t),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (z-a)^{\lambda_n(t)}\varphi_n(z,\ t)),\quad \varphi_j(a(t),\ t)=1. \qquad (5)$$

Les fonctions $\varphi_j(z,\ t)$ sont holomorphes dans le domaine $D\times U$. On a

$$w=w_0T(t),\quad \hat{\gamma}w_0=w_0e^{2\pi i\Lambda(t)},$$

où $\Lambda(t)=\operatorname{diag}(\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t))$. Donc

$$\hat{\gamma}w=w_0TC=w_0Te^{2\pi i\Lambda},\quad e^{2\pi i\Lambda}=T^{-1}CT,$$

et comme les matrices $e^{2\pi i\Lambda}$ et C sont semblables, il s'ensuit que les $\lambda_j(t)$ sont indépendants de t.

Théorème 1. *Pour que l'équation déformée* (1) *soit isomonodrome dans D, il est nécessaire et suffisant qu'existent des fonctions $A_{0j}(z,\ t),\ \ldots,\ A_{n-1,\,j}(z,\ t)$, holomorphes pour $z\in D\diagdown a$, $t\in U$, et un système fondamental de solutions $w(z)$ tels que*

$$\frac{\partial w}{\partial t_j}=\sum_{k=0}^{n-1}A_{kj}(z,\ t)\,w^{(k)} \qquad (6)$$

pour toute solution $w_1\in w$.

Pour prouver ce théorème, considérons la 1-forme différentielle $\Omega = W^{-1}\,dW$. Supposons que W est une matrice fondamentale canonique. La forme Ω est alors univalente dans $D\diagdown a$ et

$$dW = \Omega(z,\ t)\,W.$$

En identifiant dans cette identité les éléments des premières lignes des matrices qui sont les coefficients en $dt_1,\ \ldots,\ dt_m$, on obtient (6). Si l'identité (6) est vérifiée, la forme Ω est univalente dans $D\diagdown a$. On a

$$\hat{\gamma}W=WC(t),\quad \hat{\gamma}\Omega=\Omega,\quad W^{-1}C^{-1}\,dC\,W=0,$$

de sorte que $dC = 0$ et C est indépendant de t.

De (6) il s'ensuit que si w est un système fondamental canonique de solutions, on a

$$A_{kj}(z, t) = \Delta_{kj}(z, t)\,\Delta^{-1}(z, t), \tag{7}$$

où $\Delta = \det W(z, t)$ est le wronskien des solutions $w_1, \ldots, w_n$, Δ_{kj} le déterminant déduit de Δ en remplaçant la k-ième ligne par la ligne $\partial w_1/\partial t_j, \ldots, \partial w_n/\partial t_j$.

Le point $z = a(t)$ est soit un point d'holomorphie, soit un pôle pour chaque fonction $A_{kj}(z, t)$. En effet, de la structure de la matrice fondamentale au voisinage d'un point singulier régulier (chap. I, § 2, (15)) et de (6) il s'ensuit que la fonction $A_{kj}(z, t)$ peut croître moins vite qu'une puissance de $|z - a|$ lorsque $z \to a$.

Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont holomorphes pour $|z| > R$, $t \in U$, et se développent en les séries convergentes

$$p_j = \sum_{-\infty}^{m_j} p_{jk}(t)\, z^k,$$

et de plus $m_0 > -n$, $p_{0m_0} \neq 0$. Le point $z = \infty$ est alors un point singulier irrégulier pour l'équation (1). L'équation caractéristique est de la forme

$$\lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} p_j(z, t)\,\lambda^j = 0.$$

Posons

$$\lambda = z^{m_0/n}\mu, \quad \zeta = z^{1/n},$$

alors

$$\mu^n - \sum_{j=0}^{n-1} p_j(z, t)\, z^{m_0(j/n-1)}\mu^j = 0. \tag{8}$$

Posons la condition (analogue à la condition 1.3):

2.2. *Les coefficients de l'équation* (8) *possèdent des limites finies lorsque $z \to \infty$ et les racines de l'équation limite sont distinctes.*

Alors $m_j \leqslant m_0(1 - j/n)$ et pour $|z| > R$, $t \in U$, on a

$$\mu_j = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{js}(t)\, z^{-s/n}, \quad \mu_{j0}(t) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Soit S_l le secteur $\pi(l-1)\,n/(m_0+n) - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \leqslant \pi l n/(m_0+n)$, où $\delta > 0$ est assez petit. L'équation (1) admet alors

un système fondamental de solutions tel que $w^l \sim \tilde{w}$ pour $z \in S_l$, $z \to \infty$, où $\tilde{w}_j$ sont des séries formelles

$$\tilde{w}_j = z^{r_j(t)} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{m_0+n} \alpha_{jk}(t) z^{k/n} \right\} \varphi_j, \tag{9}$$

$$\alpha_{j0}(t) \neq 0, \quad \varphi_j = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk}(t) z^{-k/n}.$$

Le terme principal de la représentation asymptotique est indiqué au chap. V, § 3, (13). On a $w^{l+1} = w^l C_l$; les matrices C_l s'appellent *multiplicateurs de Stokes*. L'équation déformée (1) est dite *isomonodrome* au voisinage du point $z = \infty$ si les propriétés de déformation suivantes sont satisfaites:

$$dr_j = 0, \quad dC_l = 0.$$

Dans ces conditions on a $\hat{\gamma}^q w^1 = w^1 C_0$, $\hat{\gamma} w^1 = w^1 C(t)$, où la matrice C_0 est indépendante de t et γ est un cercle $|z| = R_0$ orienté dans le sens positif, d'origine et d'extrémité en $z_0 \in S_1$. Comme au § 1, n° 3, on démontre que si les valeurs propres de la matrice C_0 sont distinctes, alors $dC = 0$, et le point $z = \infty$ est soit un pôle, soit un point régulier pour toutes les fonctions $A_{kj}(z, t)$.

2. Isomonodromie globale. Supposons que l'équation (1) possède des points singuliers réguliers $a_1(t), \ldots, a_N(t)$ finis et distincts pour $t \in U$ et que le point $z = \infty$ est soit un point régulier, soit un point irrégulier du type décrit ci-dessus. Dans le dernier cas, pour système fondamental canonique on prend le système w^1. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit isomonodrome est qu'il existe des fonctions $A_{kj}(z, t)$ telles que soit satisfaite la relation (6) pour toutes les solutions du système fondamental canonique. Les fonctions A_{kj} sont des fonctions rationnelles de z qui ne peuvent présenter des pôles qu'aux points $a_1, \ldots, a_N, \infty$.

Donc, dire que l'équation (1) est isomonodrome revient à dire que les équations (1) et (6) sont compatibles. Mais même dans le cas où t est un paramètre et $n \geqslant 3$, on obtient pour les fonctions A_j un système assez volumineux et peu étudié. Seules les équations du second ordre ont fait l'objet d'une étude assez complète; plus bas on passe en revue des résultats connus.

3. Equations du second ordre. Considérons l'équation

$$w'' = p(z, t) w' + q(z, t) w. \tag{10}$$

Soit $t \in U$ un paramètre,

$$p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z - z_j}, \quad q = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\beta_j}{(z - z_j)^2} + \frac{\gamma_j}{z - z_j} \right],$$

les fonctions α_j, β_j, γ_j et z_j dépendent de t et sont holomorphes pour $t \in U$. L'équation (10) possède des points singuliers réguliers $z_1(t), \ldots$ $\ldots, z_n(t)$ et éventuellement le point singulier $z = \infty$. On admet que les points $z_1, \ldots, z_n$ sont distincts pour $t \in U$.

Au point $z = z_j$ l'équation déterminante s'écrit

$$\lambda(\lambda - 1) = \alpha_j\lambda + \beta_j.$$

Si l'équation déformée (10) est isomonodrome, les exposants caractéristiques ne dépendent pas de t au point z_j, de sorte que les fonctions α_j et β_j sont indépendantes de t. La substitution

$$w = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} p(\zeta, t)\, d\zeta\right\} u$$

ramène l'équation (10) à l'équation binomiale

$$u'' = Ru, \quad R = q - \frac{p^2}{4} + \frac{p'}{2}. \tag{11}$$

Les équations (10) et (11) admettent les mêmes points singuliers et du fait que α_j sont indépendants de t, il s'ensuit qu'il y a équivalence entre l'isomonodromie de l'équation (11) et celle de l'équation (10). Il suffit donc de se limiter à l'équation

$$w'' = p(z, t)\, w \tag{12}$$

Supposons que cette équation est de la classe de Fuchs, c'est-à-dire que tous ses points singuliers sont réguliers. Alors

$$p = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_j}{(z - z_j)^2} + \frac{b_j}{z - z_j}\right], \tag{13}$$

et de plus les a_j sont constants. Il est entendu que l'on admet que l'un des nombres a_j et $b_j(0)$ est non nul, $j = 1, \ldots, n$. Au point z_j l'équation déterminante est de la forme $\lambda(\lambda - 1) - a_j = 0$, de sorte que

$$\lambda_{1j} + \lambda_{2j} = 1. \tag{14}$$

Le point $z = \infty$ est un point singulier régulier ou non singulier si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(t) \equiv 0. \tag{15}$$

Au point $z = \infty$ les exposants caractéristiques se déterminent à partir de l'équation $\lambda(\lambda+1) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j z_j)$ et comme ils sont indépendants de t, on a

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(t) z_j(t) = \varkappa, \tag{16}$$

où $\varkappa$ est une constante.

L'équation déformée (12) est isomonodrome si et seulement s'il existe un système fondamental (canonique) de solutions w et des fonctions $A(z, t)$ et $B(z, t)$ tels que l'identité

$$w_t = Bw + Aw' \tag{17}$$

est vérifiée pour les solutions w_1 et w_2 du système fondamental canonique. Les fonctions $A(z, t)$ et $B(z, t)$ sont des fonctions rationnelles de z et peuvent présenter des singularités uniquement aux points singuliers de l'équation (12). Ces faits sont exhibés au n° 1.

Donc, dire que l'équation déformée (12) est isomonodrome revient à dire que les équations (12) et (17) sont compatibles. En se servant de l'identité $(w'')_t = (w_t)''$ et du fait que si w est solution de l'équation (12), les fonctions w et w' sont linéairement indépendantes, on obtient le système d'équations

$$2B' + A'' = 0, \quad p_t = B'' + 2pA' + p'A.$$

En posant $B = -A'/2$, on obtient pour la fonction A l'équation

$$A''' - 4pA' - 2p'A + 2p_t = 0. \tag{18}$$

On reconnaît ici une équation différentielle ordinaire linéaire en z dans laquelle t joue le rôle d'un paramètre. La fonction $A(z, t)$ s'exprime au moyen du système fondamental de solutions par la formule

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ (w_1)_t & (w_2)_t \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}.$$

Soit $\tilde{w}(z, t)$ un système fondamental de solutions quelconque. Alors $w = \tilde{w}\, C(t)$, où C est une matrice d'ordre deux. Si $B = C_t C^{-1} = (b_{jk}(t))$, alors

$$A = \tilde{\Delta}^{-1} [b_{12}\tilde{w}_1^2 + (b_{22} - b_{11}) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 - b_{21}\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_1 \tilde{w}_{2t} - \tilde{w}_2 \tilde{w}_{1t}], \tag{19}$$

où $\tilde{\Delta}$ est le wronskien des solutions $\tilde{w}_1$ et $\tilde{w}_2$.

Etudions le comportement de la fonction $A(z, t)$ au voisinage des points singuliers de l'équation (12).

1. Supposons que la différence $\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$ des exposants caractéristiques au point $z_j(t)$ n'est pas un nombre entier. Il existe alors un système fondamental canonique de solutions $\tilde{w}$ de la forme

$$\tilde{w}_k = (z - z_j)^{\lambda_{kj}} \varphi_{kj}(z, t), \quad \varphi_{kj}(z_j(t), t) = 1,$$

où les fonctions φ_{kj} sont holomorphes par rapport à z au voisinage du point z_j. En vertu de (14) les nombres $2\lambda_1$ et $2\lambda_2$ ne sont pas entiers et de (19) il s'ensuit que $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ et que

$$A(z_j, t) = -\dot{z}_j(t). \tag{20}$$

La fonction $A(z, t)$ est donc holomorphe en $z = z_j$.

2. Supposons que $\lambda_{1j} - \lambda_{2j} = m$, où $m \geqslant 0$ est entier, de sorte que

$$\lambda_{1j} = (1+m)/2, \quad \lambda_{2j} = (1-m)/2.$$

Dans ce cas l'une des solutions du système fondamental canonique peut contenir le logarithme $\ln(z - z_j)$. Posons la condition

2.3. *Le système fondamental canonique de solutions ne contient pas* $\ln(z - z_j)$ *au point* z_j.

Pour $m \geqslant 2$, la fonction $A(z, t)$ présente en z_j un pôle d'ordre $\leqslant 1 - m$.

Soient $\lambda_{1\infty}$ et $\lambda_{2\infty}$ les exposants caractéristiques au point $z = \infty$.

3. Supposons que $\lambda_{1\infty} - \lambda_{2\infty}$ est un nombre non entier. Le point $z = \infty$ est alors soit un pôle du premier ordre, soit un point d'holomorphie de la fonction $A(z, t)$.

4. Supposons que $\lambda_{1\infty} - \lambda_{2\infty} = m$, où $m \geqslant 0$ est entier, et que la condition 2.3 est satisfaite. Le point $z = \infty$ est alors soit un pôle d'ordre $\leqslant m + 1$, soit un point d'holomorphie de la fonction $A(z, t)$, et $m \geqslant 2$.

La condition 2.3 est satisfaite si a_j, b_j et z_j sont reliés par certaines relations. Pour $m = 2$ la condition 2.3 équivaut à la relation

$$a_j = \frac{3}{4}, \quad b_j^2 = \sum_{k \neq j} \left[\frac{a_k}{(z_j - z_k)^2} + \frac{b_k}{z_j - z_k} \right]. \tag{21}$$

Les propriétés 1 à 4 imposent certaines conditions au nombre de points singuliers de l'équation (12) et à leurs exposants caractéristiques. Cette question n'est pas entièrement étudiée et nous nous bornerons à un seul exemple. Supposons que toutes les différences $\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$, $\lambda_{1\infty} - \lambda_{2\infty}$ sont des nombres non entiers. Pour t fixe, la fonction $A(z, t)$ est alors une fonction rationnelle qui prend des valeurs données aux points z_j (cf. (20)) et présente un pôle du premier ordre ou est holomorphe au point $z = \infty$. De là il s'ensuit que $n \leqslant 2$ et l'équation (12) possède au plus trois points singuliers sur la sphère de Riemann.

R. Fuchs [69] a étudié l'équation (12), où

$$p=\frac{a}{z^2}+\frac{b}{(z-1)^2}+\frac{c}{(z-t)^2}+\frac{\alpha}{z}+\frac{\beta}{z-1}+\frac{\gamma}{z-t}+$$
$$+\frac{3}{4(z-\lambda)^2}+\frac{\varepsilon}{z-\lambda}, \tag{22}$$

et $\lambda = \lambda(t)$. Cette équation présente les points singuliers 0, 1, t, λ et ∞. Supposons que les équations déformées (12) et (22) sont isomonodromes. On demande d'établir pour quelles fonctions $\lambda(t)$ cela est possible.

Les fonctions a, b et c sont indépendantes de t. On admet que les différences des exposants caractéristiques sont non entières aux points 0, 1, λ, ∞ et que $z = \infty$ est un point singulier régulier. Ceci nous conduit à la relation (cf. (15))

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon=0. \tag{23}$$

Supposons que le système fondamental de solutions ne contient pas $\ln(z-\lambda)$ au point $z=\lambda$. Alors (cf. (21))

$$\rho+\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\lambda-1}+\frac{\gamma}{\lambda-t}=\varepsilon^2,\quad \rho=\frac{a}{\lambda^2}+\frac{b}{(\lambda-1)^2}+\frac{c}{(\lambda-t)^2}. \tag{24}$$

L'indépendance de $\lambda_{1\infty}$ et $\lambda_{2\infty}$ par rapport à t entraîne que

$$\alpha\lambda+\beta(\lambda-1)+\gamma(\lambda-t)=\varkappa, \tag{25}$$

où $\varkappa$ est une constante.

De 1 à 4 il suit que la fonction $A(z, t)$ présente des zéros aux points 0, 1 et des pôles du premier ordre aux points λ, ∞. Donc

$$A=M\,\frac{z(z-1)}{z-\lambda},$$

où M est une constante. D'après (20) on a $A(1, t) = -1$, de sorte que

$$M=\frac{\lambda-t}{t(t-1)}.$$

En portant l'expression de A dans l'équation (18), on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}&=M\left(-\frac{\alpha}{\lambda}+2a\,\frac{\lambda-1}{\lambda^2}\right),\\
\dot{\beta}&=M\left[\frac{\beta}{\lambda-1}+2b\,\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right],\\
\dot{\gamma}&=M\left[\gamma\,\frac{\lambda(\lambda-1)-(\lambda-t)^2}{(\lambda-t)^2}+2c\,\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2}\right],\\
\dot{\lambda}&=M\,[2\lambda-1+2\varepsilon\lambda(\lambda-1)].
\end{aligned} \tag{26}$$

En se servant des relations (23) à (25), on trouve

$$\alpha=\frac{\varkappa\lambda}{t}-\frac{\lambda(2\lambda-t-1)^2}{4t(t-1)(\lambda-t)}-\rho\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t}+$$
$$+\frac{1}{4}\,\frac{t(t-1)^2}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left(\frac{d\lambda}{dt}-\frac{\lambda-1}{t-1}\right)^2,$$

$$\beta=-\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t-1}+\frac{(\lambda-1)(2\lambda-t)^2}{4(t-1)\lambda(\lambda-t)}+$$
$$+\rho\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t-1}-\frac{t^2(t-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left(\frac{d\lambda}{dt}-\frac{\lambda}{t}\right)^2,$$

$$\gamma=\frac{\varkappa(\lambda-1)}{t(t-1)}-\frac{(\lambda-t)(2\lambda-1)^2}{4t(t-1)\lambda(\lambda-1)}-$$
$$-\rho\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}+\frac{t(t-1)}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2.$$

La fonction ρ intervient dans la formule (24). En portant ces expressions dans le système (26), on obtient

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}-\frac{\lambda-1}{t-1}\right)D(\lambda)=0,\quad \left(\frac{d\lambda}{dt}-\frac{\lambda}{t}\right)D(\lambda)=0,\quad \frac{d\lambda}{dt}D(\lambda)=0,$$

où

$$D(\lambda)=\frac{d^2\lambda}{dt^2}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-2\,\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\times$$
$$\times\left[1-\varkappa+a+b+c-\left(a+\frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2}+\left(b+\frac{1}{4}\right)\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}-c\,\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right].\tag{27}$$

Pour que l'équation déformée (12), (22) soit isomonodrome, il est nécessaire que la fonction $\lambda(t)$ vérifie l'équation

$$D(\lambda)=0.\tag{28}$$

Cette équation s'appelle *sixième équation de Painlevé* (PVI).

Faisons quelques remarques sur les équations non linéaires. Les solutions de l'équation différentielle linéaire sous la forme normale ne peuvent présenter des singularités qu'aux points en lesquels les coefficients de l'équation en présentent. De tels points singuliers sont dits *fixes*. Les solutions des équations non linéaires peuvent admettre des points singuliers *mobiles*. Par exemple, les solutions de l'équation $w'=w^2$ sont données par les formules $w=(z-c)^{-1}$, $w\equiv 0$. Si la condition initiale $w(z_0)=w_0$ est donnée, on peut par un choix convenable de z_0 et w_0 faire en sorte que la solution w admette un pôle en tout point donné à l'avance du plan complexe.

Painlevé a posé le problème suivant. Etant donnée une équation non linéaire du second ordre

$$w'' = \frac{P(z, w, w')}{Q(z, w, w')}, \tag{29}$$

où P et Q sont des polynômes de w et w', à coefficients analytiques par rapport à z, établir les conditions sous lesquelles les solutions ne possèdent pas de points singuliers essentiels mobiles et de points de branchement, c'est-à-dire les solutions ne peuvent admettre que des pôles mobiles. Ce problème a été résolu par Painlevé et Gambier au début du siècle [10], [15]. On a prouvé l'existence de 50 classes distinctes de telles équations. Six d'entre elles sont irréductibles, c'est-à-dire telles que leurs solutions ne s'expriment ni par des fonctions élémentaires, ni par d'autres fonctions spéciales transcendantes connues. Ces solutions s'appellent *solutions transcendantes de Painlevé*. Les cinq premières équations (PI) à (PV) se déduisent de l'équation (PVI) par des passages à la limite sur les paramètres figurant dans l'équation. Les déformées isomonodromes des équations linéaires du second ordre sont donc liées aux équations de Painlevé.

Considérons l'équation (12), où

$$p = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{a_j}{(z-z_j)^2} + \frac{b_j}{z-z_j} \right] + \sum_{j=0}^{m} c_j z^j, \tag{30}$$

et les fonctions a_j, b_j, c_j et z_j sont holomorphes par rapport à t pour $t \in U$. Supposons qu'est satisfaite l'une des conditions:

1) $c_m(0) \neq 0$;

2) tous les $c_j(t) \equiv 0$, mais $\sum_{j=1}^{n} b_j(0) \neq 0$.

Posons $m = -1$ dans le cas 2). L'équation (12) possède alors des points singuliers réguliers en $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ et un point singulier irrégulier en $z = \infty$.

Etudions le comportement de la fonction $A(z, t)$ au voisinage du point $z = \infty$. L'équation (12) possède un système fondamental formel de solutions de la forme (chap. II, § 3, (4), (5))

$$\begin{gathered} \hat{w}_j = d_j(t)\, p^{-\frac{1}{4}} e^{\xi_j}, \quad j = 1, 2, \\ \xi_1 = \int_{z_0}^{z} \sqrt{p(\zeta, t)}\, d\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\infty}^{z} \alpha_k(\zeta, t)\, d\zeta, \\ \xi_2 = -\int_{z_0}^{z} \sqrt{p(\zeta, t)}\, d\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{\infty}^{z} \alpha_k(\zeta, t)\, d\zeta, \end{gathered} \tag{31}$$

où z_0 est un point fixe, d_j des multiplicateurs de normalisation qui seront définis plus bas. Montrons que si l'équation déformée (12), (30) est isomonodrome dans un voisinage du point $z = \infty$, la fonction $A(z, t)$ présente en ce point un pôle du premier ordre. Etudions séparément les cas où m est pair et impair.

1. m est pair. Soient les secteurs

$$S_l = \frac{2\pi(l-1)}{m+2} - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2\pi l}{m+2}, \quad |z| > R, \quad l = 1, \ldots, m+3,$$

où $\delta > 0$ est assez petit, $R > |z_j(t)|$ pour tous les j, $t \in U$. Les intégrales de la formule (31) sont prises le long de chemins contenus dans le secteur S_1. Tirons du développement (31) des séries formelles de puissances de z^{-1}. On a

$$\int_{z_0}^{z} \sqrt{p(\zeta, t)}\, d\zeta = \frac{2\sqrt{c_m}}{m+2} z^{\frac{m}{2}+1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s(t) z^{-s}\right),$$

$$p^{-\frac{1}{4}}(z, t) = c_m^{-\frac{1}{4}} z^{-m/4}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s(t) z^{-s}\right),$$

$$\alpha_k(z, t) = z^{-k-1-(km)/2} \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(t) z^{-s},$$

et les intégrales des fonctions α_k se développent aussi en séries de puissances de z^{-1}. Fixons une branche de $\sqrt{z}$ dans le secteur S_1 et prolongeons-la ensuite analytiquement de S_1 à S_2, puis de S_2 à S_3 et ainsi de suite. Posons

$$d_{1,2}(t) = c_m^{\frac{1}{4}}(t) \exp\left\{\mp \frac{2\sqrt{c_m(t)}}{m+2} \beta_{-m/2-1}(t)\right\},$$

on obtient alors

$$\begin{gathered} \tilde{w}_j = z^{r_j} e^{\eta_j}\left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{js}(t) z^{-s}\right], \quad \eta_2 = -\eta_1, \\ \eta_1 = \frac{2\sqrt{c_m}}{m+2} z^{m/2+1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(t) z^{-s}\right). \end{gathered} \tag{32}$$

Dans chaque secteur S_l il existe un système fondamental de solutions tel que $w_j^l \sim \tilde{w}_j$ lorsque $z \to \infty$, $z \in S_l$. Les multiplicateurs de Stokes sont définis par les relations $w^{l+1} = w^l C_l$. Le wronskien Δ des solutions w_1^1 et w_2^1 est égal à $-2\sqrt{c_m(t)}$. Pour système fondamental canonique on prend le système w^1, de sorte que

$$A(z, t) = -\left(2\sqrt{c_m(t)}\right)^{-1}\left(w_1^1 w_{2t}^1 - w_2^1 w_{1t}^1\right).$$

De (32) il suit que

$$A(z,\ t) \sim \frac{\dot{c}_m(t)}{(m+2)\,c_m(t)}\,z, \quad z \to \infty, \tag{33}$$

et que A $(z,\ t)$ présente un pôle du premier ordre en $z = \infty$. On remarquera aussi que

$$r_{1,2} = -\frac{m}{4} \pm \frac{2\sqrt{c_m(t)}}{m+2}\,\beta_{-m/2}(t), \quad r_1 + r_2 = -\frac{m}{2}.$$

2. m est impair. Traitons d'abord le cas où $m \geqslant 1$. Les secteurs S_l et les contours d'intégration se définissent comme plus haut. Choisissons les branches des fonctions $\sqrt{z}$ et $\sqrt[4]{z}$ dans le secteur S_1. Les fonctions $p^{-1/4}$ et α_k admettent les mêmes développements en série que plus haut:

$$\int_{z_0}^{z} \sqrt{p}\, d\zeta = \frac{2\sqrt{c_m}}{m+2}\, z^{m/2+1}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s(t)\, z^{-s}\right) + f(t).$$

Posons $d_{1,2} = c_m^{\frac{1}{4}} e^{\mp f(t)}$. Les développements des fonctions ξ_j ne contenant pas z^{-1}, il vient $r_1 = r_2 = -\frac{m}{4}$. On a

$$\begin{gathered}\tilde{w}_j = z^{-\frac{m}{4}} e^{\eta_j}\left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{js}(t)\, z^{-s/2}\right], \quad \eta_2 = -\eta_1, \\ \eta_1 = \frac{2\sqrt{c_m}}{m+2}\, z^{\frac{m}{2}+1}\left(1 + \sum_{s=1}^{(m+1)/2} \psi_s(t)\, z^{-s}\right).\end{gathered} \tag{34}$$

Le wronskien des solutions w_1^1 et w_2^1 est comme précédemment égal à $-2\sqrt{c_m}$, w^1 est pris pour système fondamental canonique, w^l et les multiplicateurs de Stokes se déterminent comme plus haut, et la fonction A admet la représentation asymptotique (33). Mais ici les développements des solutions contiennent $\sqrt{z}$. Montrons que la fonction A $(z,\ t)$ se développe en série de puissances de z^{-1}. On a (toutes les séries sont asymptotiques lorsque $z \to \infty$, $z \in S_1$)

$$w_1^1 w_{2t}^1 - w_2^1 w_{1t}^1 = d_1 d_2 p^{-1/2} e^{\xi_1+\xi_2}\left(\frac{\dot{d}_2}{d_2} - \frac{\dot{d}_1}{d_1} + \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1\right),$$

$$d_1 d_2 = c_m^{1/2}, \quad \xi_1 + \xi_2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\infty}^{z} \alpha_{2k}(\zeta,\ t)\, d\zeta,$$

$$\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1 = -2\int_{z_0}^{z} \sqrt{p(\zeta,\ t)}\, d\zeta - 2\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\infty}^{z} \alpha_{2k+1}(\zeta,\ t)\, d\zeta,$$

$$\frac{\dot{d}_2}{d_2} - \frac{\dot{d}_1}{d_1} = 2\dot{f}(t).$$

Pour k pair, les fonctions α_k se développent en séries de puissances de z^{-1}, de sorte que $\xi_1+\xi_2$ ne contient pas $\sqrt{z}$. Pour k impair, $\alpha_k=z^{-1/2}\sum_{1}^{\infty}\delta_{jk}z^{-j}$, les puissances de z^{-j} étant toutes strictement négatives, $2f(t)$ se simplifie, de sorte que

$$\dot{\xi}_2-\dot{\xi}_1=z^{3/2}\sum_{s=0}^{\infty}f_s(t)\,z^{-s}.$$

Donc, la fonction $A(z,\ t)$ se développe en série asymptotique de z^{-1} lorsque $z\to\infty$, $z\in S_1$. De la représentation asymptotique du système fondamental w^l il suit que ce développement est valable dans tous les secteurs S_l, de sorte que $A\sim z\sum_{s=0}^{\infty}A_s(t)\,z^{-s}$ lorsque $z\to\infty$. De l'analyticité de la fonction A dans le domaine $|z|>R$ il résulte que la dernière série converge et est égale à $A(z,\ t)$.

Supposons que $m=-1$, c'est-à-dire que tous les $c_m(t)\equiv 0$ et $\sum_{j=1}^{n}b_j(0)\neq 0$. La fonction $A(z,\ t)$ admet alors aussi un pôle du premier ordre en $z=\infty$ et

$$A(z,\ t)\sim\Big(\sum_{j=1}^{n}\dot{b}_j(t)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j(t)\Big)^{-1}z,\quad z\to\infty. \tag{35}$$

Supposons que les différences des exposants caractéristiques en tous les points singuliers réguliers ne sont pas des nombres entiers. La fonction $A(z,\ t)$ prend alors (cf. (20)) des valeurs finies, donc elle est linéaire: $A=a(t)\,z+b(t)$, et de plus l'équation ne présente qu'un seul point singulier régulier. Elle est donc de la forme

$$w''=\Big[\frac{a}{(z-z_0(t))^2}+\frac{b(t)}{z-z_0(t)}+\sum_{j=0}^{m}c_m(t)\,z^m\Big]\,w, \tag{36}$$

où soit $c_m(0)=0$, soit $c_j(t)\equiv 0$, $b(0)\neq 0$.

Supposons que l'équation (12) admet un point singulier irrégulier fini:

$$p(z,\ t)=\frac{q(z,\ t)}{(z-z_0(t))^r}, \tag{37}$$

où $r\geqslant 3$, $q(z_0(0),\ 0)\neq 0$. Elle admet alors un système fondamental formel de la forme

$$\begin{gathered}\tilde{w}_j=(z-z_0)^{r_j(t)}e^{\eta_j}\Big[1+\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_{js}(t)\,(z-z_0)^s\Big].\\ \eta_1=\frac{2\sqrt{q_0}}{2-r}(z-z_0)^{-r/2+1}\Big[1+\sum_{s=1}^{r/2-2}d_s(t)\,(z-z_0)^s\Big]=-\eta_2\end{gathered} \tag{38}$$

pour r pair, où

$$q_0 = q(z_0(t),\ t).$$

Pour r impair, on a

$$\tilde{w}_j = (z-z_0)^{r_j} e^{\eta_j}\Big[1+\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_{js}(t)\, z^{-s/2}\Big],\quad r_j = 1/4,$$

$$\eta_1 = \frac{2\sqrt{q_0}}{2-r}(z-z_0)^{-r/2+1}\Big[1+\sum_{s=1}^{(r-3)/2} d_s(t)\,(z-z_0)^s\Big] = -\eta_2. \tag{39}$$

Introduisons les secteurs S_l: $\frac{2\pi(l-1)}{r-2} - \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2\pi l}{r-2}$, $|z-z_0| < r$, où $\delta > 0$ est assez petit. L'équation (12), (37) admet des systèmes fondamentaux de solutions tels que $w_j^l \sim \tilde{w}_j$ lorsque $z \to z_0$, $z \in S_l$. La déformée (12), (37) est dite *isomonodrome* au voisinage du point z_0 si sont satisfaites les propriétés de déformation

$$dr_j = 0,\quad dC_l = 0.$$

La fonction $A(z,\ t)$ présente alors un zéro du premier ordre en z_0 et

$$A(z,\ t) \sim \frac{2\dot{q}_0}{(2-r)\,q_0}(z-z_0),\quad z \to z_0. \tag{40}$$

Considérons le cas général

$$p(z,\ t) = \sum_{j=1}^{K}\Big[\frac{\alpha_{j2}(t)}{(z-a_j(t))^2} + \frac{\alpha_{j1}(t)}{z-a_j(t)}\Big] + \\ + \sum_{j=1}^{L}\Big(\sum_{s=1}^{s_j} \frac{\beta_{js}(t)}{(z-b_j(t))^s}\Big) + \sum_{j=1}^{M} \gamma_j(t)\, z^j,\quad s_j \geqslant 3. \tag{41}$$

Les fonctions α_{js}, β_{js}, γ_j, a_j et b_j sont holomorphes pour $t \in U$, les points a_j et b_j sont distincts et pour $t = 0$ on a $(\alpha_{j2},\ \alpha_{j1}) \neq (0,\ 0)$, $\beta_{js_j} \neq 0$, $\gamma_M \neq 0$. L'équation (12) admet alors les points singuliers réguliers $a_1(t), \ldots, a_K(t)$ et les points singuliers irréguliers $b_1(t), \ldots, b_L(t)$, ∞.

Il est entendu que sous les conditions imposées à p les équations de la forme (12), (41) n'épuisent pas tous les cas possibles. Et notamment les cas: 1° tous les points singuliers de l'équation situés sur la sphère de Riemann sont réguliers (ce cas a été étudié plus haut); 2° tous les points singuliers sont irréguliers; 3° le point $z = \infty$ est un point singulier irrégulier, mais d'un autre type: $p \sim c(t) z^{-1}$, $c(0) \neq 0$, lorsque $z \to \infty$, etc. Ces cas se traitent comme le cas donné.

Considérons les secteurs S_{jl} au voisinage du point b_j et comme plus haut désignons les multiplicateurs de Stokes et les nombres r_s par $C_l^{(b_j)}$ et $r_s^{(b_j)}$. Prenons w^1 pour système fondamental canonique.

Fixons j et désignons par $w_l^{(b_j)}$, $r_s^{(b_j)}$ et $C_l^{(b_j)}$ le système fondamental de solutions, les nombres r_s et les multiplicateurs de Stokes associés au point b_j. Introduisons les matrices de liaison:

$$w^1 = w_1^{(b_j)} Q_j(t).$$

Considérons un petit voisinage du point $z = a_j$. Supposons que la différence des exposants caractéristiques $\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$ en a_j ou bien n'est pas un nombre entier, ou en est un, mais le système fondamental de solutions ne contient pas $\ln(z - a_j)$. Alors

$$w^1 = (\psi_1^j, \psi_2^j)(z - a_j)^{L_j}, \quad L_j = T_j^{-1}(t)\,\Lambda_j(t)\,T_j(t),$$

où $\Lambda_j(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{1j}, \lambda_{2j})$, les fonctions $\psi_j(z, t)$ sont holomorphes au voisinage de a_j et $(\psi_1, \psi_2) \neq (0, 0)$ en a_j.

On appelle *données de monodromie* pour l'équation (12), (41), l'ensemble des fonctions et matrices

$$r_s^{(\infty)}, \quad r_s^{(b_j)}, \quad C_l^{(\infty)}, \quad C_l^{(b_j)}, \quad Q_j, \; L_j.$$

On dit que l'équation déformée (12), (41) est isomonodrome si sont vérifiées les propriétés de déformation

$$dr_s^{(\infty)} = 0, \quad dr_s^{(b_j)} = 0, \quad dC_l^{(\infty)} = 0, \quad dC_l^{(b_j)} = 0, \quad dQ_j = 0, \quad dL_j = 0.$$

Une condition nécessaire et suffisante d'isomonodromie de l'équation déformée est l'existence de fonctions $A(z, t)$ et $B(z, t)$ rationnelles en z telles que la relation (17) est satisfaite pour les solutions du système fondamental canonique. Les liens entre A et B, l'équation pour A et les propriétés analytiques de $A(z, t)$ sont indiqués plus haut.

Considérons des exemples concrets.

1. Soit l'équation

$$w'' = \sum_{m=0}^{n} c_m(t)\, z^m.$$

Elle présente un seul point singulier $z = \infty$ (irrégulier), de sorte que la fonction A admet un pôle du premier ordre et pas d'autres points singuliers. Donc, $A = az + b$, où a et b sont des fonctions de t et de plus $a = \dot{c}_n/(n + 2)\, c_n$ (cf. (33)). En portant cette expression dans l'équation (18) et en identifiant les coefficients des puissances de t, on obtient le système d'équations

$$(m + 2)\, ac_m - \dot{c}_m + b\,(m + 1)\, c_{m+1} = 0,$$

où $c_{n+1} = 0$. On en déduit $b = [\ddot{c}_{n-1} - a\,(n+1)\,c_{n-1}]/(nc_n)$. Pour $m \leqslant n-2$, ces équations nous fournissent des relations entre les coefficients $c_{n-2}, \ldots, c_0$. On remarquera que si $\dot{c}_n = \dot{c}_{n-1} = 0$, tous les autres coefficients doivent être constants.

2. Considérons l'équation

$$w'' = \frac{a}{z^2} + \frac{b(t)}{z} + \sum_{m=0}^{n} c_m(t)\, z^m.$$

Elle admet un point singulier régulier en $z = 0$ et un point singulier irrégulier en $z = \infty$. Supposons que la différence des exposants caractéristiques au point $z = 0$ n'est pas un nombre entier. En portant A dans l'équation (18) et en tenant compte de ce que $A(0, t) = 0$, $A = \alpha z$, $\alpha = \dot{c}_n/(n+2)\,c_n$ (cf. (20), (33)), on obtient

$$b(t) \equiv 0, \quad 2\alpha c_m - \dot{c}_m + (m+1)\,c_{m+1} = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Livres

1. BABITCH V., BOULDYREV V.— *Méthodes asymptotiques dans les problèmes de diffraction des ondes courtes*. Moscou, Naouka, 1972 (en russe).
2. BELLMAN R. — *Stability Theory of Differentials Equations*. New York, 1953.
3. CARTAN E.— *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Paris, Hermann, 1945.
4. CODDINGTON E., LEVINSON N.— *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, 1955.
5. COLE J.— *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Walten, 1968.
6. ERDELYI A.— *Asymptotic expansions*. New York, Dover, 1956.
7. FECHTCHENKO S., SCHKIL N., NIKOLENKO L.— *Méthodes asymptotiques en théorie des équations différentielles linéaires*. Kiev, Naoukova doumka, 1966 (en russe).
8. FÉDORIOUK M.— *Méthode du col*. Moscou, Naouka, 1977 (en russe).
9. FRÖMAN N., FRÖMAN P.— *JWKB Approximation*. Amsterdam, 1965.
10. GOLOUBEV V.— *Cours de théorie analytique des équations différentielles*. Moscou-Léningrad, Gostekhizdat, 1956 (en russe).
11. *Handbook of Mathematical Functions*. Ed. by M. ABRAMOVITZ and I. STEGUN. National Bureau of Standards. USA, 1964.
12. HARTMAN Ph.— *Ordinary Differential Equations*. New York, 1967.
13. HEADING J.— *An Introduction to Phase-Integral Methods*. London, 1962.
14. HILLE E.— *Ordinary differential equations in the complex domain*. New York, Wiley, 1976.
15. INCE E. L.— *Ordinary differential equations*. London, a.o., New York, Dover publ., 1944.
16. JENKINS J.— *Univalent Functions and Conformal Mapping*. Berlin West, 1958.
17. KAMKE E.— *Differentialgleichungen*. Berlin, 1944.
18. KOSTIOUTCHENKO A., SARGSIAN I.— *Distribution des valeurs propres*. Moscou, Naouka, 1979 (en russe).
19. LANDAU L., LIFCHITZ E.— *Physique théorique*, t. 3: *Mécanique quantique*. Ed. Mir, 1980.
20. LÉVITAN B., SARGSIAN I.— *Introduction à la théorie spectrale*. Moscou, Naouka, 1970 (en russe).
21. LOMOV S.— *Introduction à la théorie générale des perturbations singulières*. Moscou, Naouka, 1981 (en russe).
22. MASLOV V.— *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Paris, Dunod — Gauthier — Villars, 1972.
23. MASLOV V., FÉDORIOUK M.— *Semi-classical approximation in quantum mechanics*. Reidel Publ. comp., Holland, 1978.
24. MOÏSSÉEV N.— *Méthodes asymptotiques de mécanique non linéaire*. Moscou, Naouka, 1981 (en russe).

25. NAÏMARK M.— *Opérateurs différentiels linéaires*. Moscou, Naouka, 1969 (en russe).
26. NAYFEH A.— *Perturbation Methods*. New York, 1973.
27. OLVER F.— *Introduction to Asymptotics and Special Functions*. New York — London, 1974.
28. OLVER F.— *Asymptotics and special functions*. New York — London, Academic Press, 1974.
29. RACHEVSKI P.— *Théorie géométrique des équations aux dérivées partielles*. Moscou, GTTI, 1947 (en russe).
30. RAPOPORT I.— *Sur certaines méthodes asymptotiques en théorie des équations différentielles*. Kiev, Ed. AN USSR, 1954 (en russe).
31. SATO M., MIWA T., JIMBO M.— Recueil d'articles: *Champs quantiques holonomes*. Ed. Mir, 1983 (en russe). Titres originaux: Holonomic Quantum Fields. Publ. *RIMS*, Kyoto Univ. 14 (1978), 223-267; 15 (1979), 577-629; 871-972; 16 (1980), 531-584; *Lecture Notes in Physics*, n° 116 (1980), 119-142.
32. SPIVAK M.— *Calculus in Manifolds*. New York, 1965.
33. SIBUYA Y.— *Global theory of a second order linear differential equation with a polynomial coefficient*. Amsterdam, North-Holland Publ. comp., 1975.
34. TAMARKINE Ya.— *Sur certains problèmes généraux de théorie des équations différentielles et sur le développement des fonctions en séries*. Pétrograd, 1917 (en russe).
35. TITCHMARSH E.— *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*. T. 1: Oxford, 1946; T. 2: Oxford, 1958.
36. VASSILIÉVA A., BOUTOUZOV V.— *Développements asymptotiques des solutions d'équations singulièrement perturbées*. Moscou, Naouka, 1973 (en russe).
37. WASOV W.— *Asymptotic Expansions for ordinary Differential Equations*. New York, 1965.

2. Articles

38. ABRAMOV A.— Sur les conditions aux limites en un point singulier pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires. *JVM i MF*, 1971, 11, n° 1, p. 275-278 (en russe).
39. ABRAMOV A., BALLA K., KONIOUKHOVA N.— Transfert des conditions aux limites de points singuliers pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires. *Soobchtchénia po vytchislitelnoï matematike*. Moscou, Centre de calcul de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., 1981, p. 1-64 (en russe).
40. ALENITSYNE A.— Ondes de Rayleigh dans une couche élastique non homogène. *Prikladnaïa matem. i mekhan.*, 1964, 28, n° 5, p. 880-888 (en russe).
41. ALENITSYNE A.— Eclatement du spectre engendré par une barrière de potentiel dans les problèmes à potentiel symétrique. *Diff. ouravn.*, 1982, 18, n° 11, p. 1971-1975 (en russe).
42. ARNOLD V.— Sur les matrices dépendant de paramètres. *UMN*, 1971, 62, v. 2, p. 101-114 (en russe).
43. BERK H. L., NEVINS W. M., ROBERTS K. V.— New Stokes line in WKB theory. *J. Math. Phys.*, 1982, 23, n° 6, p. 988-1002.
44. BIRKHOFF J. D.— Quantum mechanics and asymptotic series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, 32, p. 681-700.
45. BOULDYREV V., SLAVIANOV S.— Développements asymptotiques uniformes des solutions d'une équation de type Schrödinger à deux points de retour. I. *Vestnik LGU*, 1968, 22, v. 4, p. 70-84 (en russe).
46. BOUTOUZOV V., VASSILIÉVA A., FÉDORIOUK M.—Méthodes asymptotiques en théorie des équations différentielles ordinaires. *Itogui naouki*. Analyse mathém., 1967, VINITI AN SSSR, Moscou, 1969, p. 5-73 (en russe).

47. BRAAKSMA L. J.— Asymptotic analysis of a differential equation of Turritin, *SIAM J. Math. Anal.*, 1971, nº 1, p. 1-16.
48. CHERRY T. M.— Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68, nº 1, 1950, p. 224-257.
49. CHIRIKIAN R.— Méthodes asymptotiques en théorie des opérateurs différentiels singuliers à une dimension d'ordre impair. *Differ. ouravnénia*, 1967, 3, nº 11, p. 1942-1956 (en russe).
50. DEVINATZ A.— An asymptotic theorem for systems of linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, 160, nº 10, p. 353-363.
51. DEVINATZ A.— The deficiency index of a certain class of ordinary self-adjoint differential operators. *Advances in Math.*, 1972, 8, p. 434-473.
52. DEVINATZ A.— The deficiency index of certain fourth-order ordinary self-adjoint differential operators. *Quart. J. Math.* Oxford, 1972, 23, nº 91, p. 267-286.
53. DEVINATZ A., KAPLAN I. M.— Asymptotic estimates for solutions of linear systems of ordinary differential equations having multiple characteristic roots. *Indiana Univ. Math. J.*, 1972, 22, nº 4, p. 355-366.
54. DNESTROVSKI Yu., KOSTOMAROV D.— Sur la représentation asymptotique des valeurs propres pour le problème aux limites non auto-adjoint. *JVM i MF*, 1964, 4, v. 2, p. 267-277 (en russe).
55. DORODNITSYNE A.— Distributions asymptotiques des valeurs propres pour certains types particuliers d'équations différentielles du second ordre. *OMN*, 1952, 7, v. 6, p. 3-96 (en russe).
56. EVGRAFOV M., FÉDORIOUK M.— Représentation asymptotique des solutions de l'équation $w'' (z) - p (z, \lambda) w (z) = 0$ lorsque $\lambda \to \infty$ dans le plan de z complexe. *OMN*, 1966, 21, v. 1, p. 3-50 (en russe).
57. FÉDORIOUK M. Représentation asymptotique du spectre discret de l'opérateur $w''(x) - \lambda^2 p (x) w (x)$. *Matem. Sbornik*, 1965, 68, nº 1, p. 81-110 (en russe).
58. FÉDORIOUK M.— Topologie des lignes de Stokes pour les équations du second ordre. *Izvestia AN SSSR*, ser. Matem., 1965, 29, nº 3, p. 645-656 (en russe).
59. FÉDORIOUK M.— Problème de diffusion à une dimension en approximation quasi classique. I. *Diff. ouravnénia*, 1965, 1, nº 5, p. 631-646. II. 1965, 1, nº 11, p. 1525-1536 (en russe).
60. FÉDORIOUK M.—Représentation asymptotique des solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre *n*. *Diff. ouravnénia*, 1966, 2, nº 4, p. 492-507 (en russe).
61. FÉDORIOUK M.— Méthodes asymptotiques en théorie des opérateurs différentiels singuliers à une dimension. *Troudy de la Société math. de Moscou*, 1966, 15, p. 296-345 (en russe).
62. FÉDORIOUK M.— Représentation asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres d'opérateurs différentiels singuliers à une dimension. *DAN SSSR*, 1966, 169, nº 2, p. 288-291 (en russe).
63. FÉDORIOUK M.— Propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion en dimension un. I. *Diff. ouravnénia*, 1968, 4, nº 10, p. 1842-1853. II. 1969, 5, nº 3, p. 507-517 (en russe).
64. FÉDORIOUK M.— Méthodes asymptotiques en théorie des équations différentielles ordinaires linéaires. *Matem. sbornik*, 1969, 79, nº 4, p. 477-516 (en russe).
65. FÉDORIOUK M.— Représentation asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville à potentiel-polynôme complexe. I. *Diff. ouravnénia*, 1972, 8, nº 5, p. 811-816. II. 1974, 10, nº 6, p. 1068-1073 (coauteur JDANOVA G.) (en russe).
66. FÉDORIOUK M.— Invariant adiabatique d'un système d'oscillateurs

linéaires et théorie de la diffusion. *Diff. ouravnénia*, 1976, 12, nº 6, p. 1012-1018 (en russe).
67. FÉDORIOUK M.— Problème de Sturm-Liouville à points singuliers réguliers. I. *Diff. ouravnénia*, 1982, 18, p. 2166-2173; II. 1983, 19, nº 2, p. 278-286 (en russe).
68. FLASCKA H., NEWELL A. C.— *Commun Math. Phys.*, 1980, 76, p. 65-116.
69. FUCHS R. Über lineare homogene Differentialgleichungen mit drei im Endlich gelegenen wesentlich singuläre Steller. *Math. Ann.*, 1907, bd. 63, s. 70.
70. GARNIER R.— Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Ann. Scient. Ecole Norm. Sup.*, 1912, 29, 2, p. 1-126.
71. GILBERT R. C.— The deficiency index of a third order operator. *Pacific J. Math.*, 1977, 68, nº 2, p. 369-392.
72. GINGOLD H.— Simplification of linear homogeneous differential equations with moving singularities. *Funkc. Ekvac.*, 1976, 19, p. 203-225.
73. GOLLWITZER H. E.— Stokes multipliers for subdominant solutions of second order differential equations with polynomial coefficients. Univ. Minnesota, Inst. Tecnology, School Math., Minneapolis, 1967, p. 1-67.
74. HARRIS W. A., LUTZ D. A. — On the asymptotic integration of linear differential systems. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1974, 48, p. 1-16.
75. HARRIS W. A., LUTZ D. A.— Asymptotic integration of adiabatic oscillators. *J. Math. Anal. and. Appl.*, 1975, 51, p. 76-93.
76. HEALING J. — Generalized approximate methods for transmission through a barrier governed by a differential equation of order $2n$. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1979, 85, p. 361-377.
77. IWANO M.— Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter. *Funkc. Ekvac.*, 1963, 5, p. 71-134.
78. JDANOVA G.— Représentation asymptotique des valeurs propres d'un opérateur singulier auto-adjoint d'ordre $2n$. *Diff. ouravnénia*, 1970, 6, nº 5, p. 838-851 (en russe).
79. JDANOVA G.— Représentation asymptotique formelle d'un système fondamental de solutions d'une équation de théorie de l'élasticité. *Diff. ouravnénia*, 1982, 18, nº 9, p. 1820-1821 (en russe).
80. JDANOVA G., FÉDORIOUK M.— Théorie asymptotique de systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre et problème de diffusion. *Troudy de la Société math. de Moscou*, 1977, 34, p. 213-242 (en russe).
81. KELLY B. J.— Admissible domains for higher order differential operators. *Studies in Appl. Math.*, 1979, 60, p. 211-240.
82. KIMURA T.— Degeneration of the two dimensional Garnier systems. *Proc. Japan Acad.*, 1981, 57, Ser. A, 9, p. 446-449.
83. KIMURA T.— On the isomonodromic deformation for the linear ordinary differential equations of the second order. *Proc. Japan Acad.*, 1981, 57, Ser. A, 6, p. 285-290.
84. KIMURA T.— On the isomonodromic deformation for linear ordinary differential equations of the second order. II. *Proc. Japan Acad.*, 1982, 58, Ser. A, 5, p. 294-297.
85. KIMURA T.— On the isomonodromic deformation of a linear ordinary differential equations of the third order. *Proc. Japan Acad.*, 1983, 59, Ser. A, 6, p. 219-222.
86. KOHNO M., OHKOHCHI S., KOHMOTO T.— On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter. *Hiroshima Math. J.*, 1979, 9, p. 747-767.

87. KONIOUKHOVA N.— Sur la détermination de variétés stables pour certains systèmes non linéaires d'équations différentielles ordinaires à singularités. *JVM i MF*, 1973, 13, nº 3, p. 609-626 (en russe).
88. KOUTCHÉRENKO V.— Représentation asymptotique d'une solution du système $A(x, -ih\ \partial/\partial x)\ u = 0$ lorsque $h \to 0$ dans le cas de caractéristiques de multiplicité variable. *Izvestia AN SSSR*, ser. Matem., 1974, 95, nº 23, p. 625-662 (en russe).
89. KOUTCHÉRENKO V., OSSIPOV Yu.—Solutions asymptotiques d'équations différentielles ordinaires à symbole dégénéré. *Matem. sbornik*, 1982, 118, nº 1, p. 74-103 (en russe).
90. LANGER R. E.— The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1934, 36, p. 90-106.
91. LEE K.— Turning point problems of almost diagonal systems. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1968, 24.
92. LEUNG A.— Studies on double asymptotic series solutions for differential equations in unbounded domains. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1973, 44, p. 238-263.
93. LEUNG A.— A double asymptotic existence theorem and its application to order reduction. *Proc. London Math. Soc.*, 1976, 33, p. 151-156.
94. LEUNG A.— Lateral connections for asymptotic solutions for higher order turning points in unbounded domains. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1975, 50, p. 560-578.
95. LEUNG A., MEYER K.— Adiabatic invariants of Hamiltonian systems. *J. of Diff. Equat.*, 1975, 17, p. 32-43.
96. MIWA T.— Deformation of linear ordinary differential equations. *Proc. Japan. Acad.*, 1980, 56, Ser. A, 7, p. 301-305.
97. MORI Y.— On functions of a class of Painlevé type equations. *Proc. Japan. Acad.*, 1980, 56, Ser. A, 6, p. 250-255.
98. NAKANO M.— Second order linear ordinary differential equations with turning points and singularities. I. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1977, 29, p. 88-102.
99. NAKANO M., NISHIMOTO T.— On a secondary turning points problems. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, 22, p. 355-384.
100. NISHIMOTO T.— On the central connection problem at a turning point. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, 22, p. 30-44.
101. NISHIMOTO T.— On an extension theorem and its application for turning point problems of large order. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1973, 25, p. 458-489.
102. NISHIMOTO T.— Uniform asymptotic properties of the WKB method. *Kodai Math. J.*, 1981, 4, p. 71-81.
103. NOBUOKA K.— Isomonodromy problem of Schlesinger equation. *Proc. Japan Acad.*, 1981, 57, Ser A., 10, p. 488-491.
104. OKAMOTO K.—Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. *Proc. Japan Acad.*, 1980, 56, Ser. A; I, 6, p. 264-268; II, 8, p. 367-371.
105. OLVER F. W.— Second-order linear differential equations with two turning points. *Phil. Trans. Roy. Soc.* London, 1975, Ser. A., 278, p. 137-174.
106. OLVER F. W.— Improved error bounds for second-order differential equations with two turning points. *J. Research Nat.* Bureau Stand., 1976, 80B, nº 4, p. 437-440.
107. OLVER F. W.— Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicaties. *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, nº 4, p. 673-700.
108. OLVER F. W.— Second-order differential equations with fractional transition points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977, 226, p. 227-241.
109. OLVER F. W.— Connection formulas for second-order differential equa-

tions with multiple turning points. *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, n° 1, p. 127-154.
110. OLVER F. W.— General connection formulae for Liouville-Green approximations in the complex plane. *Phil. Trans. Roy. Soc.* London, Ser. A, 1978, 289, p. 501-548.
111. POVZNER A.— Constantes de Stokes pour l'équation de Schrödinger à coefficients polynomiaux. *Teor. i matem. fiz.*, 1982, 51, n° 1, p. 54-72 (en russe).
112. ROOS H.-G.— Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweisegmentigem charakteristischem Polygon. *Betr. Anal.*, 1975, 7, p. 55-63.
113. ROOS H.-G.— Die asymptotische Lösung einer linearen Differentialengleichung mit dreisegmentigem charakteristischen Polygon. *Math. Nachr.*, 1979, 88, p. 93-103.
114. SCHLESINGER L.— Zur theorie der linearen Differentialgleichungen in Anschless an des Riemannsche problem. *Journ. für Math.*, 1912, bd. 193, s. 138.
115. SIBUYA Y.— Some global properties of matrices of functions of one variable. *Math. Ann.*, 1965, 161, p. 67-77.
116. SIBUYA Y.— Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 1974, n° 149.
117. SIMONIAN S.— Estimation asymptotique de la largeur des lacunes dans le spectre d'un opérateur de Sturm-Liouville à potentiel périodique. *Diff. ouravnénia*, 1970, 6, n° 7, p. 1265-1272 (en russe).
118. SLAVIANOV S.— Représentation asymptotique des solutions des problèmes singuliers de Sturm-Liouville par rapport au grand paramètre dans le cas de points de retour voisins. *Diff. ouravnénia*, 1969, 5, n° 2, p. 313-325 (en russe).
119. SMIRNOV V.— Représentation asymptotique lorsque $\lambda \to \infty$ des matrices de monodromie de l'équation $w''(z) - \lambda^2 q(z) w(z) = 0$. *Troudy MIEM*, 1969, 5, p. 153-191 (en russe).
120. STENGLE G.— Asymptotic estimates for the adiabatic invariance of a simple oscillator. *SIAM J. Math. Anal.*, 1977, 8, n° 4, p. 640-654.
121. STUECKELBEGR E. C.— Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen. *Helv. Phys. Acta*, 1932, 5, p. 370-422.
122. TURRITIN H. L.— Asymptotic expansion of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter. Contributions to the theory of non linear oscillations. V. II. *Annals of mathematics Studies*, n° 29, Princeton Univ. Press, 1952, p. 81-116.
123. UENO K.— Monodromy preserving deformation of linear differential equations with irregular singular points. *Proc. Japan. Acad.*, 1980, Ser. A, n° 8, p. 97-102
124. UENO K.— Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory. *Proc. Japan Acad.*, 1980, 56, Ser. A, 3, p. 103-108.
125. VICHIK M., LIOUSTERNIK L.— Dégénérescence régulière et couche limite d'équations différentielles linéaires à petit paramètre. *UMN*, 1960, 12, v. 5, p. 3-122 (en russe).
126. VICHIK M., LIOUSTERNIK L.— Résolution de certains problèmes de perturbation dans le cas de matrices et d'équations différentielles auto-adjointes et non auto-adjointes. *UMN*, 1960, 15, v. 3, p. 3-80 (en russe).
127. WASOW W.— Turning point problems for systems of linear equations. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, 14, p. 657-673. II. 1962, 15, p. 173-187.
128. WASOW W.— Asymptotic simplification of self-adjoint differential equations with a parameter. *J. Differ. Equat.*, 1966, 2, n° 4, p. 378-390.
129. WASOW W.— Simple turning-point problems in unbounded domains. *SIAM J. Math. Anal.*, 1970, 1, n° 2, p. 153-170.

130. WASOW W.— The central connection problem at turning points of linear differential equations. *Comm. Math. Helv.*, 1971, 46, p. 65-86.
131. WASOW W.— Calculation of an adiabatic invariant by turning point problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, 5, n° 4, p. 673-700.
132. WASOW W.— Asymptotic simplification of linear Hamiltonian differential equations with a parameter. *Funk. Ekv.*, 1975, 18, p. 257-270.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Amplitude de diffusion 87, 89
Analyticité des solutions 10, 153
— — par rapport au paramètre 46, 122
Approximation quasi classique 34, 44
— WKB 34, 44, 62

Bernouilli, nombre de 357
Bessel, équation de 218
—, fonction de 110, 218, 227
Birkhoff, théorème de 103
Bohr-Sommerfeld, règle de quantification 133
Bürmann-Lagrange, formule de 82, 131

Chemin(s) canonique 102, 109, 129, 155, 230, 231, 316, 379, 380
— équivalents 102
— S-homotopes 102
Coefficients de réflexion 86, 161, 166, 180
— de transmission 86, 166, 174 à 177, 180
Complexe de *Stokes* 94, 121, 144, 145, 149
— — multiple 121
— — simple 121
Condition de rayonnement 105
— — de *Sommerfeld* 64
Confluence des points de retour 240 à 249
Courbes singulières 121
Critère d'irrégularité d'un point singulier 25
— de régularité d'un point singulier 13
Crochets de *Poisson* 364

Déformation isomonodrome 383
Déformé isomonodrome 384, 389, 398
— d'un système 383
Dérivée de *Schwarz* 35, 235
Développement asymptotique des fonctions d'*Airy* 192
— extérieur 243, 247, 351
— intérieur 243, 244, 248, 352, 353
Distributions d'*Airy* 350, 359
— — de première espèce 360
Domaine(s) admissible 316, 318 à 322
— canonique 106, 107, 110 à 119, 123, 137 à 141, 249
— compatibles 115
— de type bande 100, 107, 126, 139, 248, 249
— — couronne 100
— — demi-plan 100, 107, 139, 248, 249
— — disque 100
— de validité de la représentation asymptotique 109 à 111
Données de monodromie 393, 398, 420

Estimations WKB 39
Equation(s) d'*Airy* 188, 190, 198, 210, 356
— — généralisée 350, 356
— caractéristique 51, 259, 261, 262, 314
— de la classe de *Fuchs* 17
— déterminante 14
— d'*Euler* 14, 355
— intégrales 40, 41, 215, 216, 345
— isomonodrome 406, 409
— de *Legendre* 151
— modèles 210 à 212, 217 à 221
— de *Ricatti* 24, 30, 37, 42
— de *Schrödinger* 133, 160
— de *Sturm-Liouville* 73, 147
— de *Turritin* 355
Exemple de *Perron* 76
Exposants caractéristiques 17, 181

Faisceau linéaire de matrices 263, 269, 304, 305
Faux spectre 152
Fonction(s) admissible 320
— d'*Airy* 188, 190 à 194, 198, 209, 220, 326
— — généralisées 350
— de *Bessel* 110, 218, 227
— — d'un argument imaginaire 218, 227
— de contrôle de l'erreur 200, 221
— douce 337
— hamiltonienne 337
— holomorphe 9
— lentement croissante 75
— de *Macdonald* 210, 227
— de *Meyer* 356
— de *Neumann* 219, 228
— propre 151, 364
— de *Weber* 218, 238, 239
Formes normales d'*Arnold* de matrices 338, 339
Formu'e s) asymptotiques de *Dorodn tsyne* 197
— de *Bürmann-Lagrange* 82, 131
— de *Landau-Lifchitz* 141
— de quantification de *Bohr-Sommerfeld* 134
— de raccordement 194, 202, 224, 233, 246, 318, 380

Graphe(s) de *Stokes* 94, 121
— équivalents 121
Groupe de monodromie 20, 125

Intégrale abélienne 132, 146
— de *Fresnel* 347
Invariant(s) adiabatique(s) 91, 174
— — d'*Ehrenfest* 91
— — de systèmes canoniques 363 à 364
— — d'un système du second ordre 363
— de *Lewis* 91
— d'un oscillateur linéaire 91, 92, 174, 175
Isomonodromie 383
— globale 398
— locale 406

Lacune 181
Lignes anti-*Stokes* 94
— de niveau 94, 98, 99
Lignes de *Stokes* 27, 93 à 101, 109 à 122, 128, 129, 133, 138, 139, 142, 146, 149, 150, 153, 154, 157, 163, 164, 167 à 170, 174, 179, 183 à 186, 192, 208, 209, 248, 249, 319 à 321, 365, 378, 379, 381
— — conjuguées 94
— λ-symbole 250, 341
— principal 341

Matrice(s) antihermitienne 344, 347
— antisymétrique 303
— canonique 384, 389
— des chemins canoniques 316
— de diffusion 86, 362
— élémentaires 113
— hamiltonienne par blocs 337
— hermitienne 270, 348, 362
— de monodromie 185, 187
— de passage 106, 113 à 119, 136, 156, 157, 165, 172
— de *Stokes* 27
— symplectique 304
— unitaire 86, 345, 347, 362
Méthode du col 90
— de *Frobenius* 15
— de *Laplace* 90
— de phase stationnaire 346
— de raccordement des développements asymptotiques 351
Multiplicateurs 181, 182
— de *Stokes* 27, 358, 392, 409

Niveau quasi stationnaire 177
Nombres de *Bernoulli* 357

Opérateur canonique de *Maslov* 341
Oscillateur harmonique 91, 92, 121, 132, 133

Période d'une intégrale abélienne 132, 146
Point(s) de retour 43, 50, 55, 94, 95, 240, 251, 263, 325
— — complexes 236, 237
— — fractionnaires 212 à 226
— — multiple 212 à 226, 229 à 233
— — réels 234 à 236
— — secondaires 240, 248
— — simple 206, 326
Point singulier 11
— — fixe 414
— — à l'infini 11

Point singulier irrégulier 13, 25 à 34, 97, 101, 341
— — mobile 414
— — de première espèce 18, 19
— — régulier 13, 21
— — de seconde espèce 18, 19
— — de type R_1 126, 210
— — — R_2 126, 127
Pôle du coefficient 95 à 100
Polygone caractéristique 240
Problème de diffusion 85 à 92, 161, 166, 174
— de réflexion sur une barrière 160, 162, 170
— de *Regge* 83
— de *Sturm-Liouville* 81
— de traversée d'une barrière 161, 166
— aux valeurs propres 81 à 85, 126, 142, 150 à 160, 364 à 369
Prolongement analytique des approximations WKB 122, 123
— — d'une solution 10, 124, 155
Propriétés de déformation 393

Quasi-dérivées 259

Racines asymptotiquement simples 275
Rang d'un point singulier 25
— d'un système 19
Règle de quantification de *Bohr-Sommerfeld* 133
Représentation(s) asymptotique double 60, 70 à 76, 108, 145, 280, 286, 295, 296, 308, 323, 324
— — des fonctions propres 135, 136
— — des solutions 43 à 53, 62 à 70, 105, 109, 253, 258 à 262, 274, 275, 281, 282, 284, 286
— — des valeurs propres 131, 140 à 143, 149, 150, 158 à 160

Série normale 26
— sous-normale 26
Sixième équation de *Painlevé* 414
Solution(s) asymptotique sous la forme de *Cherry* 190
— — — — d'*Olver* 188
— transcendantes de *Painlevé* 415
Sous-rang d'un point singulier 25
Spectre discret 128
Symbole d'un opérateur 250, 341
Système(s) canonique 303, 337
— de la classe de *Fuchs* 20
— compatibles 115
— *L*-diagonaux 59, 60
— d'équations du plasma magnétisé 372
— fondamentaux élémentaires 112 à 118, 124, 125, 138, 141, 165, 169 à 171
— hamiltonien 303
— de *Pfaff* 387
— — complètement intégrable 387
— quasi-diagonal 57
— de *Stueckelberg* 371
— — à points de retour 377 à 382
— de théorie de l'élasticité 373
— de type *Dirac* 37

Théorème de *Birkhoff* 103
— de *Cauchy* 10
— de *Floquet-Liapounov* 180
— de *Frobenius* 387
— de *Hartman-Wintner* 298
— de *Levinson* 59, 313
— de *Norlond* 52
— de *Perron* 57
Transfert des conditions aux limites 30
Transformation de *Fourier* 342
— de *Liouville* 35
— de *Prüfer* 36

Valeur propre 151, 263, 364, 369
— régulière d'un paramètre 121
— singulière d'un paramètre 121
Variable endogène 244
Variation totale de l'invariant adiabatique 91, 363
Variété(s) intégrale 387
— de solutions bornées 21 à 23, 29 à 33
Vecteur chemin canonique 316
— propre à droite 263
— — à gauche 264

Zéros des fonctions d'*Airy* 193
— de la solution 111